

Pewarnaan Graph

Dr. Nanang Priatna, M.Pd.



PENDAHULUAN

Modul 6 ini merupakan modul terakhir dari modul mata kuliah Teori Graph. Modul-modul sebelumnya membahas tentang Pengetahuan Dasar Teori Graph, Representasi Graph dan Beberapa Graph Khusus, Lintasan dan Keterhubungan, Pohon, dan Planaritas.

Pada akhir abad kesembilan belas, seorang kepala sekolah memberikan soal yang sangat menantang kepada murid-muridnya. Soal itu sebagai berikut: “Tunjukkan bahwa semua peta hanya memerlukan empat warna, sehingga negara-negara atau propinsi-propinsi yang bertetangga mendapat warna yang berbeda”.

Dia mengatakan hanya mau menerima pembuktian tidak lebih dari 30 baris tulisan dan satu halaman diagram. Tampaknya soal ini sederhana sekali, tetapi sebenarnya tidak demikian. Soal ini menjadi masalah besar di dunia matematika, yang kemudian terkenal dengan nama *Konjektur Empat Warna*. Baru pada Tahun 1976 ditemukan penyelesaian masalah ini. Pada tahun tersebut Kenneth Appel dan Wolfgang Haken, dua matematikawan dari Universitas Illionis di Amerika Serikat, dapat membuktikan (dengan bantuan komputer) dugaan empat warna dengan menyita waktu sekitar 1.200 jam komputer untuk menghasilkan beratus-ratus halaman kertas hasil analisis menyeluruh terhadap sekitar 2.000 graph dengan jutaan kemungkinan bentuknya.

Salah satu cara yang digunakan adalah menggunakan graph yang titiknya menunjukkan propinsi dan garis menunjukkan hubungan dua propinsi itu sebagai tetangga.

Konsep-konsep yang dikaji dan diuraikan di dalam pembahasan modul ini terdiri atas topik-topik yang menyangkut pewarnaan titik, pewarnaan sisi (pewarnaan peta), dan pewarnaan garis.

Melalui uraian dan pembahasan dalam modul ini, diharapkan dapat menunjang wawasan dan pengetahuan Anda dalam melaksanakan tugas.

Disamping itu Anda diharapkan dapat menggunakannya dalam kehidupan sehari-hari serta dapat mengajarkannya dengan pendekatan tertentu yang sesuai. Secara khusus tujuan dari penyajian modul ini adalah agar Anda dapat:

- a. menjelaskan pewarnaan titik suatu graph,
- b. menjelaskan pewarnaan sisi (pewarnaan peta),
- c. menjelaskan pewarnaan garis suatu graph,
- d. menentukan bilangan khromatik suatu graph,
- e. menjelaskan algoritma Welsh dan Powell dalam pewarnaan graph,
- f. menjelaskan teori-teori pewarnaan graph,
- g. menerapkan analisis pewarnaan graph dalam kehidupan sehari-hari.

Kegiatan Belajar 1

Pewarnaan Titik Suatu Graph

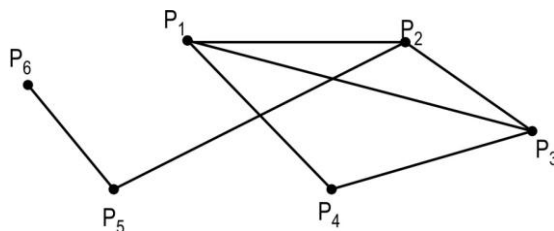
Agar Anda lebih memahami pengertian tentang pewarnaan titik suatu graph, perhatikan contoh-contoh serta penjelasan berikut ini.

Contoh 1

Andaikan sebuah pabrik kimia ingin mengirimkan hasil produksinya dengan menggunakan kereta api. Sesuai dengan ketentuan yang ada, tidak semua zat kimia ini dapat dimuat dalam satu kereta, karena kemungkinan bercampurnya zat itu yang dapat menyebabkan terjadinya reaksi berupa ledakan yang membahayakan. Bagaimana zat-zat kimia ini dapat dikirim? Dengan maksud meminimumkan biaya, pabrik itu ingin menggunakan gerbong kereta api sesedikit mungkin. Berapa banyaknya gerbong kereta api itu?

