RUANG BARISAN MUSIELAK-ORLICZ

Oleh:

Encum Sumiaty dan Yedi Kurniadi

Disampaikan pada Seminar Nasional Matematika
Pada tanggal 8 Desember 2008, di Jurusan Pendidikan Matemnatika
FPMIPA UPI

JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS PENDIDIKAN INDONESIA
BANDUNG 2008

RUANG BARISAN MUSIELAK-ORLICZ

Oleh: Encum Sumiaty dan Yedi Kurniadi
Jurusan Pendidikan Matematika FPMIPA UPI
(Disampaikan pada Seminar Nasional Matematika, 8 Desember 2007, di Jurusan Pendidikan Matematika FPMIPA UPI)

Abstrak: Misalkan M adalah suatu operator (fungsional additive terbatas) yang memetakan field $Z^+ \times R$ ke field R. Secara umum tulisan ini bertujuan untuk membentuk ruang barisan baru, yaitu ruang barisan yang dibangun oleh fungsional additive terbatas M dari suatu ruang barisan ke ruang barisan real atau kompleks yang disebut ruang barisan Musielak-Orlicz, serta melihat hubungan antara sifat-sifat yang berlaku pada ruang barisan klasik dengan ruang barisan Musielak-Orlicz. Secara khusus bertujuan untuk menunjukkan kelineran ruang barisan Musielak-Orlicz dan menunjukkan bahwa ruang barisan tersebut merupakan ruang Frechet.

Kata Kunci: Fungsional additive terbatas, ruang barisan Musielak-Orlicz, ruang Frechet.

A. PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang Masalah

Suatu ruang barisan bilangan real atau kompleks atau biasa disebut ruang barisan klasik yang terdiri dari ruang barisan yang konvergen (c), ruang barisan yang konvergen ke 0 (c_0), ruang barisan terbatas (ℓ^∞), ruang barisan $\left(l^P = \left\{x = (x_k) : \sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^P < \infty, P \geq 1\right\}\right)$, ruang barisan bervariasi terbatas $\left(\mathrm{b}v = \left\{x = (x_k) : \sum_{k=1}^{\infty}|x_k - x_{k+1}|^P < \infty, P \geq 1\right\}\right)$, dan ruang barisan $\mathrm{b}\nu_0 = \mathrm{b}\nu \cap c_0$.

Kajian mengenai ruang barisan banyak dijumpai, khususnya mengenai ruang barisan klasik dan fungsional. Diantaranya ruang barisan ℓ^P merupakan ruang barisan klasik yang lengkap, dibahas oleh E. kreyzig [3], dan E. Sumiaty [4] berhasil menunjukkan bahwa ruang barisan fungsional dan ruang barisan operator pada suatu ruang Hilbert merupakan ruang barisan yang lengkap dan kompak. Temuan lainnya tentang ruang barisan yang dikemukakan L.P.Yee [9], L.P. Yee dan Peng-Nung [10], S.D Unoningsih dan Pluciennik [9], serta S.D. Unoningsih dan L.P. Yee [10].

Berkaitan dengan hal tersebut di atas, penulis tertarik untuk melakukan suatu kajian mengenai ruang barisan yang dibangun oleh fungsional additive terbatas T dari suatu ruang barisan ke ruang barisan real atau kompleks (yang disebut ruang barisan Musielak-Orlicz), dengan pengantar dasar operator superposisi dan fungsional additive terbatas, dan diberi judul **"RUANG BARISAN MUSIELAK-ORLICZ"**

1.2. Rumusan Masalah dan Batasan Masalah

Berdasarkan beberapa hasil temuan mengenai ruang barisan, khususnya pada ruang barisan klasik serta beberapa sifat yang berlaku pada ruang barisan klasik, maka yang menjadi masalah dalam penelitian ini adalah sifat apa saja yang berlaku pada ruang barisan klasik dengan ruang barisan baru, khususnya sifat-sifat apa saja yang berlaku pada ruang barisan Musielak-Orlicz. Secara khusus, penulis membatasi permasalahn penelitian mengenai ruang barisan Musielak-Orlicz hanya untuk mengkaji :

1. Kelinearan pada ruang barisan Musielak-Orlicz.
2. Norma yang mengakibatkan ruang barisan Musielak-Orlicz merupakan ruang Frechet.
3. Sifa-sifat lain yang berlaku pada ruang barisan Musielak-Orlicz.

