TEORI KETERBAGIAN

ALGORITMA PEMBAGIAN

Teorema 2.1: (Algoritma Pembagian)

Diberikan bilangan bulat *a* dan *b*, dengan $b > 0$, maka ada bilangan bulat tunggal *q* dan *r* yang memenuhi

$$a = qb + r, \qquad 0 \le r < b.$$

Bilangan bulat *q* dan *r* disebut *hasil bagi* dan *sisa* dari pembagian *a* oleh *b*.

Bukti:

- Bentuk $S = \{a-xb | x \in Z;\ a-xb \geq 0\}$. Akan diperlihatkan eksistensi dari r dan q.
- Karena bilangan asli $b \geq 1$, maka $|a|b \geq |a|$ dan

$$a-(-|a|)b = a+|a|b \geq a+|a| \geq 0$$

- Pilih $x=(-|a|)$. Maka $a-xb \in S$. Jadi $S \neq \varnothing$
- Dari Prinsip Terurut Baik, maka S mempunyai unsur terkecil, namakan r.
- Dari definisi S, ada bilangan bulat q yang memenuhi

$$r = a-qb, \qquad 0 \leq r.$$

- Andaikan $r \geq b$, maka

$$a-(q+1)b = (a-qb)-b = r-b \geq 0.$$

- Jadi $a-(q+1)b \in S$. Tetapi $a-(q+1)b = r-b < r$ mengakibatkan kontradiksi dengan r unsur terkecil dari S. Jadi haruslah $r < b$.

- Akan diperlihatkan ketunggalan dari q dan r.
- Misalkan a dapat dituliskan dalam dua bentuk,

$$a = qb+r = q'b+r' \qquad 0 \le r < b,\ 0 \le r' < b.$$

- Maka $r'-r = b(q-q')$ dan $|r'-r| = b|q-q'|$.
- Dengan menambahkan $-b<-r\le 0$ dan $0\le r'<b$, maka

$$-b<r'-r<b \text{ atau } |r'-r|<b.$$

- Jadi $b|q-q'|<b$. Akibatnya $0\le|q-q'|<1$.
- Karena $|q-q'|$ bilangan bulat tak negatif, maka haruslah $|q-q'|=0$. Akibatnya $q=q'$. Sehingga $r=r'$. $\square$

rinimarwati@upi.edu

Akibat (Teorema Euclid)

Jika a dan b bilangan bulat dengan $b \neq 0$, maka ada bilangan bulat tunggal q dan r sedemikian hingga

$$a=qb+r, \qquad 0 \leq r < |b|.$$

Bukti:

- Cukup dengan memperlihatkan untuk $b<0$.
- Maka $|b|>0$ dan Teorema 2.1 menjamin ketunggalan q' dan r yang memenuhi

$$a=q'|b|+r, \qquad 0 \leq r < |b|.$$

- Karena $b<0$, maka $|b|=-b$.
- Pilih $q=-q'$, maka

$$a=qb+r, \qquad 0 \leq r < b. \qquad \square$$

Contoh:

- Misalkan $b=-7$. Untuk $a=1, -2, 61$, dan -59 dapat dituliskan

$$1=0(-7)+1$$
$$-2=1(-7)+5$$
$$61=(-8)(-7)+5$$
$$-59=9(-7)+4.$$

- Jika $b=2$, maka sisa yang mungkin adalah $r=0$ dan $r=1$.

Jika $r=0$, bilangan bulat a berbentuk $2q$ dan disebut bilangan genap.

Jika $r=1$, bilangan a berbentuk $2q+1$ dan disebut bilangan ganjil.

- Kuadrat dari bilangan bulat mempunyai sisa 0 atau 1 jika dibagi 4.

Bukti:

a genap $\Rightarrow a=2q \Rightarrow a^2=(2q)^2=4q^2=4k$

a ganjil $\Rightarrow a=2q+1 \Rightarrow a^2=(2q+1)^2=4q^2+4q+1 = 4(q^2+q)+1=4k+1$

- Kuadrat dari bilangan ganjil selalu berbentuk $8k+1$. Buktikan!

Latihan:

Buktikan bahwa

1. Setiap bilangan bulat yang berbentuk 6k+5 juga berbentuk 3k+2, tapi tidak sebaliknya.
2. Setiap bilangan ganjil selalu berbentuk 4k+1 atau 4k+3.
3. Kuadrat dari bilangan bulat selalu berbentuk 3k atau 3k+1.
4. Pangkat tiga dari bilangan bulat selalu berbentuk 9k, 9k+1, 9k+8.

