BAB I

PENDAHULUAN

1. Latar Belakang Masalah

Pandang persamaan diferensial

$$\Delta u = \lambda u \quad (1)$$

dimana λ parameter. Persamaan di atas dapat dipandang sebagai masalah nilai eigen untuk operator Laplace, dan persamaan tersebut merupakan persamaan yang homogen, sehingga secara umum, persamaan (1) selalu memiliki solusi yang trivial. Akan tetapi, untuk nilai λ tertentu mungkin persamaan tersebut memiliki solusi tak trivial. Sebuah nilai eigen dari (1) adalah nilai λ demikian sehingga terdapat solusi tak trivial u_λ di C^2 , dan solusi u_λ biasa disebut fungsi eigen.

Masalah menarik yang terkait dengan masalah nilai eigen adalah masalah yang muncul sebagai persamaan Yukawa,

$$\Delta u = \mu^2 u \quad (2)$$

dimana μ konstanta positif. Persamaan ini pertama kali dikemukakan oleh Hideki Yukawa, ahli fisika Jepang, untuk menggambarkan potensial nuklir dari sebuah titik sumber seperti $e^{-\mu r} / r$. Hasil distribusi sumber ini kemudian memenuhi persamaan Yukawa dalam ruang berdimensi tiga. Teori potensial Yukawa ini selanjutnya dikembangkan oleh Duffin tahun 1971. Berdasarkan pemantauan terhadap journal yang melibatkan persamaan Yukawa, tulisan terakhir dikembangkan oleh J.L. Schiff dan W.J. Walker tahun 1990.

Misal u sebuah fungsi di C^2 memenuhi persamaan Yukawa

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \mu^2 u \quad (3)$$

dimana μ konstanta positif. Fungsi u disebut panharmonik di sebuah titik (x,y)

jika u memiliki turunan parsial kedua yang kontinu dan memenuhi persamaan (3) dalam suatu lingkungan titik (x,y) tersebut. Fungsi u dikatakan panharmonik dalam sebuah daerah tertutup jika u kontinu pada batas dan panharmonik di interiornya.

Seperti halnya fungsi harmonik, fungsi panharmonik berbentuk kompleks ada yang memiliki sifat memenuhi perluasan persamaan Cauchy-Riemann untuk persamaan Yukawa. Sifat khusus yang dimiliki fungsi panharmonik ini memberikan gagasan kepada kita untuk mengembangkan lebih jauh tentang teori fungsi panharmonik, seperti yang telah dilakukan dalam pengembangan teori fungsi harmonik. Dengan demikian, langkah-langkah pengembangan teori fungsi harmonik dapat diikuti untuk pengembangan teori fungsi panharmonik di ruang kompleks, sehingga pada akhirnya akan diperoleh teori potensial Yukawa.

Fungsi panharmonik bentuk kompleks yang memenuhi perluasan persamaan Cauchy-Riemann selanjutnya disebut fungsi μ -regular. Fungsi μ -regular termasuk kedalam kelas fungsi pseudo analitik (analitik semu). Akhirnya, pengembangan fungsi μ -regular ini dapat pula dikaitkan dengan teori fungsi pseudo analitik umum yang dikembangkan Bers, Vekua, dan lainnya dalam [1]. Bila dikaitkan dengan teori fungsi pseudo analitik umum, fungsi μ -regular termasuk fungsi pseudo analitik yang paling sederhana dan memiliki sifat yang khusus.

2. Perumusan Masalah

Seperti telah dijelaskan di atas, bahwa kajian terhadap fungsi panharmonik baik dalam bentuk real maupun bentuk kompleks bisa mencontoh/mengikuti cara pengkajian terhadap fungsi harmonik, artinya sifat-sifat yang berlaku pada fungsi harmonik mungkin dapat pula diidentifikasi keberlakuannya untuk fungsi panharmonik atau fungsi μ -regular.

Berdasarkan uraian tersebut di atas, dalam proposal ini, diajukan permasalahan, yang dirumuskan sebagai berikut :

Sifat-sifat apa saja yang dimiliki oleh fungsi panharmonik bernilai real dan kompleks atau fungsi μ -regular dikaitkan dengan teori potensial yang telah ada.

Rumusan masalah tersebut di atas akan dijabarkan kedalam sub-sub masalah kecil, berikut:

- Bagaimana bentuk representasi integral fungsi panharmonik
- Sifat-sifat dasar apa yang dimiliki fungsi panharmonik bernilai real dan kompleks
- Sifat apa saja yang dimiliki oleh fungsi μ -regular.

