Estimasi Koefisien Fungsi Regular-μ
Dari kelas Fungsi Analitik Bieberbach-Eilemberg

Oleh
Endang Cahya M.A
Jurusan Matematika FPMIPA UPI

Abstrak

Tulisan ini menjelaskan tentang estimasi koefisien fungsi regular-μ yang dideretkan, sebagai fungsi yang dibangun dari fungsi univalen pada cakram satuan, dengan f(0)=0 dan f'(0)=1. Estimasi dibahas adalah selisih modulus koefisien dua suku berurutan yang berindeks negatif. Estimasi ini menggunakan hasil Grinspan (1978) sebagai hasil modifikasi sebelumnya, seperti hasil Hayman (1963), Milin (1968) dan Hina (1968). Selain itu, dengan memanfaatkan hasil Roginski, Nehari dan Aharonov (1970), dibahas pula estimasi modulus selisih dua koefisien yang berbeda tanda dari fungsi regular-μ yang dibangun dari kelas fungsi Bieberbach-Eilemberg.

Pendahuluan

Fungsi bernilai kompleks $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ yang memenuhi syarat Cauchy-Riemann diperumum (C-R-u) : $u_x = v_y + \mu u$, $u_y = -v_x - \mu v$, dikenal sebagai fungsi regular-μ (analitik semu). Fungsi regular-μ dapat dipandang sebagai perumuman fungsi analitik, karena fungsi analitik merupakan kasus khusus dari fungsi regular-μ, yaitu dalam hal μ = 0. Untuk menguji keregularan-μ dan keanalitikan suatu fungsi, dapat digunakan uji operator diferensial $L = \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}$. Fungsi *f* disebut regular-μ jika berlaku $Lf = \mu \overline{f}$, dan untuk keanalitikan digunakan uji $Lf = 0$. Ini memberikan arti bahwa fungsi analitik merupakan fungsi yang hanya bergantung pada variabel *z*. Sedangkan untuk fungsi regular-μ, tidak demikain. Ini berakibat, penyajian fungsi analitik dalam bentuk deret kuasa hanya bergantung pada *z*, akan tetapi tidak demikian untuk fungsi fungsi regular-μ.

Schiff dan Walker dalam [4] membangun sebuah fungsi regular-μ dari sebuah fungsi analitik yang dideretkan. Hasil tersebut diformulasikan dalam teorema berikut.

Teorema 1

Misalkan $f(z)$ fungsi regular-μ pada cakram $|z| \leq a,$ maka untuk $|z| < a,$

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} a_n z^n \psi_n(\mu r) + \sum_{0}^{\infty} \bar{a}_n \frac{\mu}{2(n+1)} \overline{z^{n+1}} \psi_{n+1}(\mu r)$$

dimana

$$a_n = \frac{1}{2\pi a^n \psi_n(\mu a)} \int_{0}^{2\pi} e^{-in\theta} f(ae^{i\theta})$$

□

Bukti lihat [4].

Kebalikan teorema di atas, dibuktikan dalam teorema berikut.

Teorema 2

Misalkan $f(z) = \sum_{0}^{\infty} a_n z^n \psi_n(\mu r) + \sum_{0}^{\infty} \bar{a}_n \frac{\mu}{2(n+1)} \overline{z^{n+1}} \psi_{n+1}(\mu r)$

konvergen seragam pada cakram $|z| < r < a,$ maka f regular-μ pada $|z| < a.$

Bukti

Untuk membuktikannya diperlukan kesamaan

$$\psi_n(x) = \psi_{n+1}(x) + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{(n+1)(n+2)} \psi_{n+2}(x),$$

dan selanjutnya tunjukkan $Lf = \mu \bar{f}$.□

Akibat 3

Jika $f(z) = \sum_{0}^{\infty} a_n z_n$ analitik pada $|z| < a$ maka fungsi

$$F_f(z) = \sum_{0}^{\infty} a_n z^n \psi_n(\mu r) + \sum_{0}^{\infty} \bar{a}_n \frac{\mu}{2(n+1)} \overline{z^{n+1}} \psi_{n+1}(\mu r)$$

regular-μ pada $|z| < a.$

Selanjutnya, untuk memudahkan penulisan, fungsi regular-μ di atas ditulis dalam bentuk

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} a_n z^n \psi_n(\mu r) + \sum_{1}^{\infty} a_{-n} \overline{z^n} \psi_n(\mu r)$$

dimana

$$a_{-n-1} = \frac{\mu}{2(\mathrm{n}+1)} \overline{a_n} \quad , n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Akibat di atas mengatakan bahwa ada pemetaan dari ruang fungsi analitik ke dalam ruang fungsi regular-μ.