Sedangkan untuk fungsional additive terbatas hanya untuk sifat dasar fungsional additive terbatas.

B. TEORI PENDUKUNG

2.1.Ruang metrik

Diberikan $S = \{\bar{x} \mid \bar{x} = (x_1, x_2, \ldots), x_i \in R, i = 1,2,\ldots..\}$. Himpunan S merupakan ruang linear atas field R, karena untuk setiap $x, y \in S$ dan sebarang $\alpha \in R$ memenuhi sifat tertutup, yaitu:

1. $x + y \in S$ dan
2. $\alpha x \in S$.

Ruang linear *S* disebut juga sebagai ruang vektor *S* atas field *R*. Selanjutnya, jika diberikan $X \subseteq S$, maka *X* sebagai subruang dari *S*.

Definisi 2.1:

Diberikan himpunan $X \neq \phi$, dan suatu fungsi *d* didefinisikan pada $X \times X$, sehingga untuk setiap $x, y, z \in X$ memenuhi:

(M1) *d* bernilai real, berhingga, dan jika $d(x, y) > 0$ maka $x \neq y$

(M2) $d(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$

(M3) $d(x, y) = d(y, x)$ (simetri)

(M4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (ketaksamaan segitiga).

d disebut metrik (fungsi jarak), dan himpunan *X* yang dilengkapi dengan matrik *d* dan dinotasikan dengan (*X*, *d*) atau *X* disebut ruang matrik.

Selanjutnya, untuk kekonvergenan barisan Cauchy yang hubungannya dengan kekelengkapan pada ruang metrik, didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.2:

Sebuah barisan (x_n) dalam ruang metrik *X* = (*X*, *d*) disebut barisan Cauchy, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada $K = K(\varepsilon) \in N$ sedemikian sehingga untuk setiap $m, n > K(\varepsilon)$ berlaku $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Misal (x_n) sebarang barisan Cauchy di *X*. Ruang metrik *X* disebut lengkap jika untuk setiap (x_n) ada $x \in X$ sedemikian sehingga (x_n) konvergen ke *x*.

2.2. Ruang Bernorma

Berikut ini akan dijelaskan tentang peranan metrik dalam ruang bernorma dan ruang Banach.

Definisi 2.3:

Diberikan ruang vektor *X*.

1. Sebuah norma pada ruang vektor *X* adalah fungsi bernilai real pada *X*, dinotasikan $\|\bullet\|$ sedemikian sehingga untuk setiap $x, y \in X$ dan $\alpha \in R$ memenuhi:
   (N1) $\|x\| \geq 0$, dan $\|x\| = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$.
   (N2) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$.
   (N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.
2. Sebuah metrik *d* pada *X* yang dibentuk oleh norma pada *X* didefinisikan oleh $d(x, y) = \|x - y\|$.
3. Ruang bernorma *X* adalah ruang vektor yang dilengkapi dengan metrik yang dibentuk oleh norma, dinotasikan oleh (*X*, ||•||). Sebuah ruang Banach adalah ruang bernorma yang lengkap.

2.3. Ruang Frechet

Dalam hubungannya dengan ruang bernorma yang sudah didefinisikan sebelumnya, berikut ini akan didefinisikan pula fungsi norma khusus pada suatu ruang barisan.

Definisi 2.4:

Diberikan ruang barisan *X*.

1. Fungsi norma ||•|| pada *X* disebut norma-*F*, jika untuk setiap $x, y \in X$ memenuhi:
   a. $\|x\| \geq 0$ dan $\|x\| = 0$ jika dan hanya jika $x = \theta$
   b. 1. jika $\alpha_n \to 0$ ($n \to \infty$), maka $\|\alpha_n x\| \to 0$ ($n \to \infty$)
      2. jika $\|x_n\| \to 0$ ($n \to \infty$), maka $\|\alpha x_n\| \to 0$ ($n \to \infty$), untuk setiap $\alpha \in R$
   c. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.
2. Ruang barisan *X* yang dilengkapi dengan norma-*F* disebut ruang bernorma–*F*.
3. Ruang Frechet atau ruang *F* adalah ruang bernorma-*F* yang lengkap.

Definisi 2.5:

Sebuah ruang Frechet *X* dari barisan real disebut memiliki sifat AK, jika *X* memuat semua barisan hingga dan $\|x^{N} - x\| \to 0$, $(N \to \infty)$.

