

# FUNGSI $\mu$ REGULAR

Endang Cahya M.A<sup>1</sup>  
Jurusan Matematika FMIPA ITB  
Jl. Ganesa 10, Bandung, 40132-Indonesia

## Abstrak

*Tulisan ini membahas bagaimana mengkonstruksi sebuah fungsi  $\mu$  Regular dari suatu fungsi panharmonik, dan bagaimana sifat integral kontur hasil kombinasi dari fungsi-fungsi  $\mu$  Regular. Dijelaskan pula keterkaitan fungsi panharmonik dan fungsi  $\mu$  Regular dalam suatu integral kontur, yang pada akhirnya menghasilkan representasi nilai fungsi  $\mu$  Regular disatu titik bergantung pada nilai integral kontur dari suatu fungsi Bessel dan fungsi  $\mu$  Regular. Hasil ini dilengkapi pula dengan representasi integral Cauchy untuk fungsi  $\mu$  Regular.*

## PENDAHULUAN

Persamaan diferensial  $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \mu^2 u$ , dimana  $\mu$  sebuah konstanta real

positif, disebut persamaan Yukawa. Sebuah fungsi  $C^2$  yang memenuhi persamaan Yukawa disebut fungsi panharmonik. Pada [2] dan [3], telah diberikan pengertian mengenai sebuah fungsi bernilai kompleks yang memenuhi sifat perumuman Cauchy-Riemann. Misalkan

$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  sebuah fungsi bernilai kompleks, dengan  $u$  dan  $v$  memenuhi persamaan

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \mu u \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x} - \mu v\end{aligned}$$

maka  $f$  disebut fungsi  $\mu$  regular. Dalam Colton, fungsi ini disebut juga fungsi analitik semu (pseudo-analytic), dan dapat ditunjukkan bahwa fungsi  $f$ ,  $u$  dan  $v$  masing-masing fungsi panharmonik. Untuk pengujian ke  $\mu$  regularan suatu fungsi bernilai kompleks  $f$  di  $C^2$  dapat digunakan  $Lf(z) = \mu \overline{f(z)}$  dimana  $L = \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y}$ .

## KONSTRUKSI FUNGSI $\mu$ REGULAR

Melalui perumuman sifat Cauchy-Riemann, dapat dikonstruksi sebuah fungsi  $\mu$  regular dari sebuah fungsi panharmonik real.

### Teorema 1

Misalkan  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  daerah buka terhubung sederhana. Misalkan  $u$  sebuah fungsi panharmonik real pada  $\Omega$ . Maka terdapat fungsi  $\mu$  regular pada  $\Omega$  yang bagian realnya  $u$ . Juga terdapat fungsi  $\mu$  regular pada  $\Omega$  yang bagian imajinernya  $u$ .

### Bukti

Harus ditunjukkan ada fungsi panharmonik  $v$  pada  $\Omega$  sehingga  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  fungsi  $\mu$  regular pada  $\Omega$ . Untuk itu konstruksi

---

<sup>1</sup> Alamat tetap Jurusan Pendidikan Matematika FPMIPA UPI Bandung

$$v(x, y) = \int_a^y \left( \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} - \mu u(x, t) \right) dt + \varphi(x), \text{ dimana } \varphi(x) \text{ memenuhi } \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mu \varphi(x) + \frac{\partial u(x, a)}{\partial y} = 0.$$

Dapat ditunjukkan  $u$  dan  $v$  memenuhi sifat perumuman Cauchy-Riemann. Untuk menunjukkan  $v$  panharmonik, diferensialkan  $v$  terhadap  $y$  dua kali.  $\square$

Melalui pengkonstruksian bagian real dan bagian imajiner untuk fungsi  $\mu$  regular dari fungsi panharmonik, maka hasilnya tidak tunggal.

**Teorema 2**

Selisih dua buah fungsi  $\mu$  regular yang memiliki bagian real yang sama adalah sebuah fungsi  $c(x) = ke^{-\mu x}$  untuk suatu konstanta real  $k$ .

**Bukti**

Misalkan  $f_1(z) = u(x, y) + iv_1(x, y)$  dan  $f_2(z) = u(x, y) + iv_2(x, y)$  dua buah fungsi  $\mu$  regular.

