

## Pendahuluan

Tulisan ini akan menaksir nilai fungsi panharmonik di suatu cakram. Karena penyajian fungsi panharmonik di cakram memiliki penyajian deret dari fungsi Bessel yang dimodifikasi jenis pertama, maka perlu adanya fungsi pembangkit yang masing-masing koefisiennya fungsi Bessel yang dimodifikasi jenis pertama. Untuk itu kajian awal akan dikemukakan bagaimana membangun sebuah fungsi pembangkit yang masing-masing koefisiennya fungsi Bessel tersebut. Untuk itu, tinjau definisi fungsi pembangkit berikut.

### Definisi 1

Jika  $\{f_n(x)\}$  sebuah barisan tak hingga dari fungsi-fungsi bernilai real dan jika  $\phi(x,t)$  sebuah fungsi dengan sifat bila diekspansi dalam suku-suku deret pangkat dari  $t$  dengan koefisien dari  $t^n$  adalah  $f_n(x)$ , maka  $\phi(x,t)$  disebut fungsi pembangkit untuk barisan fungsi  $\{f_n(x)\}$ .

Berdasarkan definisi di atas, akan dicari fungsi pembangkit yang dibangun oleh fungsi Bessel yang dimodifikasi. Untuk keperluan ini, misalkan

$$\phi(x,t) = e^{\frac{x}{t}\left(t+\frac{1}{t}\right)}.$$

Nyatakan  $e^{\frac{xt}{2}}$  sebagai deret pangkat dalam  $t$ , dan diperoleh

$$e^{\frac{xt}{2}} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(xt)^i}{i!2^i}.$$

Kemudian, nyatakan  $e^{\frac{x}{2t}}$  sebagai deret pangkat dalam  $x$ , dan diperoleh

$$e^{\frac{x}{2t}} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j t^{-j}}{j!2^j}.$$

Tinjau,

$$\begin{aligned}\phi(x,t) &= e^{\frac{x}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)} \\ &= e^{\frac{xt}{2}} e^{\frac{x}{2t}} \\ &= \left( \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(xt)^i}{i!2^i} \right) \left( \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j t^{-j}}{j!2^j} \right).\end{aligned}$$

Koefisien dari  $t^n$  diperoleh bila  $i=n+j$ , yaitu

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{n+j}}{(n+j)!2^{n+j}} \frac{x^j}{j!2^j} &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{n+2j}}{(n+j)!j!2^{n+2j}} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2j}}{(n+j)!j!} \\ &= I_n(x).\end{aligned}$$

Koefisien dari  $t^{-n}$  diperoleh bila  $j=n+i$ , yaitu

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{n+i}}{(n+i)!2^{n+i}} \frac{x^i}{i!2^i} &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{n+2i}}{(n+i)!i!2^{n+2i}} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2i}}{(n+i)!i!} \\ &= I_n(x).\end{aligned}$$

Akhirnya, diperoleh

$$\begin{aligned}\phi(x, t) &= e^{\frac{x}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)} \\ &= I_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} I_n(x)(t^n + t^{-n})\end{aligned}$$

Selanjutnya misalkan  $t = e^{i\varphi}$ , maka diperoleh

$$e^{x \cos \varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(x) \cos n\varphi. \quad (1)$$

Perhatikan ruas kanan dari persamaan di atas, fungsi tersebut merupakan ekspansi deret Fourier dari fungsi yang diperoleh disebelah kirinya, sehingga dapat dipandang sebagai

$$e^{x \cos \varphi} = \frac{a_0(x)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \cos n\varphi.$$

dengan

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} e^{x \cos \varphi} \cos n\varphi d\varphi, n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Tetapi  $a_n = 2I_n(x)$ , karena itu diperoleh

$$I_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{x \cos \varphi} \cos n\varphi d\varphi, n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2)$$

Khusus untuk  $n=0$ , diperoleh

$$I_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{x \cos \varphi} d\varphi.$$

Sekarang perhatikan kembali persamaan (1), dengan  $x = \mu r$  maka diperoleh

$$u(r, \varphi) = e^{\mu r \cos \varphi} = \sum_{-\infty}^{\infty} I_{|n|}(\mu r) e^{in\varphi}. \quad (3)$$

Persamaan (3) ini merupakan jawab persamaan Yukawa, dan  $\{I_{|n|}(\mu r) e^{in\varphi}\}$  basis

ruang jawab persamaan Yukawa di suatu cakram dengan pusat 0. Yang cukup

menarik, bila  $\varphi = 0$  maka kita punya  $e^x = \sum_{-\infty}^{\infty} I_{|n|}(x)$ . Karena  $e^{\mu x}$  merupakan jawab

persamaan Yukawa, maka  $\sum_{-\infty}^{\infty} I_{|n|}(\mu x)$  merupakan jawab persamaan Yukawa.