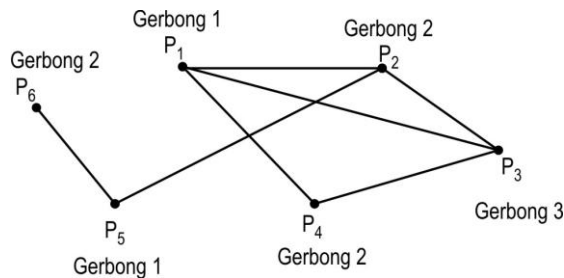
Pada Contoh di atas ada objek (hasil zat kimia) dan ada keterhubungan (tidak dapat dimuat dalam satu gerbong kereta) di antara objek itu. Karena hal ini merupakan ide dasar suatu graph, maka dapat disajikan dalam bentuk graph. Pada contoh di atas, titik-titiknya adalah zat kimia dan sisinya menghubungkan zat-zat kimia yang tidak dapat diangkut dalam gerbong kereta yang sama.

Sebagai ilustrasi, diasumsikan bahwa pada contoh 1 ada enam zat kimia P_1 , P_2 , P_3 , P_4 , P_5 , dan P_6 . Serta P_1 dengan P_2 , P_3 , atau P_4 tidak dapat diangkut dalam kereta yang sama, juga P_2 dengan P_3 atau P_5 , P_3 dengan P_4 , dan P_5 dengan P_6 . Graph yang menyajikan hal ini dapat dilihat pada Gambar 6.1, yang titik-titiknya menunjukkan enam zat kimia dan sisinya menghubungkan pasangan zat kimia yang *tidak* dapat dimuat dalam gerbong kereta yang sama.



Gambar 6.1

Berapa banyak minimum gerbong kereta yang diperlukan? Dalam graph pada Gambar 6.1, zat kimia yang disajikan dengan titik berdekatan harus dimuat dalam gerbong kereta yang tidak sama. Misal: zat P_1 dan P_2 berdekatan, misalkan zat P_1 diletakkan pada gerbong kereta 1, kereta lain diperlukan untuk memuat P_2 , katakan gerbong kereta 2. Karena P_3 berdekatan P_1 dan P_2 , maka diperlukan gerbong kereta lain lagi untuk P_3 , katakan gerbong kereta 3. Tetapi tidak diperlukan gerbong kereta lain lagi untuk P_4 , gerbong kereta 2 dapat digunakan lagi. Demikian pula halnya, tidak diperlukan gerbong kereta lain lagi untuk P_5 , karena gerbong kereta 1 atau 3 dapat digunakan lagi. Misalnya dipilih gerbong kereta 1, maka untuk P_6 dipilih gerbong kereta 2 atau 3, katakan gerbong kereta 2. Graph pada Gambar 6.2 menunjukkan bagaimana titik-titik itu diberi nama (label) sehingga zat kimia yang tidak dapat berada bersama, dimuat dalam gerbong kereta berbeda. Juga karena P_1 , P_2 , dan P_3 saling berdekatan, maka paling sedikit harus digunakan tiga gerbong kereta berbeda. Sehingga banyak minimum gerbong kereta yang harus digunakan ada tiga.



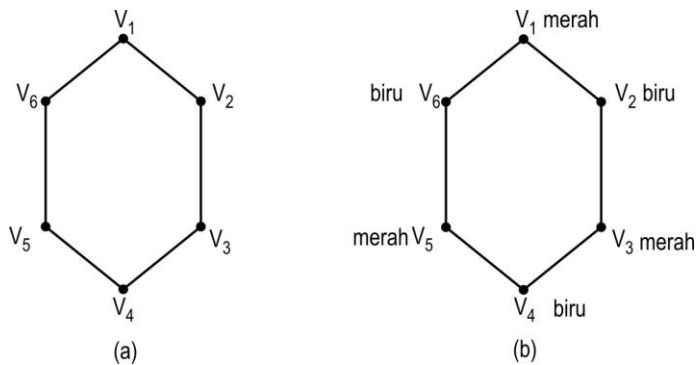
Gambar 6.2

Apa yang telah dilakukan di atas, adalah memberi label pada titik-titik graph sehingga titik yang berdekatan mendapatkan label yang berbeda. Ide ini sering terjadi dalam teori graph, dan label ini disebut warna. *Mewarnai sebuah graph* berarti memberi warna pada setiap titik graph, sedemikian hingga titik yang berdekatan mendapat warna berbeda. Menanyakan banyak minimum gerbong kereta yang diperlukan pada contoh 1 adalah sama seperti menanyakan banyak minimum warna yang diperlukan untuk mewarnai graph pada Gambar 6.1, dengan warna mewakili gerbong kereta.