Dengan menggunakan sifat fungsi  $\mu$  regular, diperoleh  $v_1 - v_2 = c(x)$  dan  $\frac{\partial c(x)}{\partial x} = -\mu c(x)$   $\square$

**Teorema 3**

Selisih dua buah fungsi  $\mu$  regular yang memiliki bagian imajiner yang sama adalah sebuah fungsi  $c(x) = ke^{\mu x}$  untuk suatu konstanta real  $k$ .

Selain melalui perumuman Cauchy-Riemann, sebuah fungsi  $\mu$  regular dapat pula dibangun oleh sebuah fungsi panharmonik melalui penggunaan operator  $L$ .

**Lemma 4**

Misalkan  $u(z)$  fungsi panharmonik maka  $f(z) = \mu \overline{u(z)} + \overline{Lu(z)}$  fungsi  $\mu$  regular.

**Bukti**

$$Lf(z) = L(\mu \overline{u(z)} + \overline{Lu(z)}) = \mu L\overline{u(z)} + \overline{\Delta u} = \mu(L\overline{u(z)} + \mu u(z)) = \mu \overline{f(z)}. \square$$

**Lemma 5**

Misalkan  $u(z)$  fungsi panharmonik maka  $f(z) = i(-\mu \overline{u(z)} + \overline{Lu(z)})$  fungsi  $\mu$  regular.

## INTEGRAL KONTUR FUNGSI $\mu$ REGULAR

Secara umum perkalian dua buah fungsi  $\mu$  regular tak nol bukan fungsi  $\mu$  regular. Untuk itu akan dilihat sifat integral kontur hasil kali dua buah fungsi  $\mu$  regular, selisihnya dan integral kontur hasil kombinasi fungsi panharmonik dengan fungsi  $\mu$  regular.

**Lemma 6**

Misalkan  $\Omega \subseteq \mathfrak{R}^2$  daerah buka terhubung sederhana yang dibatasi oleh sebuah kurva tutup sederhana  $\Gamma$ . Misalkan  $h(z) \in C^1(\Omega)$ , dan  $\text{Re}(L(h(z))) = 0$ . Maka  $\text{Im} \int_{\Gamma} h(z) dz = 0$ .

**Bukti**

$$\text{Misalkan } h(z) = u(x, y) + iv(x, y) \in C^1(\Omega), \text{ maka } Lh(z) = \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + i \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

Untuk  $\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ , maka  $\text{Im} \int_{\Gamma} h(z) dz = \text{Im} \int_{\Gamma} (u + iv)(dx + idy) = \int_{\Gamma} udy + vdx = \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = 0$

Lemma 7

Misalkan  $\Omega \subseteq \mathfrak{R}^2$  daerah buka terhubung sederhana yang dibatasi oleh sebuah kurva tutup sederhana  $\Gamma$ . Misalkan  $h(z) \in C^1(\Omega)$ , dan  $\text{Im}(L(h(z))) = 0$ . Maka  $\text{Re} \int_{\Gamma} h(z) dz = 0$ .

Bukti (serupa dengan bukti lemma 6).

Kedua Lemma tersebut di atas, akan digunakan dalam membuktikan terorema berikut ini.

Teorema 8

Misalkan  $\Omega \subseteq \mathfrak{R}^2$  daerah buka terhubung sederhana yang dibatasi oleh sebuah kurva tutup sederhana  $\Gamma$ .

Misalkan  $f$  dan  $g$  masing-masing fungsi  $\mu$  regular pada  $\Omega$ . Maka  $\int_{\Gamma} f(z)g(z)dz + \overline{\int_{\Gamma} f(z)g(z)dz} = 0$ .

Bukti

Misalkan  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  dan  $g(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$  masing-masing fungsi  $\mu$  regular.

Maka  $\text{Im} L(f(z)g(z)) = 0$ . Berdasarkan lemma 7,  $\text{Re} \int_{\Gamma} f(z)g(z)dz = 0$ . Tetapi

$$\text{Re} \int_{\Gamma} f(z)g(z)dz = \text{Re} \overline{\int_{\Gamma} f(z)g(z)dz} \text{ dan } \text{Im} \int_{\Gamma} f(z)g(z)dz = -\text{Im} \overline{\int_{\Gamma} f(z)g(z)dz} . \text{ Akibatnya}$$

$$\int_{\Gamma} f(z)g(z)dz + \overline{\int_{\Gamma} f(z)g(z)dz} = 0. \quad \square$$

Akibat teorema ini, jika  $f = g$ , maka  $\int_{\Gamma} f^2(z)dz + \overline{\int_{\Gamma} f^2(z)dz} = 0$ .

