

FUNGSI μ REGULAR

Endang Cahya M.A¹
Jurusan Matematika FMIPA ITB
Jl. Ganesa 10, Bandung, 40132-Indonesia

Abstrak

Tulisan ini membahas bagaimana mengkonstruksi sebuah fungsi μ Regular dari suatu fungsi panharmonik, dan bagaimana sifat integral kontur hasil kombinasi dari fungsi-fungsi μ Regular. Dijelaskan pula keterkaitan fungsi panharmonik dan fungsi μ Regular dalam suatu integral kontur, yang pada akhirnya menghasilkan representasi nilai fungsi μ Regular disatu titik bergantung pada nilai integral kontur dari suatu fungsi Bessel dan fungsi μ Regular. Hasil ini dilengkapi pula dengan representasi integral Cauchy untuk fungsi μ Regular.

PENDAHULUAN

Persamaan diferensial $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \mu^2 u$, dimana μ sebuah konstanta real

positif, disebut persamaan Yukawa. Sebuah fungsi C^2 yang memenuhi persamaan Yukawa disebut fungsi panharmonik. Pada [2] dan [3], telah diberikan pengertian mengenai sebuah fungsi bernilai kompleks yang memenuhi sifat perumuman Cauchy-Riemann. Misalkan $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ sebuah fungsi bernilai kompleks, dengan u dan v memenuhi persamaan

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \mu u \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x} - \mu v\end{aligned}$$

maka f disebut fungsi μ regular. Dalam Colton, fungsi ini disebut juga fungsi analitik semu(pseudo-analytic), dan dapat ditunjukkan bahwa fungsi f , u dan v masing-masing fungsi panharmonik. Untuk pengujian ke μ regularan suatu fungsi bernilai kompleks f di C^2 dapat digunakan $Lf(z) = \mu \overline{f(z)}$

dimana $L = \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y}$.

KONSTRUKSI FUNGSI μ REGULAR

Melalui perumuman sifat Cauchy-Riemann, dapat dikonstruksi sebuah fungsi μ regular dari sebuah fungsi panharmonik real.

Teorema 1

Misalkan $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ daerah buka terhubung sederhana. Misalkan u sebuah fungsi panharmonik real pada Ω . Maka terdapat fungsi μ regular pada Ω yang bagian realnya u . Juga terdapat fungsi μ regular pada Ω yang bagian imaginernya u .

Bukti

Harus ditunjukkan ada fungsi panharmonik v pada Ω sehingga $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ fungsi μ regular pada Ω . Untuk itu konstruksi

¹ Alamat tetap Jurusan Pendidikan Matematika FPMIPA UPI Bandung

$$v(x, y) = \int_a^y \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} - \mu u(x, t) \right) dt + \varphi(x), \text{ dimana } \varphi(x) \text{ memenuhi } \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mu \varphi(x) + \frac{\partial u(x, a)}{\partial y} = 0.$$

Dapat ditunjukkan u dan v memenuhi sifat perumuman Cauchy-Riemann. Untuk menunjukkan v panharmonik, diferensialkan v terhadap y dua kali. $\square$

Melalui pengkonstruksian bagian real dan bagian imajiner untuk fungsi μ regular dari fungsi panharmonik, maka hasilnya tidak tunggal.

Teorema 2

Selisih dua buah fungsi μ regular yang memiliki bagian real yang sama adalah sebuah fungsi $c(x) = ike^{-\mu x}$ untuk suatu konstanta real k .

Bukti

Misalkan $f_1(z) = u(x, y) + iv_1(x, y)$ dan $f_2(z) = u(x, y) + iv_2(x, y)$ dua buah fungsi μ regular.

Dengan menggunakan sifat fungsi μ regular, diperoleh $v_1 - v_2 = c(x)$ dan $\frac{\partial c(x)}{\partial x} = -\mu c(x)$ $\square$

Teorema 3

Selisih dua buah fungsi μ regular yang memiliki bagian imajiner yang sama adalah sebuah fungsi $c(x) = ke^{\mu x}$ untuk suatu konstanta real k .

Selain melalui perumuman Cauchy-Riemann, sebuah fungsi μ regular dapat pula dibangun oleh sebuah fungsi panharmonik melalui penggunaan operator L .

Lemma 4

Misalkan $u(z)$ fungsi panharmonik maka $f(z) = \mu \overline{u(z)} + \bar{L}u(z)$ fungsi μ regular.

Bukti

$$Lf(z) = L(\mu \overline{u(z)} + \bar{L}u(z)) = \mu L\overline{u(z)} + \Delta u = \mu(L\overline{u(z)} + \mu u(z)) = \mu \overline{f(z)}. \square$$

Lemma 5

Misalkan $u(z)$ fungsi panharmonik maka $f(z) = i(-\mu \overline{u(z)} + \bar{L}u(z))$ fungsi μ regular.

INTEGRAL KONTUR FUNGSI μ REGULAR

Secara umum perkalian dua buah fungsi μ regular tak nol bukan fungsi μ regular. Untuk itu akan dilihat sifat integral kontur hasil kali dua buah fungsi μ regular, selisihnya dan integral kontur hasil kombinasi fungsi panharmonik dengan fungsi μ regular.