Bila suatu graph G dapat diwarnai minimal dengan n warna, maka G dikatakan memiliki *bilangan khromatik* n . Jadi graph G pada Gambar 6.1 memiliki bilangan khromatik 3.

Contoh 2

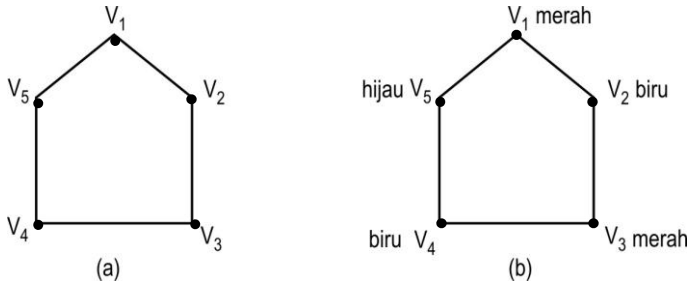
Graph pada gambar 6.3 (a) memiliki bilangan khromatik 2 karena titik V_1 , V_3 , dan V_5 dapat diwarnai dengan satu warna (misalkan merah) dan tiga titik lainnya dengan warna kedua (misalkan biru), seperti yang terlihat pada Gambar 6.3 (b). Secara umum, jika suatu siklus memiliki titik yang banyaknya genap, maka siklus itu dapat diwarnai menggunakan dua warna.



Gambar 6.3

Contoh 3

Bila suatu siklus memiliki titik yang banyaknya ganjil, seperti pada Gambar 6.4 (a), maka harus digunakan tiga warna. Bila dicoba menggunakan warna itu secara berselang seperti pada Gambar 6.3, warna merah untuk titik V_1 dan V_3 serta warna biru tidak dapat digunakan lagi untuk V_5 . Penggunaan tiga warna untuk mewarna siklus yang banyak titiknya ganjil diilustrasikan pada Gambar 6.4 (b).

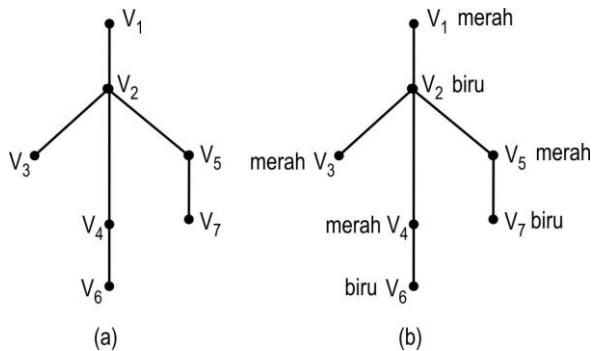


Gambar 6.4

Dalam graph lengkap K_n , setiap titik saling berdekatan dengan titik lainnya. Jadi, kurang dari n warna tidak cukup untuk mewarnai graph itu. Oleh karena itu, graph lengkap K_n memiliki bilangan khromatik n .

Contoh 4

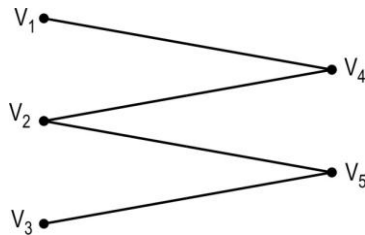
Graph pada Gambar 6.5 (a) dapat diwarnai dengan menggunakan dua warna, seperti terlihat pada Gambar 6.5 (b).



Gambar 6.5

Contoh 5

Graph pada Gambar 6.6 memiliki bilangan khromatik 2 karena titik di sebelah kiri dapat diwarnai dengan menggunakan warna pertama dan titik di sebelah kanan dapat diwarnai dengan menggunakan warna kedua.