Berdasarkan fungsi pembangkit ini, dapat dibuktikan kembali beberapa sifat yang ada pada fungsi Bessel yang dimodifikasi jenis pertama.

### Sifat-sifat Fungsi Bessel yang Dimodifikasi Jenis Pertama

Dengan menggunakan formula  $I_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{x \cos \varphi} \cos n\varphi d\varphi, n = 0, 1, 2, 3, \dots$  dapat

ditunjukkan beberapa sifat berikut

$$1. \quad x(I_{n-1}(x) - I_{n+1}(x)) = 2nI_n(x)$$

$$2. \quad 2I'_n(x) = I_{n+1}(x) + I_{n-1}(x)$$

Dari hasil (1) dan (2) diperoleh  $\left(I_{n-1}(x) - \frac{n}{x} I_n(x)\right) = I'_n(x)$ , selanjutnya kalikan

$$\text{kedua ruas dengan } x^n \text{ diperoleh } x^n I_{n-1}(x) = nx^{n-1} I_n(x) + x^n I'_n(x) = \frac{d}{dx} (x^n I_n(x)).$$

Jadi diperoleh,

$$3. \quad \frac{d}{dx} (x^n I_n(x)) = x^n I_{n-1}(x)$$

Selanjutnya perhatikan kembali (1) dan (2) di atas, kemudian eliminasi  $I_{n-1}(x)$

maka diperoleh  $nI_{n+1}(x) + nI_n(x) = xI'_n(x)$ . Kemudian kalikan kedua ruas

dengan  $x^{-n-1}$  maka diperoleh  $x^{-n} I_{n+1}(x) = -nx^{-n-1} I_n(x) + x^{-n} I'_n(x)$ . Darisini diperoleh,

$$4. \quad \frac{d}{dx} (x^{-n} I_n(x)) = x^{-n} I_{n+1}(x)$$

Dari hasil di atas, dapat dianalisa sifat kemonotonan fungsi Bessel yang dimodifikasi jenis pertama tersebut. Karena  $0 \leq x < a$ , maka  $I_n(x) \geq 0, \forall n$ , dan

$I_{n+1}(x) + \frac{n}{x} I_n(x) = I_n'(x) \geq 0$ . Ini mengatakan bahwa  $I_n$  fungsi naik monoton.

Selanjutnya akan dilihat kemonotonan barisan  $\{I_n(x)\}$ .

## Hasil Kajian Terhadap Fungsi Panharmonik

Fungsi panharmonik adalah fungsi yang merupakan solusi persamaan Yukawa

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \mu^2 u \quad (1)$$

dimana  $\mu$  konstanta positif.

Solusi persamaan (1) pada suatu cakram, telah dijelaskan Duffin dalam [1], dan Schiff & W.J. Walker dalam [2], yang dituliskan dalam teorma berikut ini.

**Teorema 2**

Jika  $u(r, \theta)$  panharmonik di cakram  $x^2 + y^2 \leq a^2$ , maka untuk  $0 \leq r < a$ ,

$$u(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n I_{|n|}(\mu r) e^{in\theta},$$

dimana  $c_n = \frac{1}{2\pi I_{|n|}(\mu a)} \int_0^{2\pi} u(a, \theta) e^{-in\theta} d\theta$ , dan

$$I_n(x) = \frac{1}{n!} \left( \frac{x}{2} \right)^n \left[ 1 + \frac{(x/2)^2}{1 \cdot (n+1)} + \frac{(x/2)^4}{1 \cdot 2 \cdot (n+1)(n+2)} + \frac{(x/2)^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (n+1)(n+2)(n+3)} + \dots \right]$$

Catatan:

Untuk masing-masing  $n$ ,  $I_{|n|}(\mu r) e^{in\theta}$  adalah sebuah solusi dan dalam hal khusus

$I_0(\mu r)$  adalah solusi positif lainnya.

Berikutnya hasil yang diperoleh melalui pemanfaatan fungsi pembangkit.

**Proposisi 3**

Misalkan  $u$  fungsi panharmonik positif di bidang dengan ekspansi Fourier

$$u(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n I_{|n|}(\mu r) e^{in\theta},$$

maka  $u(r, \theta) \leq c_0 e^{\mu r}$ .

**Bukti**