Tugas:

1. Untuk $n \geq 1$, buktikan bahwa $n(n+1)(2n+1)/6$ adalah bilangan bulat.
2. Buktikan bahwa bilangan bulat yang dapat dituliskan dalam bentuk kuadrat dan pangkat tiga (misalnya $64=8^2=4^3$), maka dapat dinyatakan dalam bentuk 7k atau 7k+1

Pembagi Persekutuan Terbesar

Definisi 2.1:
Suatu bilangan bulat *b* dikatakan *dapat dibagi* oleh bilangan bulat $a \neq 0$ jika ada suatu bilangan bulat *c* sedemikian hingga $b = ac$. Dinotasikan $a|b$. Notasi $a \angle b$ diartikan *b* tidak dapat dibagi oleh *a*.

Jika $a|b$ dikatakan *a pembagi* dari *b*, atau *a faktor* dari *b* atau *b kelipatan a*.

Contoh:
- -12 dapat dibagi oleh 4, karena -12=4(-3).
- 10 tidak dapat dibagi 3, karena tidak ada bilangan bulat *c* yang memenuhi $10=3c$.

Teorema 2.2

Untuk bilangan bulat *a*, *b*, *c* berlaku:

(1) $a|0$, $1|a$, $a|a$.

(2) $a|1$ jika dan hanya jika $a=\pm 1$.

(3) Jika $a|b$ dan $c|d$, maka $ac|bd$.

(4) Jika $a|b$ dan $b|c$, maka $a|c$.

(5) $a|b$ dan $b|a$ jika dan hanya jika $a=\pm b$.

(6) Jika $a|b$ dan $b\neq 0$ then $|a|\leq|b|$.

(7) Jika $a|b$ dan $a|c$, maka $a|(bx+cy)$ untuk sebarang $x,y\in Z$

Bukti:

(6) $a|b \Rightarrow \exists\ c \in Z \ni b=ac$.

Karena $b \neq 0$, maka $c \neq 0$.

Diperoleh $|b|=|ac|=|a||c|$.

Karena $c \neq 0$, maka $|c| \geq 1$, akibatnya $|b|=|a||c| \geq |a|$.

(7) $a|b$, $a|c \Rightarrow \exists\ r,s \in Z \ni b=ar$ dan $c=as$.

$\forall\ x,y \in Z$ berlaku $bx+cy = arx+asy = a(rx+sy)$.

Karena $rx+sy \in Z$, berarti $a|(bx+cy)$ □

Sifat (7) dapat diperluas menjadi:

Jika $a|b_k$ untuk $k = 1, 2, \ldots, n$, maka $a|(b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_nx_n)\ \forall\ n_1, n_2, \ldots, n_k \in Z$.

Latihan:

1. Jika a|b, tunjukkan bahwa $(-a)|b$, $a|(-b)$, dan $(-a)|(-b)$.
2. Diberikan a, b, $c \in Z$, buktikan bahwa:
   a. Jika $a|b$, maka $a|bc$.
   b. Jika $a|b$ dan $a|c$, maka $a^2|bc$
   c. $a|b$ jika dan hanya jika $ac|bc$, di mana $c \neq 0$
3. Buktikan atau berikan contoh penyangkal:
   Jika $a|(b+c)$, maka $a|b$ atau $a|c$.

Soal:

1. Buktikan bahwa $\forall\ a \in Z$, salah satu a, $a+2$, $a+4$ dapat dibagi oleh 3.
   (Petunjuk: Bilangan bulat a berbentuk $3k$, $3k+1$, atau $3k+2$).
2. a. $\forall\ a \in Z$, tunjukkan bahwa $2|a(a+1)$ dan $3|a(a+1)(a+2)$.
   b. Buktikan bahwa $4 \angle (a^2+2)$, $\forall\ a \in Z$
3. Untuk $n \geq 1$, gunakan induksi untuk memperlihatkan bahwa
   a. 7 membagi $2^{3n}-1$ dan 8 membagi $3^{2n}+7$;
   b. $2^n+(-1)^{n+1}$ dapat dibagi 3.

rinimarwati@upi.edu

Pembagi Persekutuan Terbesar

Jika $a,b \in \mathbb{Z}$, sebarang, maka $d \in \mathbb{Z}$ dikatakan pembagi persekutuan dari a dan b jika $d|a$ dan $d|b$.

Contoh:

• 1 pembagi setiap bilangan bulat, maka 1 pembagi persekutuan dari a dan b.

• Himpunan pembagi persekutuan positif, tidak kosong.