Teorema 2.1:

Jika ruang Frechet *X* mempunyai sifat $\|x^{N}\| \leq \|x\|$, untuk setiap $x \in X$ maka *X* merupakan ruang FK.

Definisi 2.6:

Misal *X* sebuah ruang barisan bernorma-F. *X* disebut mempunyai GHP jika untuk sebarang barisan blok (z^{n}) dengan $\|z^{n}\| \to 0$ $(n \to \infty)$, ada subbarisan bilangan bulat positif {n(k)} sedemikian sehingga berlaku $\sum_{k=1}^{\infty} z^{n(k)} \in X$.

Berkaitan dengan definisi tersebut, untuk suatu ruang bernorma yang lengkap ternyata mempunyai GHP akan dibuktikan pada teorema berikut ini:

***Teorema 2.2*:**

Sebarang ruang bernorma lengkap mempunyai GHP

Teorema 2.3*:*(Pluciennik)

Diberikan sebarang ruang barisan *X*. *X* mempunyai GHP dan $\left\|x^{N}\right\| \leq \|x\|$, untuk setiap N. *Y* memenuhi $\sup_{N}\left\|y^{N}\right\| = \|y\|$, dan $P : X \rightarrow Y$ operator superposisi yang didefinisikan oleh $P(x) = P_{g}(x) = \left(g(k, x_{k})\right)_{k \geq 1} \in Y$, untuk setiap $x \in X$. Jika $g(k, \bullet)$ terbatas pada setiap interval terbatas (untuk setiap k), maka P terbatas lokal pada 0.

***Teorema 2.4*:**

Diberikan sebarang ruang barisan *X*. *X* mempunyai GHP dan $\left\|x^{N}\right\| \leq \|x\|$, untuk setiap N. *Y* memenuhi $\sup_{N}\left\|y^{N}\right\| = \|y\|$, dan $P : X \rightarrow Y$. Jika $g(k, \bullet)$ terbatas pada setiap interval terbatas (untuk setiap k), maka P terbatas lokal.

***Teorema 2.5*:**

Diberikan sebarang ruang barisan *X*. *X* mempunyai GHP dan $\left\|x^{N}\right\| \leq \|x\|$, untuk setiap N. *Y* memenuhi $\sup_{N}\left\|y^{N}\right\| = \|y\|$, dan operator superposisi $P : X \rightarrow Y$ dengan $g(k, 0) = 0$ untuk setiap k. P terbatas lokal jika dan hanya jika $g(k, \bullet)$ terbatas pada setiap interval terbatas (untuk setiap k).

2.4. Himpunan Konveks.

Definisi berikut menjelaskan suatu himpunan dikatakan konveks.

***Definisi 2.7*:**

Diberikan sebarang himpunan A. A dikatakan konveks jika untuk setiap $u, v \in \mathrm{A}$ dan sebarang scalar α dengan $0 \leq \alpha \leq 1$ berlaku $\alpha(u) + (1 - \alpha)(v) \in \mathrm{A}$.

2.5. Fungsi Konveks

Sarat suatu fungsi dikatakan konveks akan disajikan dalam definisi berikut.

***Definisi 2.8*:**

Misal $f : R^{n} \rightarrow R$. Fungsi *f* dikatakan konveks jika $D(f)$ konveks dan untuk setiap $u, v \in D(f)$ berlaku $f(\alpha u + (1 - \alpha)v) \leq \alpha f(u) + (1 - \alpha) f(v)$.

2.6. Teorema-teorema lain

1. *Ketaksamaan segitiga*

   Untuk setiap $a, b \in R$ berlaku $|a + b| \leq |a| + |b|$

2. *Sifat Archimedes*

   Jika $x \in R$ maka terdapat $n_{x} \in N$ sedemikian sehingga berlaku $x < n_{x}$

C. RUANG BARISAN MUSIELAK-ORLICZ

Ruang barisan Musielak-Orlicz nerupakan ruang barisan yang dikenai fungsi *M*, dimana fungsi *M* tersebut memetakan dari field $Z^{+} \times R$ ke field R.

***Definisi 3.1*:**

Diberikan fungsi $M : Z^{+} \times R \to R$ yang memenuhi kondisi untuk setiap k:

$M(\mathrm{k},0) = 0$.

$M(\mathrm{k},-t) = M(\mathrm{k},t)$.

$M(\mathrm{k},\bullet)$ kontinu pada $Z^{+} \times R$.

