BAB IV
FUNGSI μ REGULAR

KONSTRUKSI FUNGSI μ REGULAR

Proposisi IV.1
Hal. 55

Misalkan u fungsi panharmonik bernilai real pada Ω. Maka secara lokal, $\exists f(z) = u(z) + iv(z)$ μ Regular pada Ω. Dimana $v(x, y) = \int_a^y \{ u_x(x,t) - \mu u(x,t) \} dt + \varphi(x)$

dan $\varphi(x) = e^{-\mu x} \{ \int e^{\mu x} u_y(x,a) dx + c \}$

Akibat IV.1
Hal. 56

Misalkan u panharmonik bernilai real.

$$\left.\begin{array}{l} f_1 = u + iv_1 \;\; \mu \text{ regular} \\ f_2 = u + iv_2 \;\; \mu \text{ regular} \end{array}\right\} \Rightarrow v_1 - v_2 = ke^{-\mu x}, \exists k \in \Re$$

Akibat IV.2
Hal. 56

Misalkan f dan g fungsi μ regular.

$$\left.\begin{aligned} f &= u + iv \\ g &= u + iw \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(z) = g(z) + ike^{-\mu x}, \exists k \in \Re.$$

Proposisi IV.2
Hal. 56

Misalkan v fungsi panharmonik bernilai real pada Ω.

Maka secara lokal, $\exists f(z) = u(z) + iv(z)$ μ Regular

pada Ω. Dimana $u(x,y) = -\int_a^y \left(v_x(x,t) + \mu v(x,t) \right) dt + \Phi(x)$

dan $\Phi(x) = e^{\mu x} \left(\int e^{-\mu x} v_y(x,a)\,dx + c \right)$

Akibat IV.3
Hal. 57

Misalkan v panharmonik bernilai real.

$$\left.\begin{array}{l} f_1 = u_1 + iv \;\; \mu \text{ regular} \\ f_2 = u_2 + iv \; \mu \text{ regular} \end{array}\right\} \Rightarrow u_1 - u_2 = ke^{\mu x}, \exists k \in \Re$$

Akibat IV.4
Hal. 57

Misalkan f dan g fungsi μ regular.

$$\left.\begin{aligned} f &= u + iv \\ g &= w + iv \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(z) = g(z) + ke^{\mu x}, \exists k \in \Re$$

Proposisi IV.3
Hal. 58

Fungsi μ regular konstan adalah fungsi nol

Proposisi IV.4,5,6
Hal. 58-59

Misalkan f fungsi μ regular pada Ω.

f bernilai real $\Rightarrow f(z) = ke^{\mu x}, \exists k \in \Re.$

f bernilai imaginer $\Rightarrow f(z) = ike^{-\mu x}, \exists k \in \Re$

$\overline{f(z)}$ μ regular $\Rightarrow f(z) = Ae^{\mu x} + iBe^{-\mu x}, \exists A, B \in \Re$

Pendefinisian Sekawan Panharmonik
Hal. 59

Fungsi *v* disebut sekawan panharmonik dengan *u* jika *u* dan *v* memenuhi persamaan Cauchy-Riemann yang diperumum (C-R-P), yaitu

$$u_x = v_y + \mu u$$

$$u_y = -v_x - \mu v$$

Akibat IV.5
Hal 59

v sekawan panharmonik dengan *u*

$$\Downarrow$$

-*v* sekawan panharmonik dengan -*u*

Proposisi IV.7
Hal. 59

Misalkan $f = u + iv$ fungsi μ Regular.

Fungsi u dan v saling sekawan panharmonik

$$\Downarrow$$

$$i\,\overline{f(z)}$$ fungsi μ regular

Akibat IV.6
Hal. 60

Misalkan $f(z) = u(z) + iv(z)$ fungsi μ regular.

$i\overline{f(z)}$ fungsi μ regular

$$\Downarrow$$

$$f(z) = A(1+i)e^{-\mu y} + B(1-i)e^{\mu y}, \exists A, B \in R$$

Akibat IV.7
Hal. 60

Misalkan $f = u + iv$ fungsi μ regular.

u dan v saling sekawan panharmonik

$$\Downarrow$$

$$f(z) = A(1+i)e^{-\mu y} + B(1-i)e^{\mu y}, \exists A, B \in R$$

Akibat IV.8
Hal. 60

Misalkan *f* μ regular.

Jika *if(z)* μ regular $\Rightarrow$ *f* fungsi nol

PENYAJIAN INTEGRAL FUNGSI μ REGULAR Lihat [10]

Misalkan Γ sembarang lintasan tertutup sederhana pada Ω. dan $f(z)$ fungsi μ regular pada Ω. Jika $r = |z - a|$ maka

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{a-z}\mu r K_0'(\mu r)dz + \overline{\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f(z)K_0(\mu r)dz}$$

asalkan a di dalam Γ. Jika a di luar Γ maka ruas kanan nol.