Lemma 6

Misalkan $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ daerah buka terhubung sederhana yang dibatasi oleh sebuah kurva tutup sederhana Γ . Misalkan $h(z) \in C^1(\Omega)$, dan $\text{Re}(L(h(z))) = 0$. Maka $\text{Im} \int_{\Gamma} h(z) dz = 0$.

Bukti

$$\text{Misalkan } h(z) = u(x, y) + iv(x, y) \in C^1(\Omega), \text{ maka } Lh(z) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + i \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

Untuk $\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0$, maka $\text{Im} \int_{\Gamma} h(z) dz = \text{Im} \int_{\Gamma} (u + iv)(dx + idy) = \int_{\Gamma} u dy + v dx = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = 0$

Lemma 7

Misalkan $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ daerah buka terhubung sederhana yang dibatasi oleh sebuah kurva tutup sederhana Γ . Misalkan $h(z) \in C^1(\Omega)$, dan $\text{Im}(L(h(z))) = 0$. Maka $\text{Re} \int_{\Gamma} h(z) dz = 0$.

Bukti (serupa dengan bukti lemma 6).

Kedua Lemma tersebut di atas, akan digunakan dalam membuktikan terorema berikut ini.

Teorema 8

Misalkan $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ daerah buka terhubung sederhana yang dibatasi oleh sebuah kurva tutup sederhana Γ .

Misalkan f dan g masing-masing fungsi μ regular pada Ω . Maka $\int_{\Gamma} f(z)g(z)dz + \overline{\int_{\Gamma} f(z)g(z)dz} = 0$.

Bukti

Misalkan $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ dan $g(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ masing-masing fungsi μ regular.

Maka $\text{Im} L(f(z)g(z)) = 0$. Berdasarkan lemma 7, $\text{Re} \int_{\Gamma} f(z)g(z)dz = 0$. Tetapi

$\text{Re} \int_{\Gamma} f(z)g(z)dz = \text{Re} \overline{\int_{\Gamma} f(z)g(z)dz}$ dan $\text{Im} \int_{\Gamma} f(z)g(z)dz = -\text{Im} \overline{\int_{\Gamma} f(z)g(z)dz}$. Akibatnya

$$\int_{\Gamma} f(z)g(z)dz + \overline{\int_{\Gamma} f(z)g(z)dz} = 0. \quad \square$$

Akibat teorema ini, jika $f = g$, maka $\int_{\Gamma} f^2(z)dz + \overline{\int_{\Gamma} f^2(z)dz} = 0$.

Akibat 9

Misalkan f dan g dua buah fungsi μ regular pada Ω yang berbeda bagian imajineranya. Maka

$$\int_{\Gamma} (f - g)(z)dz + \overline{\int_{\Gamma} (g - f)(z)dz} = 0.$$

Bukti

Berdasarkan teorema 2, $(f-g)(z) = ike^{i\mu x}$. Karena itu, $\text{Re} L(f-g)(z) = 0$. Berdasarkan lemma 6,

$$\text{Im} \int_{\Gamma} (f - g)(z)dz = 0. \text{ Akibatnya } \int_{\Gamma} (f - g)(z)dz + \overline{\int_{\Gamma} (g - f)(z)dz} = 0. \quad \square$$

Akibat 10

Misalkan f dan g dua buah fungsi μ regular pada Ω yang berbeda bagian realnya. Maka

$$\int_{\Gamma} (f - g)(z)dz + \overline{\int_{\Gamma} (g - f)(z)dz} = 0.$$

Bukti

Berdasarkan teorema 3, $(f-g)(z) = ke^{i\mu x}$. Karena itu, $\text{Im} L(f-g)(z) = 0$. Berdasarkan lemma 7,

$$\text{Re} \int_{\Gamma} (f - g)(z)dz = 0. \text{ Akibatnya } \int_{\Gamma} (f - g)(z)dz + \overline{\int_{\Gamma} (f - g)(z)dz} = 0. \quad \square$$

Selanjutnya akan dikemukakan kaitan fungsi panharmonik dan fungsi μ regular dalam suatu formula representasi integral kontur.

Teorema 11

Misalkan $u(z)$ fungsi panharmonik dan $f(z)$ fungsi μ regular pada $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Maka

$$\int_{\Gamma} f(z) \bar{L}u(z) dz + \int_{\Gamma} \mu \overline{f(z)u(z)} dz = 0.$$

Bukti

Berdasarkan lemma 4, $g(z) = \overline{\mu u(z)} + \bar{L}u(z)$ fungsi μ regular. Dan berdasarkan lemma 5,

$h(z) = i(-\overline{\mu u(z)} + \bar{L}u(z))$ juga fungsi. Selanjutnya, dengan menggunakan teorema 8, diperoleh

$$\int_{\Gamma} f(z)g(z)dz \text{ dan } \int_{\Gamma} f(z)h(z)dz \text{ imajiner. Tulis } \int_{\Gamma} f(z)g(z)dz = P + Q \text{ dan } \int_{\Gamma} f(z)h(z)dz = -iP + iQ$$

sehingga diperoleh $\bar{P} + Q = 0$. Karena itu, $\int_{\Gamma} f(z)\bar{L}u(z)dz + \int_{\Gamma} \mu \overline{f(z)u(z)} dz = 0$. □

Teorema 12

Misalkan $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ daerah buka terhubung sederhana, dan Γ sembarang lintasan tutup sederhana dalam Ω . Misalkan $f(z)$ adalah fungsi μ regular pada Ω . Jika $r = |z-a|$ maka

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{a-z} \mu r K_0^1(\mu r) dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \overline{f(z) \mu K_0(\mu r)} dz$$

asalkan a di dalam Γ . Jika a di luar Γ , maka ruas kanan nol.