$M(\mathrm{k},\bullet)$ naik pada interval $[0,\infty)$ dan

$M(\mathrm{k},t) \to \infty$ untuk $t \to \infty$.

Ruang barisan Musielak-Orlicz merupakan himpunan dari barisan yang didefinisikan:

$$l_M = \left\{ x : \sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} M(\mathrm{k},t) < \infty \right\}.$$

Pada teorema berikut ini akan ditunjukkan bahwa l_M merupakan kelas konveks.

***Teorema 3.1*:**

l_M merupakan kelas konveks.

***Bukti*:**

Karena $M(\mathrm{k},\bullet)$ naik pada interval $[0,\infty)$ untuk setiap k maka untuk $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$ dan $x, y \in R$ berlaku:

$$\begin{aligned} M(\mathrm{k},\alpha x + \beta y) &\leq M(\mathrm{k},\alpha|x| + \beta|y|) \\ &\leq M(\mathrm{k},\alpha \max(|x|,|y|) + \beta \max(|x|,|y|)) \\ &\leq M(\mathrm{k},\max(|x|,|y|)) \\ &\leq M(\mathrm{k},|x|) + M(\mathrm{k},|y|). \end{aligned}$$

Karena untuk setiap k, $M(\mathrm{k},-t) = M(\mathrm{k},t)$ akibatnya

$$M(\mathrm{k},\alpha x + \beta y) \leq M(\mathrm{k},x) + M(\mathrm{k},y).$$

Dengan demikian l_M merupakan kelas konveks.

***Teorema 3.2*:**

Jika fungsi *M* memenuhi kondisi-δ_2 maka l_M linear.

***Bukti*:**

Akan di tunjukkan:

a) Jika $x \in l_M$ maka $\alpha x \in l_M$, untuk setiap $\alpha \in R$ dan

b) Jika $x, y \in l_M$ maka $x + y \in l_M$.

Misal: $\rho(x) = \sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} M(\mathrm{k},x_{\mathrm{k}})$

a) Berdasarkan hukum Archimedes, untuk sembarang $\alpha \in R$ ada $m \in N$ sedemikian sehingga berlaku $\alpha \le 2^m$. Karena $M(\mathrm{k},\bullet)$ naik pada interval $[0,\infty)$ maka diperoleh

$$\begin{aligned} M(\mathrm{k},\alpha x_{\mathrm{k}}) &\le M(\mathrm{k},2^m x_{\mathrm{k}}) \\ &\le c_{\mathrm{k}} + \alpha_1 M(\mathrm{k},2^{m-1} x_{\mathrm{k}}) \\ &\le c_{\mathrm{k}} + \alpha_1 c_{\mathrm{k}} + \alpha_1\alpha_2 M(\mathrm{k},2^{m-2} x_{\mathrm{k}}) \\ &\;. \\ &\;. \\ &\;. \\ &\le c_{\mathrm{k}} + \alpha_1 c_{\mathrm{k}} + \ldots + \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{m-1} c_{\mathrm{k}} + \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m M(\mathrm{k},x_{\mathrm{k}}). \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh

$$\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} M(\mathrm{k},\alpha x_{\mathrm{k}}) \le (1+\alpha_1+\ldots+\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{m-1})\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} c_{\mathrm{k}} + \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m \sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} M(\mathrm{k},x_{\mathrm{k}}) < \infty$$

Dengan demikian jika $x \in l_M$ maka $\alpha x \in l_M$, untuk setiap $\alpha \in R$.

b) $$M(\mathrm{k},x_{\mathrm{k}}+y_{\mathrm{k}}) \le M\left(\mathrm{k},\frac{1}{2}\cdot 2x_{\mathrm{k}} + \frac{1}{2}\cdot 2y_{\mathrm{k}}\right) \le M(\mathrm{k},2x_{\mathrm{k}}) + M(\mathrm{k},y_{\mathrm{k}})$$

Sehingga diperoleh

$$\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} M(\mathrm{k},x_{\mathrm{k}}+y_{\mathrm{k}}) \le \sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} M(\mathrm{k},2x_{\mathrm{k}}) + \sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} M(\mathrm{k},y_{\mathrm{k}}).$$

Berdasarkan pembuktian pertama untuk $x, y \in l_M$ maka $2x, 2y \in l_M$.

Akibatnya

$$\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} M(\mathrm{k},2x_{\mathrm{k}}) + \sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} M(\mathrm{k},2y_{\mathrm{k}}) < \infty.$$

Dengan kata lain $x + y \in l_M$ untuk $x, y \in l_M$.

