INDUKSI MATEMATIKA

INDUKSI MATEMATIKA

Prinsip Terurut Baik

Setiap himpunan bilangan bulat tak negatif S, yang tak kosong selalu memuat unsur terkecil; yaitu $\exists\ a \in S \ni a \leq b\ \forall\ b \in S$.

Teorema 1.1 (Sifat Archimedes)

Jika $a,b \in Z^+$, maka $\exists\ n \in Z^+ \ni na \geq b$.

Bukti:

- Andaikan teorema tidak benar, maka untuk suatu a dan b, $na < b$, $\forall\ n \in Z^+$.
- $\Rightarrow S = \{b-na | n \in Z^+\}$ memuat semua bilangan positif.
- Dari Prinsip Terurut Baik S mempunyai unsur terkecil, namakan b-ma.
- S memuat semua bilangan bulat berbentuk seperti ini $\Rightarrow b-(m+1)a \in S$.
- $b-(m+1)a = (b-ma)-a < b-ma$
- Kontradiksi dengan b-ma unsur terkecil dari S.
- Jadi pengandaian salah. Jadi haruslah $\exists\ n \in Z^+ \ni na \geq b$. □

Teorema 1.2 (Prinsip Induksi Hingga)

Misalkan S adalah himpunan bilangan bulat positif yang memenuhi

(i) $1 \in S$

(ii) $k \in S \Rightarrow k+1 \in S$

Maka S himpunan semua bilangan positif

Bukti:

- Misalkan T himpunan semua bilangan positif yang tidak termuat di S dan T tidak kosong.
- $\Rightarrow$ T memuat unsur terkecil, namakan a.
- $1 \in S \Rightarrow a > 1 \Rightarrow 0 < a-1 < a \Rightarrow a-1 \notin T \Rightarrow a-1 \in S \Rightarrow (a-1)+1=a \in S \Rightarrow$ kontradiksi dengan $a \in T$
- $\Rightarrow$ T haruslah kosong $\Rightarrow$ S memuat semua bilangan bulat positif. $\square$

Kondisi (i) disebut *basis induksi*, kondisi (ii) disebut *tahap induksi*.

Contoh:

Buktikan $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(2n+1)(n+1)}{6}$ untuk n = 1, 2, …

Bukti:

• Untuk n = 1, berlaku $1^2 = \dfrac{1(2+1)(1+1)}{6} = 1$

Artinya $1 \in S$.

• Asumsikan $k \in S \Rightarrow$ $1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 = \dfrac{k(2k+1)(k+1)}{6}$

$$\Rightarrow \quad 1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(2k+1)(k+1)}{6} + (k+1)^2$$

$$= (k+1)\left(\frac{k(2k+1) + 6(k+1)}{6}\right) = (k+1)\left(\frac{2k^2 + 7k + 6}{6}\right)$$

$$= \frac{(k+1)(2k+3)(k+2)}{6}$$

Artinya $k+1 \in S$, jika $k \in S$.

• Jadi S memuat semua bilangan bulat positif. Artinya rumus berlaku untuk n = 1, 2, …

Contoh:

Buktikan $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n – 1, \forall\ n \in \mathbb{Z}^+$.

Bukti:

• Untuk n=1 berlaku $1 = 2^1 – 1$.
Artinya $1 \in S$.

• Asumsikan $k \in S$, maka $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{k-1} = 2^k – 1$.
$\Rightarrow 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{k-1} + 2^k = 2^k – 1 + 2^k = 2.2^k – 1 = 2^{k+1} - 1$.
Artinya $k+1 \in S$, jika $k \in S$

• Jadi S memuat semua bilangan bulat positif. Artinya rumus berlaku untuk semua bilangan bulat positif.

Tahap induksi (ii) dari Prinsip Induksi hingga ekivalen dengan
(ii') Jika $k \in \mathbb{Z}^+ \ni 1, 2, \ldots, k \in S$, maka $k+1 \in S$.

Latihan

1. Buktikan

(a) $$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}, \forall n \geq 1$$

(b) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$, $\forall$ $n \geq 1$.

(c) $$1^3+2^3+\ldots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2, \forall n \geq 1$$

2. Jika r $\neq$ 1, buktikan

$$a+ar+ar^2+...+ar^n=\frac{a(r^{n+1}-1)}{r-1}, \forall n \in Z^+$$

Soal

1. Gunakan Prinsip Induksi Hingga Kedua untuk membuktikan

$$a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1), \ \forall\, n \geq 1.$$

   (Petunjuk: $a^{n+1} - 1 = (a+1)(a^n - 1) - a(a^{n-1} - 1)$.)
2. Buktikan pangkat tiga dari setiap bilangan bulat dapat dituliskan sebagai selisih dari dua bilangan kuadrat.
   (Petunjuk: $n^3 = (1^3 + 2^3 + \dots + n^3) - (1^3 + 2^3 + \dots + (n-1)^3$.)
3. Benar atau salah? $\forall\, m,n \in Z^+$, $(mn)! = m!n!$ dan $(m+n)! = m! + n!$.
4. Buktikan:
   (a) $n! > n^2$, $\forall\, n \geq 4$
   (b) $n! > n^3$, $\forall\, n \geq 6$.
5. Buktikan $1(1!) + 2(2!) + 3(3!) + \dots + n(n!) = (n+1)!-1$, $\forall\, n \geq 1$.