PRINSIP MAKSIMUM DAN MINIMUM FUNGSI PANHARMONIK

Oleh,
Endang Cahya M.A.
Jurusan Pendidikan Matematika
FPMIPA UPI Bandung
Jl. Dr. Setiabudi 229 Bandung
E-mail ecma@dns.math.itb.ac.id

Abstrak

Tulisan ini menjelaskan prinsip maksimum dan minimum fungsi panharmonik baik yang bernilai real maupun yang bernilai kompleks. Metoda pembuktian yang digunakan adalah perhitungan kalkulus biasa untuk fungsi dua peubah. Sedangkan untuk fungsi panharmonik bernilai kompleks digunakan prinsip rotasi.

1. Pendahuluan

Sebuah fungsi $u = u(x, y)$ di $C^2(\Omega)$ disebut fungsi panharmonik jika u memenuhi persamaan Yukawa

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \mu^2 u \tag{1}$$

untuk suatu konstanta real μ dan himpunan buka Ω di $\Re^2$. Fungsi panharmonik u disebut panharmonik pada himpunan tutup jika u panharmonik pada interiornya dan kontinu pada batasnya.

Makalah ini memberikan bukti baru terhadap beberapa hasil survey yang ada pada literatur dan juga memberikan beberapa hasil yang baru. Pendekatan yang digunakan disini serupa dengan pendekatan yang dikembangkan atau digunakan untuk fungsi harmonik. Hal ini dilakukan hanya karena ada kemiripan bentuk antara persamaan Laplace dan persamaan Yukawa.

Kajian pertama diawali dengan fakta perhitungan nilai maksimum dan minimum fungsi panharmonik pada suatu cakram, yang selanjutnya akan digunakan sebagai langkah awal dugaan umum mengenai prinsip maksimum dan minimum fungsi panharmonik. Berikutnya juga dibahas mengenai nilai maksimum modulus fungsi panharmonik bernilai kompleks.

2. Prinsip Maksimum dan Minimum Fungsi Panharmonik

Untuk mengkaji masalah nilai maksimum dan minimum fungsi panharmonik, marilah kita lihat gagasan yang muncul dari fakta berikut. Berikut ini teorema dari Duffin, untuk bukti lihat [2], hal 115.

Teorema 1 *Jika $u(r,\theta)$ fungsi panharmonik pada cakram $x^2 + y^2 \leq a$, maka untuk $0 \leq r \leq a$,*

$$u(r,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n I_{|n|}(\mu r) e^{in\theta} \qquad (2)$$

dimana

$$c_n = \frac{1}{2\pi I_{|n|}(\mu a)} \int_0^{2\pi} u(a,\theta) e^{-in\theta} d\theta.$$

Di sini I_n merupakan fungsi Bessel termodifikasi jenis pertama, dengan

$$I_n(x) = \frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n \psi_n(x), \qquad (3)$$

dan

$$\psi_n(x) = 1 + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{1.(n+1)} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{1.2(n+1)(n+2)} + \ldots \qquad (4)$$

Dapat ditunjukan bahwa untuk masing-masing n, $I_{|n|}(\mu r)e^{in\theta}$ merupakan solusi persamaan (1) dan secara khusus, $\psi_0(\mu r)$ merupakan solusi positif dari persamaan (1). Dari teorema diatas, mari kita tinjau jika nilai batas u konstan, sebut saja $u(a,\theta) = k$, untuk suatu konstanta real k. Maka masing-masing koefisien c_n akan menjadi

$$c_n = \begin{cases} \dfrac{k}{\psi_0(\mu a)}, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