Dari a) dan b) dapat disimpulkan bahwa l_M linear.

Teorema 3.3

Jika norma $\|x\| = \inf\left\{\varepsilon > 0 \mid \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \le \varepsilon\right\}$, untuk setiap $x \in l_M$ dengan $\rho(x) = \sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} M(\mathrm{k},x_{\mathrm{k}})$ maka norma $\|x\|$ merupakan norma-F.

Bukti:

Untuk membuktikan bahwa norma $\|x\|$ merupakan norma-F, harus dibuktikan bahwa norma tersebut memenuhi:

1. $\|x\| = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$.

$$\begin{aligned} \|x\| = 0 \quad &\Leftrightarrow \inf\left\{\varepsilon > 0 \mid \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \le \varepsilon\right\} = 0 \Leftrightarrow \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = 0 \Leftrightarrow \sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} M(\mathrm{k},x_{\mathrm{k}}) = 0 \\ &\Leftrightarrow M(\mathrm{k},x_{\mathrm{k}}) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\varepsilon} = 0 \Leftrightarrow x = 0. \end{aligned}$$

Jika $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ maka $\lim_{n\to\infty} \|\alpha_n x\| = 0$, untuk setiap $x \in l_M$.

$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, artinya untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $K(\varepsilon) \in N$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq K(\varepsilon)$ brrlaku $|\alpha_n| < \varepsilon$.

$\|\alpha_n x\| = |\alpha_n| \|x\|$. Karena $\|\mathrm{x}\| = \inf \left\{ \varepsilon > 0 \mid \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \leq \varepsilon \right\}$ maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ berlaku $\|x\| \leq \varepsilon$, akibatnya $\|\alpha_n x\| = |\alpha_n| \|x\| < \varepsilon$.

Jadi untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $K(\varepsilon) \in N$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq K(\varepsilon)$ brrlaku $\|\alpha_n x\| < \varepsilon$. Dengan kata lain $\lim_{n\to\infty} \|\alpha_n x\| = 0$.

2. Jika $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 0$ maka $\lim_{n\to\infty} \|\alpha x_n\| = 0$, untuk setiap $\alpha \in R$.

   Pada pembuktian ini akan dibagi menjadi 2 kasus:

   a. Untuk $\alpha \neq 0$

      $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 0$, artinya untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $K(\varepsilon) \in N$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq K(\varepsilon)$ berlaku $\|x_n\| < \dfrac{\varepsilon}{|\alpha|}$.

      $$\|\alpha x_n\| = |\alpha| \|x_n\| < |\alpha| \frac{\varepsilon}{|\alpha|} = \varepsilon .$$

      Jadi untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $K(\varepsilon) \in N$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq K(\varepsilon)$ berlaku $\|\alpha x_n\| < \varepsilon$. Dengan kata lain $\lim_{n\to\infty} \|\alpha x_n\| = 0$.

   b. Untuk $\alpha = 0$

      Jelas $\lim_{n\to\infty} \|\alpha x_n\| = 0$.

3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

$$\rho\left(\frac{x+y}{\|x\|+\|y\|}\right) = \rho\left(\frac{\|x\|}{\|x\|+\|y\|} \cdot \frac{x}{\|x\|} + \frac{\|y\|}{\|x\|+\|y\|} \cdot \frac{y}{\|y\|}\right) \leq \rho\left(\frac{x}{\|x\|}\right) + \rho\left(\frac{y}{\|y\|}\right) \leq \|x\| + \|y\| .$$

Karena $\|x + y\| = \inf \left\{ \|x\| + \|y\| > 0 : \rho\left(\frac{x+y}{\|x\|+\|y\|}\right) \leq \|x\| + \|y\| \right\}$ maka

$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

***Teorema 3.4*:**

Misalkan didefinisikan norma $\|x\| = \inf \left\{ \varepsilon > 0 \mid \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \leq \varepsilon \right\}$, untuk setiap $x \in l_M$ dengan $\rho(x) = \sum_{k=1}^{\infty} M(k, x_k)$.

Suatu ruang l_M dengan norma yang didefinisikan seperti di atas merupakan ruang Frechet.

***Bukti*:**

Untuk membuktikan l_M adalah ruang Frechet, harus ditunjukkan bahwa l_M lengkap.