• Setiap bilangan bulat membagi 0. Jika $a=b=0$, maka setiap bilangan bulat adalah pembagi persekutuan dari a dan b.

Definisi 2.2

Diberikan $a,b \in \mathbb{Z}$, a dan b tidak keduanya 0. Pembagi persekutuan terbesar dari a dan b adalah $d \in \mathbb{N}$ yang memenuhi:

(1) $d|a$ dan $d|b$

(2) jika $c|a$ dan $c|b$, maka $c \le d$.

Dinotasikan d=ppb(a,b).

Contoh:

- Pembagi positif dari -12 adalah 1, 2, 3, 4, 6, 12.
  Pembagi positif dari 30 adalah 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30.
  Pembagi persekutuan dari -12 dan 30 adalah 1, 2, 3, 6.
  ppb(-12,30)=6.
- ppb(-5,5)=5, ppb(8,17)=1, ppb(-8,-36)=4.

Latihan:

1. Untuk $a \in Z$, $a \neq 0$, perlihatkan bahwa ppb(a,0)=|a|, ppb(a,a)=|a|, dan ppb(a,1)=1.
2. Jika $a,b \in Z$, tidak keduanya 0, buktikan bahwa

$$\text{ppb}(a,b) = \text{ppb}(-a,b) = \text{ppb}(a,-b) = \text{ppb}(-a,-b).$$

Soal:

Buktikan bahwa, $\forall n \in N$ dan $\forall a \in Z$, ppb($a,a+n$) membagi n Akibatnya ppb(a,a+1)=1. Dengan kata lain ppb dua bilangan bulat yang berurutan adalah 1.

Kombinasi Linier

Teorema 2.3 (Identitas Benzout)

Diberikan $a,b \in \mathbb{Z}$, tidak keduanya 0, $\exists$ $x,y \in \mathbb{Z}$ ∋

$$ppb(a,b) = ax + by.$$

Bukti:

- Bentuk $S = \{au+bv \mid au+bv > 0; u,v \in \mathbb{Z}\}$.
- S tidak kosong karena
  Jika $a \neq 0$, $a \in \mathbb{Z}$, maka $|a| = au+b.0$ akan termuat di S dengan memilih $u=1$ jika $a>0$ atau $u=-1$ jika $a<0$
- Berdasarkan prinsip terurut baik, S mempunyai unsur terkecil, namakan d. Dengan demikian $\exists$ $x, y \in \mathbb{Z}$ ∋ $d=ax+by$.
- Akan ditunjukkan $d=ppb(a,b)$
  - Dari algoritma pembagian $\exists$ $q,r \in \mathbb{Z}$ ∋ $a=qd+r$ dengan $0 \leq r < d$.
  - Maka $r = a-qd = a-q(ax+by) = a(1-qx)+b(-qy)$.
  - Jika $r > 0$, maka $r \in S$. Kontradiksi dengan d unsur terkecil dari S.

- Jadi haruslah r=0. Akibatnya a=qd. Berarti d|a.
- Dengan alasan yang sama d|b. Akibatnya d pembagi persekutuan untuk a dan b.

- Akan ditunjukkan d adalah pembagi persekutuan yang terbesar.
    - Misalkan c adalah sebarang pembagi persekutuan positif dari a dan b, maka dari Teorema 2.2(7) c|(ax+by). Artinya c|d.
    - Dari Teorema 2.2(6), c=|c| ≤ |d|=d. Berarti d lebih besar dari setiap pembagi persekutuan positif dari a dan b.
    - Dengan demikian d=ppb(a,b). □

Akibat:

Jika diberikan $a,b \in Z$, tidak keduanya sama dengan 0, maka

$$T = \{ax+by \mid x,y \in Z\}$$

adalah tepat himpunan semua kelipatan dari d=ppb(a,b).

Bukti:

- $(\Rightarrow)$
- $d|a,\ d|b \Rightarrow d|(ax+by),\ \forall\ x,y \in Z$.
- Jadi setiap anggota dari T adalah kelipatan dari d.
- $(\Leftarrow)$
- $\exists\ x_0,y_0 \in Z \ni d=ax_0+by_0$.
- Maka $nd = n(ax_0+by_0) = a(nx_0) + b(ny_0)$.
- Jadi nd adalah kombinasi linier dari dan b, dan termuat di T.

$\square$

Latihan:

Diberikan $a,b \in Z$, buktikan $\exists\ x,y \in Z \ni c=ax+by \Leftrightarrow ppb(a,b)|c$.

Definisi 2.3

$a,b \in Z$, tidak keduanya 0, dikatakan relatif prima jika ppb(a,b)=1.

