FUNGSI μ REGULAR

Endang Cahya M.A[1]
Jurusan Matematika FMIPA ITB
Jl. Ganesa 10, Bandung, 40132-Indonesia

Abstrak

Tulisan ini membahas bagaimana mengkonstruksi sebuah fungsi μ Regular dari suatu fungsi panharmonik, dan bagaimana sifat integral kontur hasil kombinasi dari fungsi-fungsi μ Regular. Dijelaskan pula keterkaitan fungsi panharmonik dan fungsi μ Regular dalam suatu integral kontur, yang pada akhirnya menghasilkan representasi nilai fungsi μ Regular disatu titik bergantung pada nilai integral kontur dari suatu fungsi Bessel dan fungsi μ Regular. Hasil ini dilengkapi pula dengan represenatsi integral Cauchy untuk fungsi μ Regular.

PENDAHULUAN

Persamaan diferensial $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \mu^2 u$, dimana μ sebuah konstanta real positif, disebut persamaan Yukawa. Sebuah fungsi C^2 yang memenuhi persamaan Yukawa disebut fungsi panharmonik. Pada [2] dan [3], telah diberikan pengertian mengenai sebuah fungsi bernilai kompleks yang memenuhi sifat perumuman Cauchy-Riemann. Misalkan $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ sebuah fungsi bernilai kompleks, dengan *u* dan *v* memenuhi persamaan

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} + \mu u$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} - \mu v$$

maka *f* disebut fungsi μ regular. Dalam Colton, fungsi ini disebut juga fungsi analitik semu(pseudo-analytic), dan dapat ditunjutkkan bahwa fungsi *f* , *u* dan *v* masing-masing fungsi panharmonik. Untuk pengujian ke μ regularan suatu fungsi bernilai kompleks *f* di C^2 dapat digunakan $Lf(z) = \mu\overline{f(z)}$ dimana $L = \dfrac{\partial}{\partial x} + i\dfrac{\partial}{\partial y}$.

KONSTRUKSI FUNGSI μ REGULAR

Melalui perumuman sifat Cauchy-Riemann, dapat dikonstruksi sebuah fungsi μ regular dari sebuah fungsi panharmonik real .

Teorema 1

Misalkan $\Omega \subseteq \Re^2$ daerah buka terhubung sederhana. Misalkan *u* sebuah fungsi panharmonik real pada Ω Maka terdapat fungsi μ regular pada Ω yang bagian realnya *u*. Juga terdapat fungsi μ regular pada Ω yang bagian imaginernya *u*.

Bukti

Harus ditunjukkan ada fungsi panharmonik *v* pada Ω sehingga $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ fungsi μ regular pada Ω . Untuk itu konstruksi

---

[1] Alamat tetap Jurusan Pendidikan Matematika FPMIPA UPI Bandung

$$v(x,y)=\int_a^y\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}-\mu u(x,t)\right)dt+\varphi(x),\ \text{dimana } \varphi(x) \text{ memenuhi } \frac{\partial\varphi}{\partial x}+\mu\varphi(x)+\frac{\partial u(x,a)}{\partial y}=0.$$

Dapat ditunjukkan *u* dan *v* memenuhi sifat perumuman Cauchy-Riemann. Untuk menunjukkan *v* panharmonik, diferensialkan *v* terhadap *y* dua kali. □

Melalui pengkonstruksian bagian real dan bagian imaginer untuk fungsi μ regular dari fungsi panharmonik, maka hasilnya tidak tunggal.

Teorema 2

Selisih dua buah fungsi μ regular yang memiliki bagian real yang sama adalah sebuah fungsi $c(x)=ike^{-\mu x}$ untuk suatu konstanta real *k*.

Bukti

Misalkan $f_1(z)=u(x,y)+iv_1(x,y)$ dan $f_2(z)=u(x,y)+iv_2(x,y)$ dua buah fungsi μ regular.