dan

$$u(r,\theta) = \frac{k}{\psi_0(\mu a)} I_0(\mu r). \qquad (5)$$

Melalui persamaan (5) ini, kita tinjau dua kasus. Pertama, jika $k > 0$, maka $u(r,\theta) > 0$. Untuk setiap θ dan r, dengan $0 \leq r \leq a$. Nilai maksimum u akan dicapai jika $r = a$, yaitu $u(r,\theta) = k$ dan nilai minimum akan dicapai jika $r = 0$. Ini mengatakan bahwa nilai minimum *u* terjadi tidak di batas cakram dan nilai maksimum terjadi di batas cakram. Kasus kedua, jika $k < 0$ maka $u(r,\theta) < 0$ untuk setiap θ dan r, dengan $0 \leq r \leq a$. Nilai minimum *u* akan dicapai di batas cakram yaitu $r = a$ dan nilai maksimum dicapai di pusat cakram. Ini mengatakan bahwa nilai minimum *u* terjadi di batas cakram dan nilai maksimum tidak tejadi di batas.

Dari kedua kasus ini, dugaan mengenai tempat terjadinya nilai maksimum dan nilai minimum untuk fungsi panharmonik berbeda dengan tempat terjadinya nilai maksimum dan nilai minimum untuk fungsi harmonik.

2.1. Prinsip Maksimum

Hasil pertama yang diperoleh dari gambaran di atas diformulasikan dalam teorema berikut.

Teorema 2 *Misalkan* Ω *himpunan buka terhubung sederhana, dan u fungsi panharmonik pada* $\overline{\Omega}$. *Jika nilai maksimum u positif maka nilai maksimum tersebut akan dicapai di batas* Ω.

Bukti *Andaikan ada* $\overline{x}$ *di dalam* Ω *sehingga* $\nabla u(\overline{x}) = 0, u_{xx}(\overline{x})u_{yy}(\overline{x}) - u_{xy}(\overline{x}) > 0,$ *dan* $u_{xx}(\overline{x}) < 0.$ *Maka* $u_{xx}(\overline{x})u_{yy}(\overline{x}) > u_{xy}(\overline{x}) \geq 0,$ *tetapi* $u_{xx}(\overline{x}) < 0$ *akibatnya haruslah* $u_{yy}(\overline{x}) < 0$. *Karena itu,* $\Delta u(\overline{x}) < 0.$ *Ini bertentangan dengan yang diketahui. Dengan demikian dapat disimpulkan, tidak ada* $\overline{x}$ *dalam* Ω *yang memberikan nilai maksimum, karena itu haruslah* $\overline{x}$ *ada di batas* Ω.

Teorema di atas memberikan akibat untuk fungsi panharmonik positif.

Akibat 1 *Misalkan u fungsi panharmonik positif pada* $\overline{\Omega}$, *maka nilai maksimum u dicapai di batas* Ω.

Bukti *Karena u panharmonik positif maka nilai maksimum u juga positif. Berdasarkan Teorema 2 maka nilai maksimum u terjadi di batas* Ω.

Akibat 2 *Misalkan u fungsi panharmonik tak negatif pada suatu himpunan buka terhubung sederhana* Ω. *Jika u mencapai nilai maksimum di dalam* Ω, *maka haruslah u fungsi konstan. (dalam hal ini haruslah u fungsi nol).*

Bukti *Lihat [1] dan [3].*

Selanjutnya, akan dilihat fungsi panharmonik tak negatif pada suatu himpunan buka terhubung sederhana dan terbatas di $\Re^2$, dan mungkin fungsi tersebut tidak kontinu pada batasnya.

Akibat 3 *Misalkan* Ω *himpunan buka terhubung sederhana dan terbatas di* $\Re^2$. *Misalkan u fungsi panharmonik tak negatif pada* Ω*, dan misalkan ada konstnta M > 0 sehingga*

$$\lim_{k\to\infty}\sup u(b_k) \le M$$

untuk setiap barisan (b_k) *di* Ω *yang konvergen ke suatu titik di batas* Ω. *Maka u < M pada* Ω.