Teorema 2.4

Misalkan $a,b \in Z$, tidak keduanya 0. Maka a dan b adalah relatif prima jika dan hanya jika $\exists\ x,y \in Z \ni 1=ax+by$.

Bukti:

- ($\Rightarrow$)
- a,b relatif prima $\Rightarrow$ ppb(a,b)=1.
- T.2.3 $\Rightarrow \exists\ x,y \in Z \ni 1=ax+by$.
- ($\Leftarrow$)
- Misalkan $1=ax+by$ untuk suatu $x,y \in Z$, dan d=ppb(a,b).
- $d|a$, $d|b$, T.2.2 $\Rightarrow d|(ax+by)$ atau $d|1$.
- $d \in Z$, $d>0 \Rightarrow d=1$.

$\square$

Akibat 1:

Jika ppb(a,b)=d, maka ppb(a/d,b/d)=1.

Bukti:

- a/d dan b/d adalah bilangan bulat karena d pembagi dari a dan b.
- ppb(a,b)=d $\Rightarrow \exists\ x,y \in Z \ni d=ax+by$.
- dibagi d $\Rightarrow$ 1=(a/d)x+(b/d)y.
- Dari T.2.4 dapat disimpulkan bahwa ppb(a/d,b/d) = 1

$\square$

a/d dan b/d adalah bilangan bulat, maka a/d dan b/d relatif prima.

Contoh:

ppb(-12,30)=6 $\Rightarrow$ ppb(-12/6,30/6) = ppb(-2,5) =1.

Akibat 2:

Jika a|c dan b|c dengan ppb(a,b)=1, maka ab|c.

Bukti:

- a|c, b|c $\Rightarrow \exists$ r,s $\in Z \ni$ c = ar = bs.
- ppb(a,b)= 1 $\Rightarrow \exists$ x,y $\in Z \ni$ ax+by = 1
- Kalikan dengan c $\Rightarrow$

  c = c.1 = c(ax+by) = acx+bcy = a(bs)x+b(ar)y = ab(sx+ry).
- Maka ab|c. $\square$

Bila syarat ppb(a,b)=1 tidak dipenuhi, maka akibat di atas mungkin tidak berlaku.

Contoh:

6|24, 8|24, tetapi 6.8$\angle$24.

Teorema 2.5 (Lemma Euclid)

Jika $a|bc$, dengan $ppb(a,b)=1$, maka $a|c$.

Bukti:

- T.2.3 $\Rightarrow \exists\ x,y \in Z \ni 1=ax+by$.
- $a|ac$ dan $a|bc \Rightarrow a|(acx+bcy) \Rightarrow a|c(ax+by)$
- Jadi $a|c$

Teorema 2.6

Misalkan $a,b \in Z$, a,b tidak keduanya 0. Untuk $d \in N$, $d=ppb(a,b)$ jika dan hanya jika

(1) $d|a$ dan $d|b$

(2) Jika $c|a$ dan $c|b$, maka $c|d$.

Bukti:

- ($\Rightarrow$)
- $d=ppb(a,b) \Rightarrow d|a$ dan $d|b \Rightarrow$ (1) berlaku.
- T.2.3 $\Rightarrow$ d dapat dinyatakan dengan $d=ax+by$ untuk suatu $x,y\in\mathbb{Z}$.
- Jadi $c|a$, $c|b \Rightarrow c|(ax+by)$ atau $c|d \Rightarrow$ (2) berlaku.
- ($\Leftarrow$)
- Misalkan $d\in\mathbb{N}$ yang memenuhi kondisi (1) dan (2).
- Diberikan c sebarang pembagi persekutuan dari a dan b.
- (2) $\Rightarrow c|d \Rightarrow d\geq c \Rightarrow$ d pembagi persekutuan terbesar dari a dan b.

$\square$

Latihan:

1. Diberikan $a,b \in Z$, buktikan $\exists\ x,y \in Z \ni ax+by=ppb(a,b) \Rightarrow ppb(x,y)=1$.
2. Diberikan $a,b \in Z$, buktikan
   $\exists\ x,y \in Z \ni c=ax+by$ jika dan hanya jika $ppb(a,b)|c$.
3. Buktikan:
   a. a,b bilangan ganjil $\Rightarrow 8|(a^2-b^2)$.
   b. $a \in Z$, a tidak dapat dibagi oleh 2 atau 3 $\Rightarrow 24|(a^2 + 23)$. (Petunjuk: Setiap bilangan bulat pasti berbentuk 6k, 6k+1, …, 6k+5).
4. a. $ppb(a,b)=1$, $c|a \Rightarrow ppb(b,c)=1$.
   b. $ppb(a,b)=1 \Rightarrow ppb(ac,b)=ppb(c,b)$.