Dengan menggunakan sifat fungsi μ regular, diperoleh $v_1-v_2=c(x)$ dan $\dfrac{\partial c(x)}{\partial x}=-\mu c(x)$ □

Teorema 3

Selisih dua buah fungsi μ regular yang memiliki bagian imaginer yang sama adalah sebuah fungsi $c(x)=ke^{\mu x}$ untuk suatu konstanta real *k*.

Selain melalui perumuman Cauchy-Riemann, sebuah fungsi μ regular dapat pula dibangun oleh sebuah fungsi panharmonik melalui penggunaan operator *L*.

Lemma 4

Misalkan *u(z)* fungsi panharmonik maka $f(z)=\mu\overline{u(z)}+\bar{L}u(z)$ fungsi μ regular.

Bukti

$$Lf(z)=L\left(\mu\overline{u(z)}+\bar{L}u(z)\right)=\mu L\overline{u(z)}+\Delta u=\mu(L\overline{u(z)}+\mu u(z))=\mu\overline{f(z)}.\ \square$$

Lemma 5

Misalkan *u(z)* fungsi panharmonik maka $f(z)=i(-\mu\overline{u(z)}+\bar{L}u(z))$ fungsi μ regular.

INTEGRAL KONTUR FUNGSI μ REGULAR

Secara umum perkalian dua buah fungsi μ regular tak nol bukan fungsi μ regular. Untuk itu akan dilihat sifat integral kontur hasil kali dua buah fungsi μ regular, selisihnya dan integral kontur hasil kombinasi fungsi panharmonik dengan fungsi μ regular.

Lemma 6

Misalkan $\Omega\subseteq\Re^2$ daerah buka terhubung sederhana yang dibatasi oleh sebuah kurva tutup sederhana Γ. Misalkan $h(z)\in C^1(\Omega)$, dan $\mathrm{Re}(L(h(z)))=0$. Maka $\mathrm{Im}\int_\Gamma h(z)dz=0$.

Bukti

Misalkan $h(z)=u(x,y)+iv(x,y)\in C^1(\Omega)$, maka $Lh(z)=\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)+i\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)$.

Untuk $\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}}-\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{y}}=0,$ maka $\operatorname{Im}\int_{\Gamma} h(z)dz=\operatorname{Im}\int_{\Gamma}(u+iv)(dx+idy)=\int_{\Gamma} udy+vdx=\iint_{\Omega}\left(\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}}-\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{y}}\right)dxdy=0$

Lemma 7

Misalkan $\Omega \subseteq \Re^2$ daerah buka terhubung sederhana yang dibatasi oleh sebuah kurva tutup sederhana Γ. Misalkan $h(z)\in C^1(\Omega),$ dan $\operatorname{Im}(L(h(z)))=0.$ Maka $\operatorname{Re}\int_{\Gamma} h(z)dz=0.$

Bukti (serupa dengan bukti lemma 6).

Kedua Lemma tersebut di atas, akan digunakan dalam membuktikan terorema berikut ini.

Teorema 8

Misalkan $\Omega \subseteq \Re^2$ daerah buka terhubung sederhana yang dibatasi oleh sebuah kurva tutup sederhana Γ.

Misalkan *f* dan *g* masing-masing fungsi μ regular pada Ω. Maka $\int_{\Gamma} f(z)g(z)dz+\overline{\int_{\Gamma} f(z)g(z)dz}=0.$

Bukti

Misalkan $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ dan $g(z)=P(x,y)+iQ(x,y)$ masing-masing fungsi μ regular.

Maka $\operatorname{Im}L(f(z)g(z))=0.$ Berdasarkan lemma 7, $\operatorname{Re}\int_{\Gamma}\mathrm{f(z)g(z)dz}=0.$ Tetapi

$\operatorname{Re}\int_{\Gamma} f(z)g(z)dz=\operatorname{Re}\overline{\int_{\Gamma} f(z)g(z)dz}$ dan $\operatorname{Im}\int_{\Gamma} f(z)g(z)dz=-\operatorname{Im}\overline{\int_{\Gamma} f(z)g(z)dz}$. Akibatnya