Bukti *Misalkan M' = sup{u(x):x*$\in\Omega$*}, dan pilih barisan* (b_k) *di* Ω *sehingga u*(b_k) *konvergen ke M'. Dari sini, ada dua kasus yang perlu diperhatikan. Pertama, jika* (b_k) *memiliki subbarisan yang konvergen ke suatu titik b di dalam* Ω*, maka u(b) = M'. Dengan prinsip maksimum fungsi panharmonik tak negatif, maka u = M' pada* Ω. *Untuk kasus kedua, jika tidak ada subbarisan dari* (b_k) *yang konvergen kesuatu titik di dalam* Ω *maka* (b_k) *memiliki subbarisan* (a_k) *yang konvergen ke suatu titik pada batas* Ω*, sebut saja titik tersebut a, maka u(a) = M'. Ini mengakibatkan u* $\le$ *M'. Dengan demikian , dari kedua kasus ini, kita peroleh u < M pada* Ω.

2.2 Prinsip Minimum

Prinsip maksimum di atas, cenderung lebih tepat bila digunakan pada fungsi panharmonik positif, akan tetapi prinsip inipun akan berimplikasi juga untuk fungsi panharmonik negatif.

Teorema 3 *Misalkan* Ω *himpunan buka terhubung sederhana, dan u fungsi panharmonik pada* $\overline{\Omega}$. *Jika nilai minimum u negatif maka nilai minimum tersebut akan dicapai di batas* Ω.

Bukti *Andaikan ada* $\bar{x}$ *di dalam* Ω *sehingga* $\nabla u(\bar{x}) = 0, u_{xx}(\bar{x})u_{yy}(\bar{x}) - u_{xy}(\bar{x}) > 0,$ *dan* $u_{xx}(\bar{x}) > 0.$ *Maka* $u_{xx}(\bar{x})u_{yy}(\bar{x}) > u_{xy}(\bar{x}) \ge 0,$ *tetapi* $u_{xx}(\bar{x}) > 0$ *akibatnya haruslah* $u_{yy}(\bar{x}) > 0$. *Karena itu,* $\Delta u(\bar{x}) > 0.$ *Ini bertentangan dengan yang diketahui. Dengan demikian dapat disimpulkan, tidak ada* $\bar{x}$ *dalam* Ω *yang memberikan nilai minimum negatif, karena itu haruslah* $\bar{x}$ *ada di batas* Ω.

Akibat 4 *Misalkan u fungsi panharmonik negatif pada* $\overline{\Omega}$*, maka nilai maksimum u dicapai di batas* Ω.

Bukti *Karena u panharmonik negatif maka nilai minimum u juga negatif. Berdasarkan Teorema 3 maka nilai minimum u terjadi di batas* Ω.

Akibat 5 *Misalkan u fungsi panharmonik tak positif pada suatu himpunan buka terhubung sederhana* Ω. *Jika u mencapai nilai minimum di dalam* Ω, *maka haruslah u fungsi konstan. (dalam hal ini haruslah u fungsi nol).*

Bukti *Lihat [1] dan [3].*

Selanjutnya, akan dilihat fungsi panharmonik tak positif pada suatu himpunan buka terhubung sederhana dan terbatas di $\Re^2$, dan mungkin fungsi tersebut tidak kontinu pada batasnya.

Akibat 3 *Misalkan* Ω *himpunan buka terhubung sederhana dan terbatas di* $\Re^2$. *Misalkan u fungsi panharmonik tak positif pada* Ω, *dan misalkan ada konstnta* $M < 0$ *sehingga*

$$\liminf_{k\to\infty} u(b_k) \geq M$$

untuk setiap barisan (b_k) *di* Ω *yang konvergen ke suatu titik di batas* Ω. *Maka* $u > M$ *pada* Ω.

Bukti *Misalkan* $M' = \inf \{u(x) : x \in \Omega\}$, *dan pilih barisan* (b_k) *di* Ω *sehingga* $u(b_k)$ *konvergen ke M'. Dari sini, ada dua kasus yang perlu diperhatikan. Pertama, jika* (b_k) *memiliki subbarisan yang konvergen ke suatu titik b di dalam* Ω, *maka* $u(b) = M'$. *Dengan prinsip minimum fungsi panharmonik tak positif, maka* $u = M'$ *pada* Ω. *Untuk kasus kedua, jika tidak ada subbarisan dari* (b_k) *yang konvergen kesuatu titik di dalam* Ω *maka* (b_k) *memiliki subbarisan* (a_k) *yang konvergen ke suatu titik pada batas* Ω, *sebut saja titik tersebut a, maka* $u(a) = M'$. *Ini mengakibatkan* $u \geq M'$. *Dengan demikian , dari kedua kasus ini, kita peroleh* $u > M$ *pada* Ω.