Lema IV.1

Hal. 61 (lihat [10])

Misalkan $h(z) \in C^1(\Omega).$

$$\operatorname{Re}\left(L(h(z))\right) = 0 \Rightarrow \operatorname{Im} \int_{\Gamma} h(z)\,dz = 0.$$

Lema IV.2
Hal. 61

$$\text{Misalkan } h(z) \in C^1(\Omega).$$

$$\text{Im}\left(L(h(z))\right) = 0 \Rightarrow \text{Re} \int_\Gamma h(z)\,dz = 0.$$

Proposisi IV.8
Hal. 61

$$f \text{ dan } g \text{ masing-masing fungsi } \mu \text{ regular pada } \Omega$$

$$\Downarrow$$

$$\operatorname{Re} \int_{\Gamma} f(z)g(z)dz = 0$$

Akibat IV.9,11
Hal. 62

$f \quad \mu$ regular pada $\Omega \Rightarrow * \, \mathrm{Re} \int_{\Gamma} f^{2}(z)dz = 0$

$$* \int_{\Gamma} f^{2}(z)dz + \overline{\int_{\Gamma} f^{2}(z)dz} = 0$$

Akibat IV.10

Hal. 62

f dan g masing - masing fungsi μ regular pada Ω

$$\Downarrow$$

$$\int_{\Gamma} f(z)g(z)dz + \overline{\int_{\Gamma} f(z)g(z)dz} = 0$$

Akibat IV.12
Hal. 62

$$\left.\begin{array}{l} f(z) = u(z) + iv_1(z) \text{ fungsi } \mu \text{ regular} \\ g(z) = u(z) + iv_2(z) \text{ fungsi } \mu \text{ regular} \end{array}\right\} \Rightarrow \operatorname{Im} \int_{\Gamma} (f - g)(z)\,dz = 0$$

Akibat IV.13
Hal. 62

$$\left.\begin{array}{l} f(z) = u_1(z) + iv(z) \text{ fungsi } \mu \text{ regular} \\ g(z) = u_2(z) + iv(z) \text{ fungsi } \mu \text{ regular} \end{array}\right\} \Rightarrow \operatorname{Re} \int_{\Gamma} (f - g)(z)\,dz = 0$$

Lema IV.3,4,5
Hal. 63

Misalkan u panharmonik $\Rightarrow * f = \mu u + \overline{Lu} \quad \mu$ regular (Duffin)

$* \ f = \mu \bar{u} + \bar{L}u \quad \mu$ regular

$* \ f = i\left(\bar{L}u - \mu\bar{u}\right) \mu$ regular

Proposisi IV.9
Hal.63

$$\left.\begin{array}{l} u \text{ panharmonik pada } \Omega \\ f \ \mu \text{ regular pada } \Omega \end{array}\right\} \Rightarrow \int_{\Gamma} f(z)\overline{L}u\,dz + \int_{\Gamma} u(z)Lf(z)\,d\overline{z} = 0$$

untuk sembarang lintasan tertutup sederhana Γ dalam Ω

Lema IV.6,7
Hal.65

Misalkan $h(z) \in C^1(\Omega)$.

$$\operatorname{Re}\left(\bar{\partial}\left(h(z)\right)\right) = 0 \Rightarrow \operatorname{Im} \int_{\Gamma} h(z)\,d\bar{z} = 0$$

$$\operatorname{Im}\left(\bar{\partial}\left(h(z)\right)\right) = 0 \Rightarrow \operatorname{Re} \int_{\Gamma} h(z)\,d\bar{z} = 0$$

Proposisi IV.11
Hal. 66

f dan g masing - masing fungsi μ regular

$$\Downarrow$$

$$\operatorname{Re} \int_{\Gamma} \overline{f(z)g(z)dz} = 0$$

Akibat IV.14
Hal.66

$$f \quad \mu \,\text{regular} \Rightarrow \operatorname{Re} \int_{\Gamma} \overline{f}^{\,2}(z)\, d\overline{z} = 0$$

Akibat IV.15-18
Hal.66

Misalkan f μ regular .

$$* \operatorname{Im} \overline{L} f = 0 \Rightarrow \int_{\Gamma} f d\overline{z} + \int_{\Gamma} \overline{f} dz = 0$$

$$* \operatorname{Im} L f = 0 \Rightarrow \int_{\Gamma} f dz + \int_{\Gamma} \overline{f} d\overline{z} = 0$$

$$* \ f = u + iv \Rightarrow \int_{\Gamma} f dz + \int_{\Gamma} \overline{f} d\overline{z} = 2\mu \iint_{\Omega} v dA$$

$$* \operatorname{Re} \overline{L} f = 0 \Rightarrow \int_{\Gamma} f d\overline{z} - \int_{\Gamma} \overline{f} dz = 0$$