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

1. Teori Pendukung Dan Hasil Penelitian terdahulu

Pandang kembali persamaan Yukawa

$$\Delta u = \mu^2 u \quad (2)$$

dimana μ konstanta positif. Solusi persamaan (2) di ruang fungsi real disebut fungsi panharmonik dan dalam bentuk kompleks yang memenuhi perluasan Cauchy riemann disebut fungsi μ -regular. Solusi persamaan (2) di R^2 dikemukakan oleh R.J. Duffin, 1971 dalam [3] yang dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 1

Jika $u(r, \theta)$ panharmonik dalam cakram $x^2 + y^2 \leq a^2$, maka untuk $0 \leq r < a$,

$$u(r, \theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n I_{|n|}(\mu r) e^{in\theta} \quad (4)$$

dimana

$$c_n = \frac{1}{2\pi I_{|n|}(\mu a)} \int_0^{2\pi} u(a, \theta) e^{-in\theta} d\theta$$

dan I_n menyatakan fungsi Bessel jenis pertama yang dimodifikasi, yaitu

$$I_n(x) = \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n \left[1 + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{1 \cdot (n+1)} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{1 \cdot 2 \cdot (n+1)(n+2)} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (n+1)(n+2)(n+3)} + \dots \right]$$

Untuk masing-masing n , $I_{|n|}(\mu r) e^{in\theta}$ juga merupakan solusi.

Hasil kerja J.L. Schiff & N.J. Walker, 1990 dalam [2], mengenai hampiran untuk koefisien dari deret pada persamaan (4), dan koefisien pada deret ekspansi Fourier sinus sebagai hasil penggunaan prinsip refleksi, dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 2

Misal u fungsi panharmonik positif dalam bidang dengan ekspansi Fourier

$$u(r, \theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n I_{|n|}(\mu r) e^{in\theta} \quad (4)$$

dimana

$$c_n = \frac{1}{2\pi I_{|n|}(\mu a)} \int_0^{2\pi} u(a, \theta) e^{-in\theta} d\theta$$

Maka untuk semua $n \neq 0$, $|c_n| \leq c_0$.

Teorema 3

Misal u panharmonik dan positif pada setengah bidang atas dan nol pada sumbu real dengan ekspansi

$$u(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n I_n(\mu r) \sin n\theta$$

Maka untuk semua $n > 1$, $|b_n| \leq nb_1$.

Selanjutnya, hubungan antara fungsi pseudo analitik yang memiliki bagian real dan bagian imajiner berbentuk fungsi panharmonik dengan fungsi panharmonik bentuk kompleks (fungsi μ -regular) dijembatani oleh perluasan persamaan Cauchy-Riemann.

Hasil Duffin (1971) dalam "Teori Potensial Yukawa" :

Misal $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ fungsi bernilai kompleks dengan u, v di C^2 , dan misalkan u dan v memenuhi persamaan

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \mu u \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x} - \mu v \end{aligned} \quad (5)$$

Persamaan ini merupakan perluasan persamaan Cauchy Riemann untuk persamaan (3), dan fungsi f yang memenuhi syarat di atas disebut fungsi μ -regular. Jika $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ fungsi μ -regular maka u dan v keduanya

panharmonik. Schiff dan Walker menguji ke μ -regularan suatu fungsi f di C^2 , dengan menggunakan syarat $Lf = \mu \bar{f}$ dimana $L = \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y}$. Demikian pula jika kita punya fungsi u panharmonik, maka dapat ditunjukkan bahwa fungsi $f = \mu u + \overline{Lu}$ adalah fungsi μ -regular.

2. Tujuan Penelitian Dan Manfaat Penelitian

Tujuan utama dari pengajuan permasalahan yang telah dikemukakan di atas adalah menjajagi lebih jauh sifat-sifat fungsi panharmonik atau fungsi μ -regular dan keterkaitannya dengan fungsi harmonik, dengan harapan dapat memberikan sumbang pikiran terhadap perkembangan teori fungsi panharmonik atau fungsi μ -regular sehingga dapat melengkapi teori yang telah ada. Permasalahan yang akan dikaji tidak terbatas hanya pada masalah yang telah dikemukakan di atas, tetapi tidak menutup kemungkinan mencakup masalah yang lebih luas.

Hasil penelitian ini dapat memberikan informasi yang lebih luas mengenai sifat-sifat fungsi panharmonik sebagai solusi persamaan yukawa. Informasi ini akan bermanfaat bagi mereka yang berkecimpung dalam terapan, terutama bagi mereka yang bergelut dengan teori potensial, khususnya potensial yukawa, dalam pengembangan Ipteks.