$\int_{\Gamma} f(z)g(z)dz+\overline{\int_{\Gamma} f(z)g(z)dz}=0.$ □

Akibat teorema ini, jika $f=g$, maka $\int_{\Gamma} f^2(z)dz+\overline{\int_{\Gamma} f^2(z)dz}=0.$

Akibat 9

Misalkan *f* dan *g* dua buah fungsi μ regular pada Ω yang berbeda bagian imaginernya. Maka

$\int_{\Gamma}(f-g)(z)dz+\overline{\int_{\Gamma}(g-f)(z)dz}=0.$

Bukti

Berdasarkan teorema 2, *(f-g)(z)=ike*$^{-\mu x}$. Karena itu, Re*L(f-g)(z)=0.* Berdasarkan lemma 6,

$\operatorname{Im}\int_{\Gamma}(f-g)(z)dz=0.$ Akibatnya $\int_{\Gamma}(f-g)(z)dz+\overline{\int_{\Gamma}(g-f)(z)dz}=0.$ □

Akibat 10

Misalkan *f* dan *g* dua buah fungsi μ regular pada Ω yang berbeda bagian realnya. Maka

$\int_{\Gamma}(f-g)(z)dz+\overline{\int_{\Gamma}(g-f)(z)dz}=0.$

Bukti

Berdasarkan teorema 3, *(f-g)(z)=ke*$^{\mu x}$. Karena itu, Im *L(f-g)(z)=0.* Berdasarkan lemma 7,

$\operatorname{Re}\int_{\Gamma}(f-g)(z)dz=0.$ Akibatnya $\int_{\Gamma}(f-g)(z)dz+\overline{\int_{\Gamma}(f-g)(z)dz}=0.$ □

Selanjutnya akan dikemukakan kaitan fungsi panharmonik dan fungsi μ regular dalam suatu formula representasi integral kontur.

Teorema 11

Misalkan u(z) fungsi panharmonik dan *f(z)* fungsi μ regular pada $\Omega \subseteq \Re^2$. Maka

$$\int_\Gamma f(z)\bar{L}u(z)dz + \overline{\int_\Gamma \mu f(z)\overline{u(z)}dz} = 0.$$

Bukti

Berdasarkan lemma 4, $g(z) = \mu\overline{u(z)} + \bar{L}u(z)$ fungsi μ regular. Dan berdasarkan lemma 5,

$h(z) = i(-\mu\overline{u(z)} + \bar{L}u(z))$ juga fungsi. Selanjutnya, dengan menggunakan teorema 8, diperoleh

$\int_\Gamma f(z)g(z)dz$ dan $\int_\Gamma f(z)h(z)dz$ imaginer . Tulis $\int_\Gamma f(z)g(z)dz = P + Q$ dan $\int_\Gamma f(z)h(z)dz = -iP + iQ$

sehingga diperoleh $\bar{P} + Q = 0$. Karena itu, $\int_\Gamma f(z)\bar{L}\,u(z)dz + \overline{\int_\Gamma \mu f(z)\overline{u(z)}dz} = 0.$ □

Teorema 12

Misalkan $\Omega \subseteq \Re^2$ daerah buka terhubung sederhana, dan Γ sembarang lintasan tutup sederhana dalam Ω. Misalkan *f(z)* adalah fungsi μ regular pada Ω. Jika $r = |z-a|$ maka

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{a-z}\mu r K_0^1(\mu r)dz + \frac{1}{2\pi i}\overline{\int_\Gamma f(z)\mu K_0(\mu r)dz}$$

asalkan a di dalam Γ. Jika a di luar Γ. maka ruas kanan nol.