Algoritma Euclide

- Misalkan $a,b \in Z$ yang pembagi persekutuan terbesarnya ditentukan.
- Karena ppb(|a|,|b|)=ppb(a,b), tanpa mengurangi keumumnan diasumsikan $a \geq b > 0$.
- Dari Algoritma Pembagian pada a dan b diperoleh

$$a=q_1b+r_1, \qquad 0 \leq r_1 < b.$$

- $r_1=0 \Rightarrow b|a$ dan ppb(a,b)=b.
- $r_1 \neq 0 \Rightarrow$ pembagian b oleh r_1 akan menghasilkan q_2 dan r_2 yang memenuhi

$$b=q_2r_1+r_2, \qquad 0 \leq r_2 < r_1.$$

- Jika $r_2=0$, proses berhenti. Jika tidak, proses dilanjutkan seperti sebelumnya untuk memperoleh

$$r_1=q_3r_2+r_3, \qquad 0 \leq r_3 < r_2.$$

• Demikian terus sampai sisanya 0, misalkan tahap ke (n+1) di mana r_{n-1} dibagi oleh r_n (sisa 0 terjadi segera atau yang sebelumnya karena barisan turun $b>r_1>r_2> \dots > 0$ tidak mungkin berisi lebih dari bilangan bulat b).

• Diperoleh

$$
\begin{array}{ll}
a=q_1b+r_1, & 0<r_1<b \\
b=q_2r_1+r_2, & 0<r_2<r_1 \\
r_1=q_3r_2+r_3, & 0<r_3<r_2 \\
\dots & \\
r_{n-2}=q_nr_{n-1}+r_n, & 0<r_n<r_{n-1} \\
r_{n-1}=q_{n+1}r_n+0. &
\end{array}
$$

• Diharapkan bahwa r_n=ppb(a,b).

Lemma.

Jika $a=qb+r$, maka $ppb(a,b)=ppb(b,r)$.

Bukti:

- $d=ppb(a,b) \Rightarrow d|a$ dan $d|b \Rightarrow d|(a-qb) \Rightarrow d|r \Rightarrow d$ pembagi persekutuan dari b dan r.
- c pembagi persekutuan dari b dan r $\Rightarrow c|b$ dan $c|r \Rightarrow c|(qb+r) \Rightarrow c|a \Rightarrow c$ pembagi persekutuan dari a dan b $\Rightarrow c \le d \Rightarrow d=ppb(b,r)=ppb(a,b)$

□

Akibatnya $ppb(a,b)=ppb(b,r_1)= \ldots = ppb(r_{n-1},r_n)=ppb(r_n,0)=r_n$.
Teorema 2.3 tidak memberi petunjuk bagaimana mencari $x,y \in Z \ni ax+by$.
Dengan menggunakan lemma ini x dan y dapat dicari.

$$r_n = r_{n-2} - q_n r_{n-1}$$
$$r_n = r_{n-2} - q_n(r_{n-3} - q_{n-1} r_{n-2}) = (1+q_n q_{n-1}) r_{n-2} - (-q_n) r_{n-3}.$$

r_n dinyatakan sebagai kombinasi linier dari r_{n-2} dan r_{n-3}. Demikian seterusnya sehingga diperoleh $r_n=ppb(a,b)$ dinyatakan sebagai kombinasi linier dari a dan b.

Contoh:

Tentukan ppb(12378,3054).

Jawab:

$$
\begin{aligned}
12378 &= 4.3054+162\\
3054 &= 18.162+138\\
162 &= 1.138+24\\
138 &= 5.24+18\\
24 &= 1.18+6\\
18 &= 3.6+0
\end{aligned}
$$

Jadi 6=ppb(12378,3054).

$$
\begin{aligned}
6 &= 24-18\\
&= 24-(138-5.24)\\
&= 6.24-138\\
&= 6(162-138)-138\\
&= 6.162-7.138\\
&= 6.162-7(3054-18.162)\\
&= 132.162-7.3054\\
&= 132(12378-4.3054)-7.3054\\
&= 132.12378+(-535)3054
\end{aligned}
$$

Jadi 6=ppb(12378,3054)=132.12378+(-535)3054.

Algoritma Euclide dapat disingkat dengan memilih $r_{k+1} \ni |r_{k+1}| < r_k/2$.

Contoh:

$$12378 = 4.3054 + 162$$
$$3054 = 19.162 – 24$$
$$162 = 7.24 – 6$$
$$24 = (-4)(-6)+0.$$

Jadi ppb(12378,3054) = 6.