3. Metoda Penelitian

Pengkajian mengenai sifat-sifat apa saja yang berlaku pada fungsi panharmonik/ fungsi μ -regular, akan dicoba melalui proses generalisasi dari sifat fungsi harmonik ke fungsi panharmonik. Selanjutnya, akan dikaji perubahan apa yang terjadi dari bentuk fungsi harmonik ke bentuk fungsi panharmonik. Dengan demikian, metoda penelitian yang dipakai adalah studi literatur.

BAB IV**KESIMPULAN DAN SARAN****1. Kesimpulan**

Terdapat beberapa sifat hasil kajian terhadap fungsi panharmonik dan fungsi μ regular, diantaranya :

Representasi Integral Fungsi Panharmonik

Representasi integral fungsi panharmonik yang telah dikembangkan Duffin, dapat dinyatakan kembali dalam bentuk representasi integral lipat. Selanjutnya karena sebarang turunan partial fungsi panharmonik juga panharmonik, maka turunan partial dan mutlak gradien dari fungsi panharmonik di pusat cakram dapat diaproksimasi melalui perhitungan representasi integral tadi. Selain itu dapat pula diturunkan nilai representasi integral fungsi panharmonik pada suatu annulus melalui penggunaan deret Fourier dan penyelesaian persamaan Bessel.

Prinsip Maksimum dan Minimum

Prinsip Maksimum dan Minimum untuk fungsi panharmonik hanya berlaku terhadap fungsi panharmonik positif atau negatif saja. Sebagai akibat dari prinsip tersebut dan mengingat tidak ada fungsi panharmonik yang konstan selain fungsi nol, maka fungsi panharmonik yang mencapai maksimum atau minimum tidak pada daerah batas, haruslah fungsi nol.

Aproksimasi

Melalui fungsi pembangkit, fungsi Bessel dapat direpresentasikan dalam bentuk fungsi eksponen. Hal ini berakibat, nilai fungsi panharmonik di batas cakram dapat diaproksimasi oleh nilai dari fungsi Bessel pada batas cakram. Hasil tersebut hanya dapat digunakan untuk fungsi panharmonik tak negatif dan fungsi panharmonik tak positif.

Prinsip Korespondensi

Melalui prinsip korespondensi satu-satu antara subkelas fungsi harmonik di $\mathbb{R}^3$ dengan subkelas fungsi panharmonik di $\mathbb{R}^2$, dapat diperoleh bahwa :

- Jika u_n barisan fungsi panharmonik yang konvergen seragam ke suatu fungsi u pada suatu himpunan kompak, maka dapat ditunjukkan bahwa u juga panharmonik.
- Barisan fungsi panharmonik yang terbatas seragam pada suatu domain terbatas, memiliki sub barisan yang konvergen seragam ke suatu fungsi yang panharmonik.
- Jika barisan fungsi panharmonik konvergen dalam rata-rata pada suatu himpunan kompak, maka barisan fungsi panharmonik tersebut juga konvergen seragam.

Grup Simetri Persamaan Yukawa

Melalui prosedur perhitungan untuk mencari group simetri persamaan Yukawa, dihasilkan bahwa jika $u = f(x,y)$ solusi persamaan Yukawa, maka

$$u_1 = f(x - \varepsilon, y)$$

$$u_2 = f(x, y - \varepsilon)$$

$$u_3 = e^{2\varepsilon} f(e^{-\varepsilon} x, e^{-\varepsilon} y) \quad \text{ju}$$

$$u_4 = f\left(\frac{x - \varepsilon y}{1 + \varepsilon^2}, \frac{y + \varepsilon x}{1 + \varepsilon^2}\right)$$

$u_\alpha = \alpha(x, y)\varepsilon + f(x, y)$, dimana ε parameter dan α sembarang solusi pers. Yukawa, ga solusi persamaan Yukawa.

Estimasi Koefisien fungsi μ Regular melalui fungsi Univalen

Berdasarkan hasil Goluzin dan Jenkin mengenai aproksimasi selisih nilai mutlak suku ke-3 dan suku ke-2 dari koefisien barisan fungsi analitik, maka selisih nilai mutlak yang sama untuk fungsi panharmonik dapat ditentukan.

Berdasarkan hasil Grinspan mengenai aproksimasi selisih nilai mutlak koefisien suku sebelumnya dan berikutnya dari koefisien barisan fungsi harmonik, maka selisih nilai mutlak yang sama untuk fungsi panharmonik dapat ditentukan.