Akibat IV.19

Hal. 67

$$f\ \mu\ \text{regular} \Rightarrow \int_{\Gamma} f^{2}(z)\,dz + \int_{\Gamma} \overline{f}^{2}(z)\,d\overline{z} = 0$$

Akibat IV.20,21
Hal. 67

$$\left.\begin{array}{l} f = u + iv_1 \ \ \mu \text{ regular} \\ g = u + iv_2 \ \ \mu \text{ regular} \end{array}\right\} \Rightarrow * \operatorname{Im} \overline{\int_\Gamma (f - g)(z)\,dz} = 0$$

$$* \operatorname{Im} \int_\Gamma (f\text{-}g)(z)\,d\bar{z} = 0$$

Akibat IV.22,23
Hal. 67

$$\left.\begin{aligned} f &= u_1 + iv \;\; \mu \text{ regular} \\ g &= u_2 + iv \;\; \mu \text{ regular} \end{aligned}\right\} \Rightarrow * \operatorname{Re} \overline{\int_{\Gamma} (f - g)(z)\,dz} = 0$$

$$* \operatorname{Im} \int_{\Gamma} (f - g)(z)\,d\bar{z} = 0$$

Proposisi IV.12
Hal. 70

Misalkan f μ regular pada cakram $|z - z_0| \le R$, maka

$$f(z_0) = \frac{-i}{\mu\pi\Psi_1(\mu R)} \int_{\partial D(z_0, R)} \frac{\overline{f(z)}}{(z - z_0)^2} dz$$

dan

$$\frac{\partial}{\partial z} \overline{f(z_0)} = \frac{-i}{2\mu\pi\Psi_1(\mu R)} \int_{\partial D(z_0, R)} \frac{\overline{f(z)}}{(z - z_0)^2} dz$$

Proposisi IV.13, 14
Hal. 71

Misalkan f μ regular pada Ω, maka

$$* \int_{\partial D} g(z)dz = i \iint_{\Omega} \mu \overline{g(z)} dxdy$$

$$* g(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{g(z)}{z - z_0} dz - \frac{\mu}{2\pi} \iint_{\Omega} \frac{\overline{g(z)}}{z - z_0} dxdy, \ z_0 \in \Omega$$

PRINSIP REFLEKSI FUNGSI μ REGULAR

NOTASI

D adalah domain pada bidang yang simetri terhadap sumbu real.

$D^{+} = D \cap \{\operatorname{Im} z > 0\}$

$D^{-} = \{\bar{z} \mid z \in D^{+}\}$

$I = D \cap R$

Proposisi IV.15
Hal. 72

Misalkan u fungsi kontinu pada suatu domain Ω.
Jika untuk masing-masing $x \in \Omega$ terdapat bilangan $\varepsilon > 0$ demikain sehingga untuk $0 < r < \varepsilon$ berlaku

$$u(x) = \frac{1}{2\pi I_0(\mu r)} \int_0^{2\pi} u(x + re^{i\theta})\,d\theta$$

maka u panharmonik pada Ω.

Proposisi IV.16
Hal. 73

Misalkan $u(z)$ fungsi panharmonik bernilai real pada D^+
sehingga $u(z) \to 0$ untuk $z \in D^+$ dan $z \to I$.
Maka $u(z)$ panharmonik pada D, dan perluasannya memenuhi

$$u(\bar{z}) = -u(z), \quad z \in D.$$

Proposisi IV.17 (Ketunggalan) Hal. 74

Misalkan f dan g dua buah fungsi μ regular pada Ω.

Maka $f \equiv g$ jika dan hanya jika himpunan infinit

$\{z \in \Omega : f(z) = g(z)\}$ punya titik limit di Ω.

Proposisi IV. 18
Hal. 74

Misalkan f fungsi μ regular pada D^{+} dan bernilai real pada sumbu real, maka f dapat diperluas atas daerah D.

Pendefinisian fungsi yang digunakan

$$F(z) = \begin{cases} f(z) & , z \in D^{+} \\ \overline{f(\overline{z})} & , z \in D^{-} \end{cases}$$

Proposisi IV.19
Hal. 74

Misalkan f fungsi μ regular pada D.

$\overline{f(z)} = f(\bar{z}), \forall z \in D \Leftrightarrow f$ bernilai real pada I.

