

Panharmonik

Tulisan ini menjelaskan solusi persamaan Yukawa

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \mu^2 u \quad (1)$$

dimana μ konstanta positif.

Sebuah solusi C^2 dari (1) dalam sebuah domain disebut *Panharmonik*.

Pers. (1) dikembangkan oleh Hideki Yukawa fisikawan Jepang, untuk menjelaskan / menggambarkan potensial nuklir dari sebuah titik sumber. Untuk melihat bagaimana bentuk solusinya, berikut ini cuplikan teorema dari Journal of Mathematical Analysis and Applications 146. 570-579. (1990), dalam topik "Bierbach Condition for a class of Pseudo-Analytic Functions" oleh J.L. Schiff & W.J. Walker.

Teorema

Jika $u(r, \theta)$ adalah panharmonik dalam sebuah disk (dalam hal ini daerah lingkaran) $x^2 + y^2 \leq a^2$, maka untuk $0 \leq r < a$,

$$u(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n I_{|n|}(\mu r) e^{in\theta},$$

dimana $c_n = \frac{1}{2\pi I_{|n|}(\mu a)} \int_0^{2\pi} u(a, \theta) e^{-in\theta} d\theta$, dan

$$I_n(x) = \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2} \right)^n \left[1 + \frac{x^2/2^2}{1 \cdot (n+1)} + \frac{x^4/2^4}{1 \cdot 2 \cdot (n+1)(n+2)} + \frac{x^6/2^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (n+1)(n+2)(n+3)} + \dots \right]$$

Catatan:

Untuk masing-masing n , $I_{|n|}(\mu r) e^{in\theta}$ adalah sebuah solusi dan dalam hal khusus

$I_0(\mu, r)$ adalah solusi positif lainnya.

Bila kita cermati, bentuk pers.(1) merupakan masalah nilai eigen $\Delta u = \lambda u$, dan cukup wajar jika $\lambda = \mu^2 > 0$.

Bukti

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \mu^2 u \quad (1)$$

Dengan mengubah kedalam koordinat polar, misalkan

$x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $\tan \theta = y/x$, dan $x^2 + y^2 = r^2$, maka diperoleh

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \mu^2 u(r, \theta) \quad (2)$$

Dengan metoda peubah terpisah, misalkan $u(r, \theta) = R(r)G(\theta)$ solusi (2), maka diperoleh,

$$\frac{r^2 R''(r)}{R(r)} + \frac{r R'(r)}{R(r)} + \frac{G'(\theta)}{G(\theta)} = \mu^2 r^2$$

atau

$$\frac{r^2 R''(r)}{R(r)} + \frac{r R'(r)}{R(r)} - \mu^2 r^2 = -\frac{G'(\theta)}{G(\theta)} \quad (3)$$

Karena sisi kiri hanya bergantung pada r dan sisikanan hanya bergantung pada θ , sedangkan r dan θ peubah bebas, maka haruslah pers. (3) konstan. Sebut saja α .

Dari pers. (3) tersebut, diperoleh dua buah pers. diferensial biasa,

$$G'' + \alpha G = 0 \quad (4)$$

$$\text{dan} \quad r^2 R'' + rR' - (r^2 \mu^2 + \alpha)R = 0 \quad (5)$$

Karena daerah domainnya adalah daerah lingkaran, maka haruslah G merupakan fungsi periodik. Selanjutnya untuk menyelesaikan (4) dan (5), kita bagi dalam tiga kasus;

Kasus $\alpha = 0$, maka pers (4) menjadi $G'' = 0$, dan solusinya adalah fungsi linear dalam θ , tetapi G harus periodik. Jadi haruslah G konstan. (sebut $G = c$).

Dari pers. (5), $r^2 R'' + rR' - (r^2 \mu^2)R = 0$, maka solusinya adalah

$$R_1(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} \left(\frac{\mu r}{2} \right)^{2n},$$

dan dan solusi yang bebas linear dengan R_1 berbentuk

$$R_2(r) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (\mu r)^{n+1} + R_1 \ln(\mu r).$$

Solusi yang kedua bila $r \rightarrow 0$, maka $R_2 \rightarrow -\infty$, karena itu solusin ya cukup R_1 saja.

$\therefore$ Solusi untuk kasus ini,

$$u(r, \theta) = c \cdot R_1(r) = c \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} \left(\frac{\mu r}{2} \right)^{2n}.$$

Kasus $\alpha < 0$, sebut saja $\alpha = -v^2$, $v > 0$, maka persamaan (4) dan (5) menjadi

$$G'' - v^2 G = 0 \quad (4)$$

$$\text{dan} \quad r^2 R'' + rR' - (r^2 \mu^2 - v^2)R = 0 \quad (5)$$

Pers.(4) memiliki solusi $G(\theta) = A e^{v\theta} + B e^{-v\theta}$.