Akibat 9

Misalkan  $f$  dan  $g$  dua buah fungsi  $\mu$  regular pada  $\Omega$  yang berbeda bagian imajinerinya. Maka

$$\int_{\Gamma} (f - g)(z)dz + \overline{\int_{\Gamma} (g - f)(z)dz} = 0.$$

Bukti

Berdasarkan teorema 2,  $(f-g)(z) = ike^{-\mu x}$ . Karena itu,  $\text{Re} L(f-g)(z) = 0$ . Berdasarkan lemma 6,

$$\text{Im} \int_{\Gamma} (f - g)(z)dz = 0. \text{ Akibatnya } \int_{\Gamma} (f - g)(z)dz + \overline{\int_{\Gamma} (g - f)(z)dz} = 0. \quad \square$$

Akibat 10

Misalkan  $f$  dan  $g$  dua buah fungsi  $\mu$  regular pada  $\Omega$  yang berbeda bagian realnya. Maka

$$\int_{\Gamma} (f - g)(z)dz + \overline{\int_{\Gamma} (g - f)(z)dz} = 0.$$

Bukti

Berdasarkan teorema 3,  $(f-g)(z) = ke^{\mu x}$ . Karena itu,  $\text{Im} L(f-g)(z) = 0$ . Berdasarkan lemma 7,

$$\text{Re} \int_{\Gamma} (f - g)(z)dz = 0. \text{ Akibatnya } \int_{\Gamma} (f - g)(z)dz + \overline{\int_{\Gamma} (f - g)(z)dz} = 0. \quad \square$$

Selanjutnya akan dikemukakan kaitan fungsi panharmonik dan fungsi  $\mu$  regular dalam suatu formula representasi integral kontur.

**Teorema 11**

Misalkan  $u(z)$  fungsi panharmonik dan  $f(z)$  fungsi  $\mu$  regular pada  $\Omega \subseteq \mathfrak{R}^2$ . Maka

$$\int_{\Gamma} f(z) \overline{Lu}(z) dz + \int_{\Gamma} \mu f(z) \overline{u(z)} dz = 0.$$

**Bukti**

Berdasarkan lemma 4,  $g(z) = \overline{\mu u(z)} + \overline{Lu}(z)$  fungsi  $\mu$  regular. Dan berdasarkan lemma 5,

$h(z) = i(-\overline{\mu u(z)} + \overline{Lu}(z))$  juga fungsi. Selanjutnya, dengan menggunakan teorema 8, diperoleh

$$\int_{\Gamma} f(z)g(z)dz \text{ dan } \int_{\Gamma} f(z)h(z)dz \text{ imajiner. Tulis } \int_{\Gamma} f(z)g(z)dz = P + Q \text{ dan } \int_{\Gamma} f(z)h(z)dz = -iP + iQ$$

sehingga diperoleh  $\overline{P} + Q = 0$ . Karena itu,  $\int_{\Gamma} f(z) \overline{Lu}(z) dz + \int_{\Gamma} \mu f(z) \overline{u(z)} dz = 0$ . □

**Teorema 12**

Misalkan  $\Omega \subseteq \mathfrak{R}^2$  daerah buka terhubung sederhana, dan  $\Gamma$  sembarang lintasan tutup sederhana dalam  $\Omega$ . Misalkan  $f(z)$  adalah fungsi  $\mu$  regular pada  $\Omega$ . Jika  $r = |z-a|$  maka

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{a-z} \mu r K_0^1(\mu r) dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) \mu K_0(\mu r) dz$$

asalkan  $a$  di dalam  $\Gamma$ . Jika  $a$  di luar  $\Gamma$ . maka ruas kanan nol.