Proposisi IV.20
Hal. 75

Misalkan *f* fungsi μ regular pada D^+ dan bernilai imaginer pada sumbu real, maka *f* dapat diperluas atas daerah *D.*

Pendefinisian fungsi yang digunakan

$$F(z) = \begin{cases} f(z) & , z \in D^+ \\ -\overline{f(\overline{z})} & , z \in D^- \end{cases}$$

Proposisi IV.21
Hal. 75

Misalkan f fungsi μ regular pada D.

$\overline{f(z)} = -f(\bar{z}), \forall z \in D \Leftrightarrow f$ bernilai imaginer pada I.

Prinsip Maksimum Modulus Fungsi μ Regular
Proposisi IV. 22, Hal. 76

Jika f fungsi μ regular pada Ω, maka $|f|$ mencapai nilai maksimum di $\overline{\Omega}$ pada batasnya.

$$S = \{ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n : f \text{ analitik univalen pada } D(0,1)$$

$$f(0) = 0,\ f'(0) = 1\}$$

Konjektur Bieberbach 1916

$a_n \leq n$

Bukti Louis de Branges 1984

J.L. Schiff & Walker 1990

$$\begin{array}{lcll} F & : & S & \rightarrow & S_\mu \\ & & f & \mapsto & F_f, \forall f \in S \end{array}$$

$$F_f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \Psi_n(\mu r) + \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n} \frac{\mu}{2(n+1)} \overline{z^{n+1}} \Psi_{n+1}(\mu r).$$

F_f fungsi μ regular pada $D(0,1)$.

Selanjutnya kita pandang,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \Psi_n(\mu r) + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \overline{z^n} \Psi_n(\mu r).$$

dengan $a_{-n-1} = \dfrac{\mu}{2(n+1)} \overline{a_n},\ n = 0,1,2,3,\ldots$

Kelas fungsi Analitik Bieberbach-Eilenberg

$$B = \{ f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n : f(z) f(\xi) \neq 1 \text{ untuk tiap pasang titik } z \text{ dan } \xi \text{ di } D(0,1) \}$$

Roginski (1939): Konjektur $|a_n| \leq 1, \forall n$

Bukti oleh Lebedev dan Milin (1951).

Aharonov dan Nehari (1970) menunjukkan

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \leq 1.$$

Fungsi μ Regular
Dibangun dari Kelas Fungsi Bieberbach-Eilenberg

$$* \left| a_n - a_{-n} \right| \le 1 + \frac{\mu}{2n}, n = 1,2,3,\ldots$$

$$* \sum_{n=1}^{\infty} \left| a_{-n} \right|^2 \le \frac{1}{6} \left(\frac{\mu\pi}{2} \right)^2$$

Komposisi Dua Fungsi
Hal. 79

Misalkan f dan g di $C^1(\Omega)$, dan $f \circ g$ terdefinisi pada Ω.

Maka berlaku,

$$\frac{\partial}{\partial z}(f\circ g)(z) = \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{g(z)} \frac{\partial g}{\partial z}(z) + \left.\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right|_{g(z)} \frac{\partial \bar{g}}{\partial z}(z)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(f\circ g)(z) = \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{g(z)} \frac{\partial g}{\partial \bar{z}}(z) + \left.\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right|_{g(z)} \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{z}}(z)$$

Akibat IV.30
Hal. 79

Misalkan f analitik dan g μ regular dan $f \circ g$ terdefinisi pada Ω.

Maka berlaku,

$$\frac{\partial}{\partial z}(f \circ g)(z) = \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{g(z)} \frac{\partial g}{\partial z}(z)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(f \circ g)(z) = \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{g(z)} \frac{\partial g}{\partial \bar{z}}(z)$$

Proposisi IV.23
Hal. 80

Misalkan f fungsi μ regular disetiap titik pada suatu daerah yang memiliki batas sejumlah hingga kontur - kontur tutup sederhana Γ. Misalkan pula $\Phi(w)$ fungsi analitik di $w = f(z)$, maka

$$\operatorname{Re}\int_{\Gamma} \{\Phi(f)f_x - \mu \operatorname{Im}(\Phi(f)\overline{f}\} dz = 0.$$

Proposisi IV.24
Hal. 80

Misalkan f fungsi μ regular di dalam dan pada kontur tutup tutup sederhana Γ dan $f(z) \neq 0$ untuk setiap titik pada Γ. Maka jumlah total bilangan nol dari $f(z)$ di dalam Γ adalah

$$N = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \left(\frac{f_x}{f} + \frac{\mu}{2} \frac{f}{\overline{f}} - \frac{\mu}{2} \frac{\overline{f}}{f} \right) dz \right).$$

TERIMAKASIH