Bukti

Misalkan a di luar Γ, maka dengan menggunakan teorema 8, khusus untuk $u(z)=K_0(\mu r)$, dan $a=x_0+iy_0$ maka dapat diperoleh

$$\bar{L}K_0(\mu r) = \frac{\mu r K_0'(\mu r)}{z-a} \text{ dan } 0 = \overline{\int_\Gamma \mu f(z)\overline{K_0(\mu r)}dz} + \int_\Gamma \frac{f(z)\mu r K_0'(\mu r)}{z-a}dz.$$

Misalkan a di dalam Γ, maka buat lingkaran γ berjari-jari ε sehingga a diluar kontur $\Gamma\,\varepsilon = \Gamma - \gamma$. Karena itu kita punya

$$0 = \overline{\int_{\Gamma_\varepsilon} \mu f(z)\overline{K_0(\mu r)}dz} + \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{f(z)\mu r K_0'(\mu r)}{z-a}dz.$$

$$= \overline{\int_\Gamma \mu f(z)\overline{K_0(\mu r)}dz} + \int_\Gamma \frac{f(z)\mu r K_0'(\mu r)}{z-a}dz. + \overline{\int_\gamma \mu f(z)\overline{K_0(\mu r)}dz} + \int_\gamma \frac{f(z)\mu r K_0'(\mu r)}{z-a}dz.$$

Tetapi $K_0(x) \approx \log\frac{1}{x}$ dan $K_0'(x) \approx -\frac{1}{x}$ untuk $x \to 0^+$. Akibatnya

$$\int_\gamma \frac{f(z)\mu r K_0'(\mu r)}{z-a}dz. \to \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}dz \to 2\pi i f(a) \text{ dan } \int_\gamma \mu f(z)\overline{K_0(\mu r)}dz \to 0 \text{ untuk } \varepsilon \to 0.$$

Karena itu, $2\pi i f(a) = \int_\Gamma \frac{f(z)}{a-z}\mu r K_0^1(\mu r)dz + \overline{\int_\Gamma f(z)\mu K_0(\mu r)dz}.$ □

FORMULA INTEGRAL CAUCHY UNTUK FUNGSI μ REGULAR

Untuk melihat formula integral Cauchy fungsi μ regular, akan digunakan formula integral Cauchy untuk fungsi yang tidak analitik.

Lemma 13
Misalkan Ω himpunan buka di C, D subhimpunan buka yang relatif kompak di Ω dengan batas C^1 bagian demi bagian. Misalkan *f* fungsi C^1 di Ω . Kemudian, untuk setiap $\xi \in D$ berlaku

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(z)}{z-\xi}dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{D}\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z)\frac{dz\Lambda d\bar{z}}{z-\xi}.$$

Bukti (Lihat [4] dan [5]).

Teorema 14
Misalkan Ω himpunan buka di C, D subhimpunan buka yang relatif kompak di Ω dengan batas C^1 bagian demi bagian. Misalkan *f* fungsi μ regular di Ω . Kemudian, untuk setiap $\xi \in D$ berlaku

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(z)}{z-\xi}dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{D}\frac{1}{2}\mu\overline{f(z)}\frac{dz\Lambda d\bar{z}}{z-\xi}.$$

Bukti
Karena *f* fungsi μ regular tidak analitik, tetapi ada di C^2, maka *f* juga di C^1. Selanjutnya gunakan lemma 13, dan $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(z) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right) = \frac{1}{2}\mu[u - iv] = \frac{1}{2}\mu\overline{f(z)}.$ □

Ucapan Terimakasih
Ucapan terimakasih kepada Bapak Wono Setya Budhi atas bimbingannya, dan Bapak Hendra Gunawan, Bapak Moedomo atas segala saran dan kritiknya.

Daftar Pustaka

1. D.L.Colton, *Analytic Theory of Partial Differential Equations,* Pitman, New York, 1980.
2. R.J. Duffin, *Yukawan Potential theory*, J. Math. Anal. Appl.**35**,104-130, 1971.
3. J.L. Schiff and W.J. Walker, *A Bieberbach Condition for a Class of Pseudo-analytic Functions,* J. Math. Anal. Appl. **146**, 570-679, 1990.
4. Serge Lang, *Complex Analysis,* Springer Verlag, Third Ed., New York, 1989.
5. Wono. S.B., *Perumuman Teorema Hampiran Runge,* Makalah, Mat. ITB, Bandung, 1998.