Bukti

Misalkan a di luar Γ , maka dengan menggunakan teorema 8, khusus untuk $u(z)=K_0(\mu r)$, dan $a=x_0+iy_0$ maka dapat diperoleh

$$\bar{L}K_0(\mu r) = \frac{\mu r K_0'(\mu r)}{z-a} \text{ dan } 0 = \int_{\Gamma} \mu \overline{f(z)K_0(\mu r)} dz + \int_{\Gamma} \frac{f(z) \mu r K_0'(\mu r)}{z-a} dz.$$

Misalkan a di dalam Γ , maka buat lingkaran γ berjari-jari ε sehingga a diluar kontur $\Gamma \setminus \gamma$. Karena itu kita punya

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Gamma_{\varepsilon}} \mu \overline{f(z)K_0(\mu r)} dz + \int_{\Gamma_{\varepsilon}} \frac{f(z) \mu r K_0'(\mu r)}{z-a} dz. \\ &= \int_{\Gamma} \mu \overline{f(z)K_0(\mu r)} dz + \int_{\Gamma} \frac{f(z) \mu r K_0'(\mu r)}{z-a} dz. + \int_{\gamma} \mu \overline{f(z)K_0(\mu r)} dz + \int_{\gamma} \frac{f(z) \mu r K_0'(\mu r)}{z-a} dz. \end{aligned}$$

Tetapi $K_0(x) \approx \log \frac{1}{x}$ dan $K_0'(x) \approx -\frac{1}{x}$ untuk $x \rightarrow 0^+$. Akibatnya

$$\int_{\gamma} \frac{f(z) \mu r K_0'(\mu r)}{z-a} dz \rightarrow \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz \rightarrow 2\pi i f(a) \text{ dan } \int_{\gamma} \mu \overline{f(z)K_0(\mu r)} dz \rightarrow 0 \text{ untuk } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Karena itu, $2\pi i f(a) = \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{a-z} \mu r K_0^1(\mu r) dz + \int_{\Gamma} \overline{f(z) \mu K_0(\mu r)} dz$. □

FORMULA INTEGRAL CAUCHY UNTUK FUNGSI μ REGULAR

Untuk melihat formula integral Cauchy fungsi μ regular, akan digunakan formula integral Cauchy untuk fungsi yang tidak analitik.

Lemma 13

Misalkan Ω himpunan buka di $\mathbb{C}$, D subhimpunan buka yang relatif kompak di Ω dengan batas C^1 bagian demi bagian. Misalkan f fungsi C^1 di Ω . Kemudian, untuk setiap $\xi \in D$ berlaku

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z - \xi} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_D \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}(z) \frac{dz \wedge d\bar{z}}{z - \xi}.$$

Bukti (Lihat [4] dan [5]).

Teorema 14

Misalkan Ω himpunan buka di $\mathbb{C}$, D subhimpunan buka yang relatif kompak di Ω dengan batas C^1 bagian demi bagian. Misalkan f fungsi μ regular di Ω . Kemudian, untuk setiap $\xi \in D$ berlaku

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z - \xi} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_D \frac{1}{2} \mu \overline{f(z)} \frac{dz \wedge d\bar{z}}{z - \xi}.$$

Bukti

Karena f fungsi μ regular tidak analitik, tetapi ada di C^2 , maka f juga di C^1 . Selanjutnya gunakan

$$\text{lemma 13, dan } \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(z) = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + i \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) = \frac{1}{2} \mu[u - iv] = \frac{1}{2} \overline{f(z)}. \square$$

Ucapan Terimakasih

Ucapan terimakasih kepada Bapak Wono Setya Budhi atas bimbingannya, dan Bapak Hendra Gunawan, Bapak Moedomo atas segala saran dan kritiknya.

Daftar Pustaka

1. D.L.Colton, *Analytic Theory of Partial Differential Equations*, Pitman, New York, 1980.
2. R.J. Duffin, *Yukawan Potential theory*, J. Math. Anal. Appl. **35**, 104-130, 1971.
3. J.L. Schiff and W.J. Walker, *A Bieberbach Condition for a Class of Pseudo-analytic Functions*, J. Math. Anal. Appl. **146**, 570-679, 1990.
4. Serge Lang, *Complex Analysis*, Springer Verlag, Third Ed., New York, 1989.
5. Wono. S.B., *Perumuman Teorema Hampiran Runge*, Makalah, Mat. ITB, Bandung, 1998.