**Bukti**

Misalkan  $a$  di luar  $\Gamma$ , maka dengan menggunakan teorema 8, khusus untuk  $u(z) = K_0(\mu r)$ , dan  $a = x_0 + iy_0$  maka dapat diperoleh

$$\overline{LK_0(\mu r)} = \frac{\mu r K_0'(\mu r)}{z-a} \text{ dan } 0 = \int_{\Gamma} \mu f(z) \overline{K_0(\mu r)} dz + \int_{\Gamma} \frac{f(z) \mu r K_0'(\mu r)}{z-a} dz.$$

Misalkan  $a$  di dalam  $\Gamma$ , maka buat lingkaran  $\gamma$  berjari-jari  $\varepsilon$  sehingga  $a$  diluar kontur  $\Gamma \varepsilon = \Gamma - \gamma$ . Karena itu kita punya

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Gamma \varepsilon} \mu f(z) \overline{K_0(\mu r)} dz + \int_{\Gamma \varepsilon} \frac{f(z) \mu r K_0'(\mu r)}{z-a} dz. \\ &= \int_{\Gamma} \mu f(z) \overline{K_0(\mu r)} dz + \int_{\Gamma} \frac{f(z) \mu r K_0'(\mu r)}{z-a} dz. + \int_{\gamma} \mu f(z) \overline{K_0(\mu r)} dz + \int_{\gamma} \frac{f(z) \mu r K_0'(\mu r)}{z-a} dz. \end{aligned}$$

Tetapi  $K_0(x) \approx \log \frac{1}{x}$  dan  $K_0'(x) \approx -\frac{1}{x}$  untuk  $x \rightarrow 0^+$ . Akibatnya

$$\int_{\gamma} \frac{f(z) \mu r K_0'(\mu r)}{z-a} dz. \rightarrow \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz \rightarrow 2\pi i f(a) \text{ dan } \int_{\gamma} \mu f(z) \overline{K_0(\mu r)} dz \rightarrow 0 \text{ untuk } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Karena itu,  $2\pi i f(a) = \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{a-z} \mu r K_0^1(\mu r) dz + \int_{\Gamma} f(z) \mu K_0(\mu r) dz$ . □

## FORMULA INTEGRAL CAUCHY UNTUK FUNGSI $\mu$ REGULAR

Untuk melihat formula integral Cauchy fungsi  $\mu$  regular, akan digunakan formula integral Cauchy untuk fungsi yang tidak analitik.

Lemma 13

Misalkan  $\Omega$  himpunan buka di  $\mathbb{C}$ ,  $D$  subhimpunan buka yang relatif kompak di  $\Omega$  dengan batas  $C^1$  bagian demi bagian. Misalkan  $f$  fungsi  $C^1$  di  $\Omega$ . Kemudian, untuk setiap  $\xi \in D$  berlaku

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z - \xi} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_D \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}(z) \frac{dz \wedge d\bar{z}}{z - \xi}.$$

Bukti (Lihat [4] dan [5]).

Teorema 14

Misalkan  $\Omega$  himpunan buka di  $\mathbb{C}$ ,  $D$  subhimpunan buka yang relatif kompak di  $\Omega$  dengan batas  $C^1$  bagian demi bagian. Misalkan  $f$  fungsi  $\mu$  regular di  $\Omega$ . Kemudian, untuk setiap  $\xi \in D$  berlaku

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z - \xi} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_D \frac{1}{2} \overline{\mu f(z)} \frac{dz \wedge d\bar{z}}{z - \xi}.$$

Bukti

Karena  $f$  fungsi  $\mu$  regular tidak analitik, tetapi ada di  $C^2$ , maka  $f$  juga di  $C^1$ . Selanjutnya gunakan

lemma 13, dan  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(z) = \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + i \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) = \frac{1}{2} \mu[u - iv] = \frac{1}{2} \overline{\mu f(z)}$ .  $\square$

Ucapan Terimakasih

Ucapan terimakasih kepada Bapak Wono Setya Budhi atas bimbingannya, dan Bapak Hendra Gunawan, Bapak Moedomo atas segala saran dan kritiknya.

Daftar Pustaka

1. D.L.Colton, *Analytic Theory of Partial Differential Equations*, Pitman, New York, 1980.
2. R.J. Duffin, *Yukawan Potential theory*, J. Math. Anal. Appl. **35**, 104-130, 1971.
3. J.L. Schiff and W.J. Walker, *A Bieberbach Condition for a Class of Pseudo-analytic Functions*, J. Math. Anal. Appl. **146**, 570-679, 1990.
4. Serge Lang, *Complex Analysis*, Springer Verlag, Third Ed., New York, 1989.
5. Wono. S.B., *Perumuman Teorema Hampiran Runge*, Makalah, Mat. ITB, Bandung, 1998.