Selanjutnya akan kita lihat nilai fungsi panharmonik di suatu titik dalam, pada suatu daerah kompak melalui penyajian integral fungsi panharmonik pada suatu cakram. Hasil ini diperoleh sebagai implikasi dari prinsip maksimum dan minimum fungsi panharmonikdi atas. Untuk itu terlebih dulu perhatikan penyajian integral berikut, dan untuk bukti dapat dilihat pada [2] hal. 111.

Teorema 4 *Misalkan u fungsi panharmonik pada cakram* $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 \leq a^2$, *maka*

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi\Psi_0(\mu a)} \int_0^{2\pi} u(x_0 + a\cos\varphi, y_0 + a\sin\varphi)\, d\varphi. \qquad (6)$$

Berikut ini salah satu hasil yang telah dikemukakan Duffin dalam [2], dan pada tulisan ini akan dibuktikan kembali dengan menggunakan prinsip maksimum fungsi panharmonik positif yang telah dikemukakan di atas.

Akibat 7 *Misalkan u fungsi panharmonik tak negatif pada daerah kompak* Ω. *Jika* $u \le M$ *pada batas* Ω *untuk suatu konstanta* $M > 0$, *dan* $\bar{x}$ *suatu titik interior* Ω, *maka*

$$u(\bar{x}) \le \frac{M}{\Psi_0(\mu a)},$$

dimana a adalah jarak terdekat dari $\bar{x}$ *terhadap batas* Ω.

Bukti *Misalkan* $\bar{x} = (x_0, y_0)$ *sembarang titik interior* Ω. *Kemudian buat cakram* $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 \le a^2$, *dimana a adalah jarak terdekat dari* $\bar{x}$ *terhadap batas* Ω. *Maka kita punya (6). Karena* $0 \le u \le M$ *pada batas* Ω, *maka ini juga berlaku pada cakram cakram* $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 \le a^2$ *di dalam* Ω, *karena itu (6) akan menjadi*

$$u(\bar{x}) \le \frac{M}{\Psi_0(\mu a)}.$$

Selanjutnya sebagai implikasi dari prinsip minimum fungsi panharmonik, kita turunkan sifat fungsi panharmonik seperti pada Akibat 7 untuk fungsi panharmonik tak positif.

Akibat 8 *Misalkan u fungsi panharmonik tak positif pada daerah kompak* Ω. *Jika* $u \ge M$ *pada batas* Ω *untuk suatu konstanta* $M < 0$, *dan* $\bar{x}$ *suatu titik interior* Ω, *maka*

$$u(\bar{x}) \ge \frac{M}{\Psi_0(\mu a)},$$

dimana a adalah jarak terdekat dari $\bar{x}$ *terhadap batas* Ω.

Bukti *Misalkan* $\bar{x} = (x_0, y_0)$ *sembarang titik interior* Ω. *Kemudian buat cakram* $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 \le a^2$, *dimana a adalah jarak terdekat dari* $\bar{x}$ *terhadap batas* Ω. *Maka dari sini kita punya (6). Karena* $M \le u \le 0$ *pada batas* Ω, *maka ini juga berlaku pada cakram* $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 \le a^2$ *di dalam* Ω, *karena itu (6) akan menjadi*

$$u(\bar{x}) \ge \frac{M}{\Psi_0(\mu a)}.$$

Untuk lebih memperjelas prinsip maksimum dan minimum di atas, dapat dilihat contoh berikut.