Akibatnya $6 = -162 + 7.24$
$$= -162 + 7(-3054 + 19.162)$$
$$= 132(162) – 7(3054)$$
$$= 132(12378 – 4.3054) – 7.3054$$
$$= 132.12378 + (-535).3054$$

Teorema 2.7

Jika $k>0$, maka $ppb(ka,kb) = k\, ppb(a,b)$.

Bukti:

- Kalikan setiap bilangan pada Algoritma Euclide dengan k, diperoleh

$$
\begin{array}{ll}
ak = q_1 (bk)+r_1k, & 0<r_1k<bk \\
bk = q_2 (r_1k)+r_2k, & 0<r_2k<r_1k \\
r_1k = q_3 (r_2k)+r_3k, & 0<r_3k<r_2k \\
\ldots & \\
r_{n-2}k = q_n (r_{n-1}k)+r_nk, & 0<r_nk<r_{n-1}k \\
r_{n-1}k = q_{n+1} (r_nk)+0. &
\end{array}
$$

- Maka $ppb(ka,kb) = r_nk = k\, ppb(a,b)$. □

Akibat

$k \in Z$, $k \neq 0$, $ppb(ka,kb) = |k|ppb(a,b)$.

Bukti:

- Cukup dengan memperlihatkan untuk $k<0$.
- $\Rightarrow$ $-k = |k|$.
- T.2.7 dan Latihan 2 slide 13 $\Rightarrow$ $ppb(ak,bk) = ppb(-ak,-bk) = ppb(a|k|,b|k|)=|k|\, ppb(a,b)$. □

Contoh:

ppb(12,30) = 3 ppb(4,10) = 3.2 ppb(2,5) = 6.1 = 6.

Latihan:

1. Tentukan ppb(143,227), ppb(306,657) dan ppb(272,1479).
2. Tentukan $x,y \in Z \ni$
   a. ppb(56,72) = 56x +72y
   b. ppb(24,138) = 24x + 138y
   c. ppb(119,272) = 119x + 272y
   d. ppb(1769,2378) = 1769x + 2378y

Soal:

1. Buktikan jika d pembagi persekutuan dari a dan b, maka d=ppb(a,b) jika dan hanya jika ppb(a/d,b/d) = 1.
2. Misalkan ppb(a,b)=1. Buktikan:
   a. ppb(a+b,a-b)=1 atau 2. (Petunjuk: Misalkan d=ppb(a+b,a-b) dan perlihatkan d|2a, d|2b, jadi d ≤ ppb(2a,2b) = 2 ppb(a,b).)
   b. ppb(2a+b,a+2b)=1 atau 3.
   c. ppb($a+b,a^2+b^2$)=1 atau 2. (Petunjuk: $a^2+b^2 = (a+b)(a-b)-2b^2$.)

KELIPATAN PERSEKUTUAN TERKECIL

Definisi 2.4

Kelipatan persekutuan terkecil dari bilangan bulat tak nol a dan b, yang dinotasikan dengan kpk(a,b), adalah $m \in N \ni$

(1) a|m dan b|m,

(2) a|c, b|c, c>0 $\Rightarrow$ m≤c.

Contoh:

Kelipatan persekutuan positif dari -12 dan 30 adalah 60, 120, 180, …

Akibatnya kpk(-12,20) = 60.

Teorema 2.8

$\forall$ a,b$\in$N berlaku ppb(a,b) kpk(a,b) = ab.

Bukti:

- Misalkan d=ppb(a,b) $\Rightarrow \exists$ r,s $\in$ Z $\ni$ a = dr, b = ds.
- m = ab/d $\Rightarrow$ m = as =rb $\Rightarrow$ m kelipatan persekutuan positif dari a dan b.
- Misalkan c kelipatan persekutuan positif lain dari a dan b $\Rightarrow$ c = au = bv.
- $\Rightarrow \exists$ x,y $\in$ Z $\ni$ d = ax + by.

$$\frac{c}{m} = \frac{cd}{ab} = \frac{c(ax+by)}{ab} = (c/b)x + (c/a)y = vx + uy.$$

- $\Rightarrow$ m|c $\Rightarrow$ m ≤ c.
- D.2.4 $\Rightarrow$

$$m = kpk(a,b) = \frac{ab}{d} = \frac{ab}{ppb(a,b)}$$

□

AKIBAT

Diberikan $a,b \in \mathbb{N}$, $kpk(a,b) = ab \Leftrightarrow ppb(a,b) = 1$.