Solusi ini tidak periodik, karena itu untuk kasus ini, pers. (2) tidak punya solusi yang periodik.

Kasus $\alpha > 0$, sebut saja $\alpha = v^2$, $v > 0$, maka persamaan (4) dan (5) menjadi

$$G'' + v^2 G = 0 \quad (4)$$

$$\text{dan} \quad r^2 R'' + rR' - (r^2 \mu^2 + v^2)R = 0 \quad (5)$$

Solusi dari pers.(4) adalah

$$G(\theta) = A \cos v\theta + B \sin v\theta = e^{iv\theta}$$

Dengan syarat $G(a, \pi) = G(a, -\pi)$, $\forall a \leq r$, maka diperoleh $\sin v\pi = 0$.

$$\therefore v = n$$

$$\therefore G(\theta) = e^{in\theta}.$$

Pers. (5), memiliki bentuk solusi,

$$R_1(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{v+2n}}{2^{2n} n! (v+1)(v+2) \dots (v+n)} a_0, \quad t = \mu r.$$

$$\text{Pilih } a_0 = \frac{1}{v! 2^v},$$

maka

$$\begin{aligned} R_1(r) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{v+2n}}{2^{2n} n! (v+1)(v+2) \dots (v+n)} \cdot \frac{1}{v! 2^v}, \quad t = \mu r \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t/2)^v (t/2)^{2n}}{n! (v+n)!}. \quad t = \mu r \end{aligned}$$

Dan

$$R_2(r) = t^{-v} \sum_{n=0}^{\infty} c_n^* t^n + c R_1 \ln t, \quad t = \mu r.$$

Bila $r \rightarrow 0$, maka $R_2(r) \rightarrow -\infty$, karena itu R_2 tidak menarik, jadi kita ambil

$$\begin{aligned} R(r) = R_1(r) &= \left(\frac{\mu r}{2} \right)^v \left\{ \frac{1}{v!} + \frac{\left(\frac{\mu r}{2} \right)^2}{1!(v+1)!} + \frac{\left(\frac{\mu r}{2} \right)^4}{2!(v+2)!} + \frac{\left(\frac{\mu r}{2} \right)^6}{3!(v+3)!} + \dots \right\} \\ &= \frac{\left(\frac{\mu r}{2} \right)^v}{v!} \left\{ 1 + \frac{\left(\frac{\mu r}{2} \right)^2}{1(v+1)} + \frac{\left(\frac{\mu r}{2} \right)^4}{1.2(v+2)(v+1)} + \frac{\left(\frac{\mu r}{2} \right)^6}{1.2.3(v+3)(v+2)(v+1)} + \dots \right\} \\ &= \frac{\left(\frac{\mu r}{2} \right)^v}{n!} \left\{ 1 + \frac{\left(\frac{\mu r}{2} \right)^2}{1(n+1)} + \frac{\left(\frac{\mu r}{2} \right)^4}{1.2(n+2)(n+1)} + \frac{\left(\frac{\mu r}{2} \right)^6}{1.2.3(n+3)(n+2)(n+1)} + \dots \right\} \end{aligned}$$

karena $v = n$.

Misalkan $R(r) = I_n$.

$\therefore u(r, \theta) = R(r)G(\theta) = I_n(r)e^{in\theta}$, n bilangan bulat.

Karena kombinasi linear dari solusi PD linear adalah solusi (Prinsip Superposisi), maka

$$u(r, \theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n I_{|n|} e^{in\theta}$$

dengan

$$I_n(r) = \frac{\left(\frac{\mu r}{2} \right)^v}{n!} \left\{ 1 + \frac{\left(\frac{\mu r}{2} \right)^2}{1(n+1)} + \frac{\left(\frac{\mu r}{2} \right)^4}{1.2(n+2)(n+1)} + \frac{\left(\frac{\mu r}{2} \right)^6}{1.2.3(n+3)(n+2)(n+1)} + \dots \right\}$$

dan berdasarkan Transformasi Fourier, diperoleh

$$c_n = \frac{1}{2\pi I_{|n|}(a)} \int_0^{2\pi} u(a, \theta) e^{-in\theta} d\theta.$$

Daftar Pustaka

- [1] C.Ray Wylie & Louis C. Barrett,” *Advanced Engineering Mathematics*”, fifth ed.
Mc Graw-Hill International editions, Singapore, 1982.
- J.L. Schiff & W.J Walker,” *A Bieberbach Condition for Class of Pseudo-Analytic Functions*”, J. Math. Anal. Appl. 146 (1990). 570-579.
- G.N. Watson,” *A Treatise on the Theory of Bessel Function*”, second ed. Cambridge Univ. Press., London/New York, 1966.
- Rene Dennemeyer, “*Introduction to Partial Differential Equations and Boundary Value Problem's*”, Mc Graw-Hill Book Company, New York. 1968.