Contoh 1 *Misalkan* $u(x,y)=\cosh \mu x$ *pada cakram* $D(0,R)$. *Jelas u panharmonik. Nilai maksimum u akan dicapai dibatas cakram yaitu di titik* $(-R,0)$ *dan* $(R,0)$. *Sedangkan nilai minimum dicapai di sepanjang garis* $x=0$ *pada cakram* $D(0,R)$.

Contoh 2 *Misalkan* $u(x,y)=\sinh\mu x$ *pada cakram D(0,R). Jelas u fungsi panharmonik, dengan nilai maksimum dan minimum dicapai dibatas cakram D(0,R) yaitu di titik (R,0) dan (-R,0).*

2.3 Fungsi Panharmonik Bernilai Kompleks

Fungsi panharmonik yang telah dibahas di atas adalah fungsi panharmonik bernilai real. Berikut ini akan dibahas mengenai fungsi panharmonik bernilai kompleks. Seperti definisi pada fungsi panharmonik bernilai real, maka untuk fungsi panharmonik bernilai kompleks f didefinisikan sebagai fungsi kontinu yang memenuhi persamaan (1).

Teorema 5 *Misalkan* $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ *fungsi bernilai kompleks di* $C^2(\Omega)$. *Fungsi f panharmonik jika dan hanya jika u dan v panharmonik.*

Bukti *Misalkan* $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ *panharmonik pada* Ω, *maka* $f_{xx} + f_{yy}=u_{xx} + iv_{xx} + u_{yy} + iv_{yy}=(u_{xx} + u_{yy})+iv_{xx}+ iv_{yy}=\mu^2(u+iv)=\mu^2 f$. *Jadi* $u_{xx} + u_{yy}=\mu^2 u$ *dan* $v_{xx}+ v_{yy}=\mu^2 v$.

Akibat 9 *Misalkan f fungsi panharmonik bernilai kompleks dan c suatu konstanta kompleks. Maka cf juga fungsi panharmonik.*

Teorema 6 *Jika u fungsi panharmonik bernilai kompleks pada* Ω, *dan kontinu pada* $\overline{\Omega}$ *maka* $|u|$ *mencapai nilai maksimum di* $\overline{\Omega}$ *pada batasnya.*

Bukti *Andaikan* $|u|$ *mencapai nilai maksimum di suatu titik a di dalam* Ω, *sebut saja* $|u(a)| = M$. *Selanjutnya pilih bilangan kompleks b sehingga* $|b| = 1$ *dan bu(a) = M. Maka fungsi panharmonik bernilai real Re(bu) akan mencapai nilai maksimum M di suatu titik a di dalam* Ω. *Ini bertentangan dengan prinsip maksimum fungsi panharmonik. Jadi haruslah* $|u|$ *mencapai nilai maksimum pada batas* Ω.

Contoh 3 *Misalkan* $u(x,y) = e^{\mu x} + i\, e^{-\mu x}$ *pada cakram D(0,R). Maka* $|u| = \sqrt{e^{2\mu x} + e^{-2\mu x}} = \sqrt{2\cosh 2\mu x}$. *Dari sini bisa dihitung bahwa nilai maksimum* $|u|$ *akan dicapai di batas cakram, yaitu (-R,0) dan (R,0), dan nilai minimum* $|u|$ *akan dicapai disepanjang garis x=0 pada cakram D(0,R).*

Melihat kenyataan contoh 3 di atas, maka nilai minimum $|u|$ secara umum tidak terjadi di batas. Secara keseluruhan prinsip maksimum dan minimum fungsi panharmonik berbeda dengan prinsip maksimum dan minimum fungsi harmonik.

Daftar Pustaka

[1] E. Cahya, Panharmonics Functions (dalam persiapan publikasi).
[2] R.J. Duffin, Yukawa Potential Theory, J. Math. Anal. Appl. 35(1971).104-130.
[3] W. Setyabudhi, Fungsi Panharmonik di Cakram, MIHMI 6(2000). 119-124.
[4] S. Axler, P. Bourdon, W. Ramey, Harmonic Function Theory, Springer Verlag, New York, 1992.