2. Saran

Masalah penelitian terhadap fungsi panharmonik masih terbuka, dan bisa meniru sifat-sifat yang sudah berlaku pada fungsi harmonik. Begitu pula untuk fungsi μ regular dapat mencontoh dari fungsi analitik.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Axler S, Bourdon P, Ramey W, "Harmonic Function Theory", Springer Verlag, New York, 1992.
- [2] E. Cahya, "Panharmonic Functions", JMS. 4.(1999), 94-99.
- [3] E. Cahya, "Prinsip Maksimum dan Minimum Fungsi Panharmonik", J. Math. Anal, UGM Yogya (dalam proses)
- [4] Kellog, "Foundations of Potential Theory", Unger, New York, 1929.
- [5] L.Bers, "*An outline of the theory of pseudoanalytic functions*", Bull.Amer. Math.Soc. 62 (1956), 291-331.
- [6] J.L. Schiff & W.J.Walker, "*A Bieberbach Condition for a class of Pseudo-Analytic Functions*", J.Math.Anal.Appl.146(1990), 570-579.
- [7] L.De Branges, "*A proof of the Bieberbach Conjecture*", Acta.Math. 154 (1985), 137-152.
- [8] P.J.Olver, "*Applications of Lie Groups to Differential*", Springer-Verlag, 1986, New York.
- [9] P.L Duren, "Univalent Functions", Springer Verlag, 1983. New York.
- [10] R.J.Duffin, "*Yukawan Potential Theory*", J.Math.Anal.Appl.35(1971), 104-130.
- [11] W. Setyabudhi, "Fungsi Panharmonik di Cakram", MIHMI 6(2000). 119-124.

Lampiran

Personalia Penelitian

1. Ketua Peneliti

- Nama : Drs. Endang Cahya MA, M.Si
- Gol Pangkat, NIP : 3d /131873716
- Jabatan Fungsional : Lektor
- Jabatan Struktural : Penata
- Fakultas /Program Studi : FPMIPA/Matematika
- Perguruan Tinggi : UPI
- Bidang Keahlian : Matematika

2. Anggota Peneliti

- Nama : Drs. Rizky Rosjanuardi, M.Si
- Gol Pangkat, NIP : 3a /132052373
- Jabatan Fungsional : Asisten Ahli Madya
- Jabatan Struktural : Penata Muda
- Fakultas /Program Studi : FPMIPA/Matematika
- Perguruan Tinggi : UPI
- Bidang Keahlian : Matematika

Lampiran

Curriculum Vitae

1. N a m a : Drs. Endang Cahya M.A.,M.Si.
 Alamat : Bukit Cipageran Indah B-7 Cimahi
 Pendidikan Profesional : -S1 Mat. IKIP Bandung tahun 1989.
 -S2 Mat ITB Bandung tahun 1995.

Riwayat Pekerjaan

1. Pengajar Matematika SMA tahun 1987 s/d 1992.
2. Tenaga Pengajar Matematika IKIP Bandung /UPI tahun 1990 sampai sekarang.
3. Dosen matematika luar biasa di ITB tahun 1994 sampai sekarang.

Pengalaman Penelitian

1. Grup simetri persamaan diferensial, 1995, Tesis, ITB.
2. Grup simetri persamaan KdV koefisien sembarang, 1996, IKIP
3. Grup simetri persamaan KdV yang diperumum, 1997, BBI, Dikti.
4. Analisis terhadap kemampuan guru-guru matematika SMP dalam menguasai konsep-konsep dasar matematika sekolah, 1998, BBI, Dikti, (Ketua).

2. N a m a : Drs. Rizky Rosjanuardi, M.Si.
 Alamat : Jl. Saturnus Barat I no 8 Bandung.
 Pendidikan Profesional : -S1 Mat. IKIP Bandung tahun 1992.
 -S2 Mat ITB Bandung tahun 1998.

Riwayat Pekerjaan

1. Pengajar Matematika ITENAS 1997
2. Tenaga Pengajar Matematika IKIP Bandung/UPI tahun 1992 sampai sekarang.
3. Dosen matematika luar biasa di ITB tahun 1998 sampai sekarang.

Pengalaman Penelitian

1. Kriteria Osilasi PD Tak Linier Orde Dua, 1998, Tesis, ITB.

LAPORAN PENELITIAN
ANALISIS TERHADAP FUNGSI PANHARMONIK
DALAM TEORI POTENSIAL YUKAWA

Tim Peneliti

DRS. ENDANG CAHYA M.A,M.Si.

DRS. RIZKY ROSJANUARDI, M. Si

Dibiayai Oleh Proyek Peningkatan Sumber Daya Manusia Dirjen Dikti
Departemen Pendidikan Nasional Tahun Anggaran 2002
Perjanjian Pelaksanaan Penelitian Nomor : 016/LIT/BPPK-SDM/IV/2002

**FAKULTAS PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS PENDIDIKAN INDONESIA
BANDUNG
2002**