Estimasi Koefisien Fungsi Regular-μ yang Dibangun dari kelas Fungsi Bieberbach

Misalkan *A(D*) ruang fungsi analitik pada cakram satuan *D*, dan $A_\mu(D)$ ruang fungsi regular-μ pada cakram satuan *D*. Definisikan pemetaan

$$\begin{aligned} T \quad &: A(D) \to A_\mu(D) \\ f \quad &\mapsto F_f \end{aligned}$$

Dapat diperiksa bahwa *T* merupakan isomorpisma ruang vektor atas real ke dalam $A_\mu(D)$. Selanjutnya perhatikan kelas fungsi analitik univalen pada *D*, dengan *f(0)=0* dan *f'(0)=1* yang dinotasikan oleh $S \subset A(D)$, dan $S_\mu = T(S) \subset A_\mu(D)$. Kelas fungsi ini biasa disebut kelas fungsi Bieberbach. Hasil Bieberbach yang telah dibuktikan Louis de Brange [1] terhadap kelas fungsi *S* diperoleh $|a_n| \le n.$ Goluzin (1949) dan Jenkin (1959) dalam [3], memberikan estimasi bahwa untuk sembarang $f \in S$, maka berlaku $-1 \le |a_3| - |a_2| \le 1.029...$ Akhirnya Grinspan (1976) dalam [3] memodifikasi hasil Hayman (1963) , Milin (1968), dan Hina (1968), dalam [3] dengan estimasi $-2.97 \le |a_{n+1}| - |a_n| \le 3.61, n = 1, 2, 3, \ldots$

Selanjutnya melalui pemetaan di atas, diestimasi koefisien-koefisien fungsi regular-μ yang dibangun dari kelas fungsi Bieberbach, dan diperoleh hasil berikut.

Akibat 4.

Jika $$f(z)=\sum_{0}^{\infty} a_n z^n \psi_n(\mu r)+\sum_{1}^{\infty} a_{-n}\overline{z^n}\psi_n(\mu r)\in S_\mu,$$

maka

$$\frac{-\mu}{2}\le 4|a_{-4}| - 3|a_{-3}|\le 0.50145\mu.$$

Bukti

Dengan menggunakan kesamaan koefisien dari deret,

$$a_{-n-1}=\frac{\mu}{2(\mathrm{n}+1)}\overline{a_n},$$

kita peroleh

$$4|a_{-4}| - 3|a_{-3}| = 4\left|\frac{\mu}{8}\overline{a_3}\right| - 3\left|\frac{\mu}{6}\overline{a_2}\right| = \frac{\mu}{2}\left(|a_3| - |a_2|\right).$$

Selanjutnya gunakan hasil Goluzin dan Jenkin. □

Akibat 5.

Jika $$f(z)=\sum_{0}^{\infty} a_n z^n \psi_n(\mu r)+\sum_{1}^{\infty} a_{-n}\overline{z^n}\psi_n(\mu r)\in S_\mu,$$

maka

$$-1.4985\mu\le (n+1)|a_{-(n+1)}| - n|a_{-n}|\le 1.085\mu, n=1,2,3,...$$

Bukti

Dengan menggunakan kesamaan koefisien deret,

$$a_{-n}=\frac{\mu}{2n}\overline{a_{n-1}},$$

kita peroleh

$$(n+1)|\mathrm{a}_{-(n+1)}| - n|a_{-n}| = \left|\frac{\mu}{2}\overline{a_n}\right| - \left|\frac{\mu}{2}\overline{a_{n-1}}\right| = \frac{\mu}{2}\left(|a_n| - |a_{n-1}|\right), n=2,3,4,...$$