Contoh:

ppb(3054,12378) = 6 $\Rightarrow$ kpk(3054,12378) = (3054 . 12378)/6 = 6.300.402.

DEFINISI:

$a,b,c \in \mathbb{Z}$, tidak semuanya 0, Maka ppb(a,b, c) = d jika

(1) d pembagi persekutuan dari a, b, c.

(2) e pembagi persekutuan a,b,c $\Rightarrow$ $e \le d$

Contoh:

- ppb(39, 42, 54) = 3 dan ppb(49, 210, 350) = 7.

  Sepasang tiga bilangan bulat mungkin relatif prim, walaupun masing-masing pasang dari dua bilangan bulatnya tidak relatif prima, misalnya untuk 6,10, dan 15.

Latihan:

1. Hitung kpk(143, 227), kpk(306, 657) dan kpk(272, 1479).
2. Buktikan bahwa ppb dari a,b $\in$ N selalu membagi kpk-nya.
3. ppb(a,b) = kpk(a,b) $\Leftrightarrow$ a = b.
4. Buktikan: k > 0 $\Rightarrow$ kpk(ka,kb) = k kpk(a,b).

Soal:

1. Buktikan: m kelipatan persekutuan dari a dan b $\Rightarrow$ kpk(a,b)|m.
   (Petunjuk: Ambil t = kpk(a,b) $\Rightarrow$ m = qt + r, dengan 0 ≤ r < t $\Rightarrow$ r kelipatan persekutuan dari a dan b.)
2. Misalkan a,
2. Cari x,y,z $\in$ Z $\ni$ ppb(198,288,512) = 198x + 288y + 512z.
   (Petunjuk: d = ppb(198,288) $\Rightarrow$ ppb(198,288,512) = ppb(d,512). Cari u,v $\in$ Z $\ni$ ppb(d,512) = du + 512v.)

PERSAMAAN DIOPHANTINE ax + by = c

Definisi:

Persamaan Diophantin adalah persamaan yang berbentuk

$$ax + by = c$$

dengan $a,b,c \in Z$ dan a,b tidak keduanya 0.

Definisi:

Solusi dari suatu persamaan Diophantine $ax + by = c$ adalah $x_0, y_0 \in Z \ni ax_0 + by_0 = c$

Contoh:

- Persamaan Diophantine $3x + 6y = 18$ mempunyai solusi
  - $x = 4$ dan $y = 1$, karena $3.4 + 6.1 = 18$.
  - $x = (-6)$ dan $y = 6$, karena $3.(-6) + 6.6 = 18$.
  - $x = 10$ dan $y = (-2)$, karena $3.10 + 6.(-2) = 18$.
- Persamaan Diophantine $2x + 10y = 17$ tidak mempunyai solusi.

Teorema 2.9

(1) Persamaan Diophantine $ax + by = c$ mempunyai solusi jika dan hanya jika $d|c$ dengan $d = \text{ppb}(a,b)$.

(2) Jika x_0, y_0 solusi persamaan ini, maka semua solusi lainnya berbentuk

$$x = x_0 + (b/d)t,\ y = y_0 - (a/d)t$$

$\forall\ t \in Z$.

Bukti:

(1) ($\Rightarrow$)

$\exists\ r,s \in Z \ni a = dr$ dan $b = ds$.

- $ax + by = c$ mempunyai solusi $\Rightarrow x_0, y_0 \in Z \ni$

$$c = ax_0 + by_0 = drx_0 + dsy_0 = d(rx_0 + sy_0),$$

- $\Rightarrow d|c$.

($\Leftarrow$)

- $d|c \Rightarrow c = dt$
- $d = \text{ppb}(a,b) \Rightarrow \exists\ x_0, y_0 \in Z \ni ax_0 + by_0 = d$
- $c = dt = (ax_0 + by_0)t = a(tx_0) + b(ty_0)$
- Jadi $x = tx_0$ dan $y = ty_0$ adalah solusi dari $ax + by = c$

(2) (Bukan bukti)

- $x = x_0$ dan $y = y_0$ solusi dari $ax + by = c \Rightarrow ax_0 + by_0 = c$
- $x = x_0 + (b/d)t$ dan $y = y_0 - (a/d)t \Rightarrow$
  $a(x_0 + (b/d)t) + b(y_0 - (a/d)t) = ax_0 + abt/d + by_0 - abt/d = ax_0 + by_0 = c$
- Jadi $x = x_0 + (b/d)t$ dan $y = y_0 - (a/d)t$ solusi untuk $ax + by = c$.