Misal $\{x^{(n)}\}$ sebarang barisan di l_M sedemikian sehingga $\|x^{(n)} - x^{(m)}\| \to 0$, untuk $n, m \to \infty$. Diperoleh

$$\rho(x^{(n)} - x^{(m)}) = \sum_{k=1}^{\infty} M(k, x_k^{(n)} - x_k^{(m)}) \to \infty \text{ untuk } n, m \to \infty.$$

Akibatnya untuk setiap k berlaku

$$M(k, x_k^{(n)} - x_k^{(m)}) \to \infty, \text{ untuk } n, m \to \infty.$$

Karena M kontinu dan naik pada interval $[0, \infty)$ maka

$$|x_k^{(n)} - x_k^{(m)}| \to 0, \text{ untuk } n, m \to \infty.$$

Jadi untuk setiap k, $\{x_k^{(n)}\}_{k \geq 1}$ merupakan barisan Cauchy pada ruang lengkap R. sehingga untuk setiap k terdapat $x_k \in R$ sedemikian sehingga $\{x_k^{(n)}\} \to x_k$ untuk $n \to \infty$. Misal $x = (x_k)$, akan ditunjukkan $\|x^{(n)} - x\| \to 0$ untuk $n \to \infty$ dan $x \in l_M$. Untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $K(\varepsilon) \in N$ sedemikian sehingga berlaku

$$\rho\left(\frac{x^{(n)} - x^{(m)}}{\varepsilon}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} M\left(k, \frac{x_k^{(n)} - x_k^{(m)}}{\varepsilon}\right) < \varepsilon, \text{ untuk } m, n \geq K(\varepsilon).$$

Akibatnya untuk setiap P berlaku

$$\sum_{k=1}^{P} M\left(k, \frac{x_k^{(n)} - x_k^{(m)}}{\varepsilon}\right) < \varepsilon, \text{ untuk } m, n \geq K(\varepsilon).$$

Sehingga untuk suatu nilai $n \geq K(\varepsilon)$ yang tetap dan untuk sebarang bilangan bulat positif P berlaku

$$\sum_{k=1}^{P} M\left(k, \frac{x_k^{(n)} - x_k}{\varepsilon}\right) \leq \varepsilon, \text{ untuk } m \to \infty.$$

Dengan demikian

$$\rho\left(\frac{x^{(n)} - x}{\varepsilon}\right) \leq \varepsilon, \text{ untuk } n \geq K(\varepsilon).$$

Jadi untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $K(\varepsilon) \in N$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq K(\varepsilon)$ berlaku $\|x^{(n)} - x\| < \varepsilon$. Dengan kata lain $\|x^{(n)} - x\| \to 0$ untuk $n \to \infty$.

Terbukti bahwa l_M adalah ruang Frechet

DAFTAR PUSTAKA

[1] A.C. Zaanen (1997). ***Introduction to Operator Theory in Riesz Spaces***. New York: Springer-Verlag.

[2] C.L. Devito (1990). ***Functional Analysis and Linear Operator Theory***. New York: Addison-Wesley publishing Company.

[3] E. Kreyszig (1978). ***Introduction Functional Analysis Aplications***. New York: John Wiley& Son.

[4] E. Sumiaty (2000). ***Ruang Barisan Fungsional dan Operator*****.** Tesis pada Pascasarjana UGM Yogyakarta: Tidak Diterbitkan.

[5] H.L.Royden (1989). ***Real Analysis*** **(third Edition**). New York: Macmillan Publishing Company.

[6] I.J. Maddox(1970). ***Element of Funcional Analysis*****.** London: Cambridge Univ. Press.

[7] J.B. Conway (1990)***. A Course in Functional*** **Analysis.** New York: Springer-Verlag.

[8] L.P Yee (1984). ***Cesaro Sequence Spaces*****.** Journal vol 13, 29-45, Victoria University.

[9] P.Yee(1993). ***Sequence Spaces and Gliding Hump Prorety***. USA: in manufscript, NUS and New Mexico State University.

[10] Peng-Nung, Ng and L.P. Yee (1978). ***Cesaro Sequence Spaces of Nonabsolute Type***. Comm. Math. Vol 20, 429-433.

[11] S.D. Unoningsih, R. Pluciennik, and L.P. Yee (1995). ***Boundedness of Superposition Operators on Seguene Spaces***. Journal, vol 1.

[12] S.D. Unoningsih and L.P. Yee (1993). ***Bounded Additive Functionals***, Journal, 547.