Selanjutnya gunakan hasil Grinspan, diperoleh

$$-1.4985\mu\le (n+1)|a_{-(n+1)}| - n|a_{-n}|\le 1.805\mu, n=2,3,4,...$$

Tetapi, karena untuk *n = 1* kita punya $2|a_{-2}| - |a_{-1}| = 2|a_{-2}| = \frac{\mu}{2}\le 1.085\mu.$

Jadi diperoleh $-1.4985\mu\le (n+1)|a_{-(n+1)}| - n|a_{-n}|\le 1.805\mu, n=1,2,3,4,...$ □

Estimasi Koefisien Fungsi Regular-μ yang Dibangun dari kelas Fungsi Bieberbach-Eilemberg

Kelas fungsi Bieberbach-Eilemberg adalah kelas fungsi analitik yang dapat ditulis dalam bentuk

$$f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots$$

dimana $f(z)\,f(\varsigma) \neq 1$ untuk tiap pasang z dan ς di dalam suatu cakram satuan *D*.

Kelas fungsi ini biasa dinotasikan oleh *B*, dan fungsi regular-μ yang dibangun dari kelas fungsi ini biasa dinotasikan oleh B_μ. Roginski dalam [3] menunjukkan bahwa untuk sembarang fungdi di *B* berlaku $|a_n| \leq 1, \forall n.$ Tahun 1970, Aharonov dan nehari dalam [3] secara terpisah menunjukkan bahwa $\sum_1^\infty |a_n|^2 \leq 1.$

Melalui pemetaan dari kelas fungsi analitik ke kelas fungsi regular-μ, diestimasi koefisien-koefisien fungsi regular-μ yang dibangun dari kelas fungsi Bieberbach-Eilemberg, dan diperoleh hasil berikut.

Contoh

Perhatikan fungsi Koebe $f(z) = \dfrac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + 3z^3 + \ldots$di $S,$ pada cakram satuan $D(0,1)$.

Fungsi regular-μ yang dibangun dari fungsi Koebe adalah

$$F_f = \sum_0^\infty n z^n \Psi_n(\mu r) + \sum_1^\infty \frac{\mu(n-1)}{2n} \overline{z^n} \Psi_n(\mu r).$$

Akibat 6.

Jika
$$f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n \psi_n(\mu r) + \sum_1^\infty a_{-n} \overline{z^n} \psi_n(\mu r) \in B_\mu,$$

maka

$$|a_n - a_{-n}| \leq 1 + \frac{\mu}{2n}, \text{ n=1,2,3,...}$$

Bukti

$$\left|a_n - a_{-n}\right| \le \left|a_n\right| + \left|a_{-n}\right| = \left|a_n\right| + \left|\frac{\mu}{2n}\overline{a_{n-1}}\right| \le \left|a_n\right| + \frac{\mu}{2n}\left|a_{n-1}\right| \le 1 + \frac{\mu}{2n}. \square$$

Akibat 7

Jika $$f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n \psi_n(\mu r) + \sum_1^\infty a_{-n}\overline{z^n}\psi_n(\mu r) \in B_\mu,$$

maka

$$\sum_1^\infty \left|a_{-n}\right|^2 \le \frac{1}{6}\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)^2.$$

Bukti

$$\sum_1^\infty \left|a_{-n}\right|^2 = \sum_1^\infty \left(\frac{\mu}{2n}\right)^2 \left|\overline{a_{n-1}}\right|^2 \le \sum_1^\infty \left(\frac{\mu}{2n}\right)^2 \le \left(\frac{\mu}{2}\right)^2 \sum_1^\infty \left(\frac{1}{n}\right)^2 = \left(\frac{\mu}{2}\right)^2 \frac{\pi^2}{6} \square$$

Daftar Pustaka

[1] De Branges, L. (1985), A proof of the Bieberbach conjecture, *Acta Math*. **154**, 137-152.

[2] Duffin, R. J. (1971), Yukawan potential theory, *J. Math. Anal. Appl*. **35**, 104-130.

[3] Duren, P. L. (1983), *Univalent Functions*, Springer-Verlag, New York.

[4] Schiff, J.L., W.J. Walker (1990), A Bieberbach condition for a class of pseudo analytic functions, *J. Math. Anal. Appl*. **146** No. 2, 570-579.