Contoh:

1. Tentukan solusi dari $172x + 20y = 1000$.

Jawab:

Algoritma Euclid untuk ppb(172, 20).

$$
\begin{aligned}
172 &= 8.20 + 12\\
20 &= 1.12 + 8\\
12 &= 1.8 + 4\\
8 &= 2.4
\end{aligned}
$$

Jadi ppb(172,20) = 4.

Karena 4|1000, solusi persamaan ini ada

$$
\begin{aligned}
4 &= 12-8\\
&= 12-(20-12)\\
&= 2.12-20\\
&= 2.12-20\\
&= 2(172-8.20)-20\\
&= 2.172+(-17)20
\end{aligned}
$$

Kalikan dengan 250 $\Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
1000 = 250.4 &= 250(2.172 + (-17)20\\
&= 500.172 + (-4250)20.
\end{aligned}
$$

Jadi $x = 500$ dan $y = -4250$ adalah satu solusi untuk persamaan tersebut. Semua solusi lainnya berupa

$$x = 500 + (20/4)t = 500 + 5t, \text{ dan } y = -4250 - 43t, \text{ untuk } t \in Z$$

2. Tentukan solusi semua positif dari $172x + 20y = 1000$.

Jawab:

Solusi semua positif diperoleh jika $500 + 5t > 0$ dan $-43t - 4250 > 0$.

Maka $-98^{36}/_{43} > t > -100$.

$t \in Z \Rightarrow t = -99 \Rightarrow x = 5$ dan $y = 7$.

Akibat:

Jika ppb(a,b) = 1 dan x_0, y_0 solusi dari $ax + by = c$, maka semua solusinya adalah $x = x_0 + bt$, $y = y_0 - at$, untuk t bilangan yang sesuai.

Contoh:

- Persamaan $5x + 22y = 18$ mempunyai $x_0 = 8$, $y_0 = -1$sebagai salah satu solusinya. Semua solusi lainnya adalah $x = 8 + 22t$, $y = -1 - 5t$, untuk sebarang t.

- Seorang pelanggan membeli selusin buah, aple dan jeruk, seharga \$1.32. Jika harga sebuah apel 3 sen lebih mahal dari jeruk dan apel yang dibeli lebih banyak dari jeruk, berapa banyak masing-masing buah yang dibeli?

Jawab:

Misalkan x banyaknya apel dan y banyaknya jeruk, dan z harga jeruk. Maka soalnya adalah

- $(z+3)x + zy = 132 \Rightarrow 3x + (x+y)z = 132$.
- $x + y = 12 \Rightarrow 3x + 12z = 132 \Rightarrow x + 4z = 44$
- ppb(1,4) = 1 $\Rightarrow 1|44 \Rightarrow$ ada solusi persamaan.
- $1 = 1(-3) + 4.1 \Rightarrow 44 = 1(-132) + 4(44) \Rightarrow x_0 = -132, z_0 = 44$
- Semua solusi lain berbentuk $x = -132 + 4t$, $z = 44 - t$ untuk $t \in \mathbb{Z}$.
- Tetapi tidak sebarang nilai t yang cocok untuk masalah ini.
- $12 \geq x > 6 \Rightarrow 12 \geq -132 + 4t > 6 \Rightarrow 34\frac{1}{2} < t \leq 36 \Rightarrow t = 35$ atau $t = 36$
- Jadi ada dua cara, yaitu 8 apel dan 4 jeruk, atau 12 apel saja

Latihan:

1. Tentukan semua solusi bilangan bulat dari:
   a. $56x + 72y = 40$
   b. $84x – 438y = 156$
2. Tentukan semua solusi bilangan asli dari:
   a. $30x + 17y = 300$
   b. $158x – 57y = 7$

Soal:

1. Jika a dan b bilangan asli relatif prima, buktikan persamaan Diophantine $ax – by = c$ mempunyai tak hingga banyaknya solusi bilangan asli. (Petunjuk: $\exists\ x_0, y_0 \in Z \ni ax_0 + by_0 = 1$. Untuk $t \in Z$, dengan $t > |x_0|/b$ dan $t > |y_0|/a$, $x = x_0 + bt$ dan $y = -(y_0 – at)$ adalah solusi positif dari persamaan tersebut.)
2. Buktikan persamaan Diophantine $ax + by + cz = d$ mempunyai solusi bilangan bulat jika dan hanya jika ppb(a,b,c) membagi d.
3. Cari semua solusi bilangan bulat dari $15x + 12y + 30z = 24$. (Petunjuk: Ambil $y = 3s – 5t$ dan $z = -s + 2t$.)