Gambar 6.6

Secara umum, sangat sulit untuk menentukan banyak minimum warna yang diperlukan untuk mewarna graph. Salah satunya dengan mendaftar semua cara mewarna (yang berbeda) titik-titik graph, kemudian memeriksa setiap cara itu untuk menentukan mana yang menggunakan banyak warna minimum. Sayangnya, walaupun titik graph tidak seberapa banyak, dan kita menggunakan komputer super, proses ini sangat memakan waktu, bahkan sampai berabad-abad.

Tetapi, ada beberapa cara yang berhasil diperoleh untuk dapat menunjukkan bilangan khromatik suatu graph. Misal, seperti yang terlihat pada Contoh 3, siklus yang panjangnya ganjil memiliki bilangan khromatik 3. Jadi setiap graph yang memiliki siklus jenis ini membutuhkan minimum 3 warna. Graph pada Gambar 6.4 merupakan salah satu contohnya. Bila siklus pada suatu graph panjangnya genap, maka 2 warna sudah cukup.

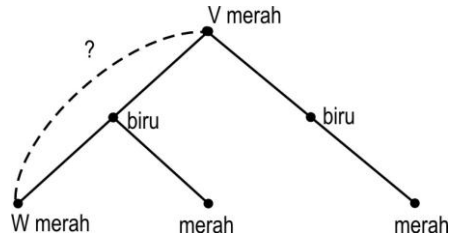
Teorema 1

Suatu graph G tidak memiliki siklus yang panjangnya ganjil, jika dan hanya jika G dapat diwarnai dengan 2 warna.

Bukti

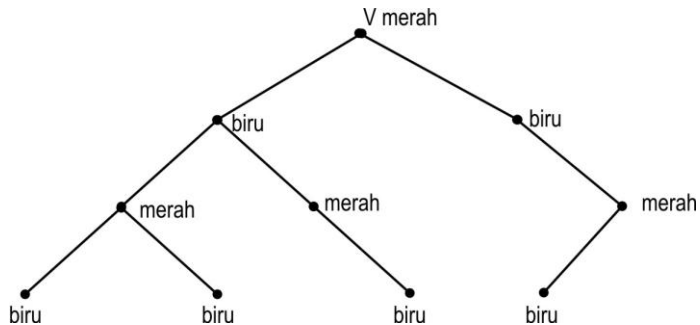
Seperti uraian di atas, bila G memiliki siklus yang panjangnya ganjil, maka pewarna G membutuhkan paling sedikit 3 warna.

Sekarang andaikan G tidak memiliki siklus yang panjangnya ganjil. Pilih suatu titik V yang diberi warna merah. Kemudian pada setiap titik yang berdekatan dengan V diberi warna biru. Sekarang, pada titik-titik yang berdekatan dengan titik yang baru diberi warna biru itu, diberi warna merah. Dapatkah salah satu dari titik yang berwarna merah ini, katakan titik W , berdekatan dengan titik V yang juga berwarna merah? Diagram pada Gambar 6.7 mengilustrasikan situasi ini.



Gambar 6.7

Terlihat bahwa jika V dan W berdekatan, maka akan ada siklus yang panjangnya 3. Dengan demikian, setiap titik lain yang baru saja diwarnai warna merah tidak berdekatan dengan titik yang berwarna merah, karena jika tidak demikian berarti ada siklus yang panjangnya ganjil. Berikutnya, titik yang berdekatan dengan yang baru saja diwarnai warna merah diberi warna biru. Hal ini diperlihatkan pada Gambar 6.8.



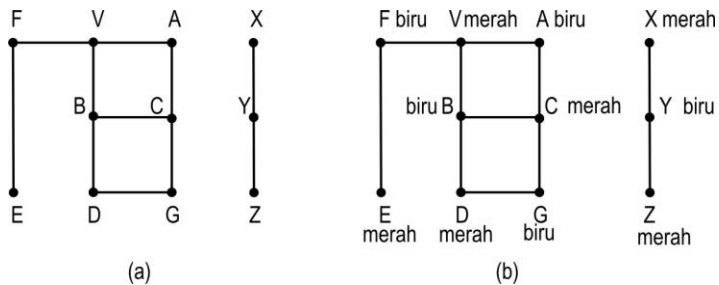
Gambar 6.8

Kemudian, jika dua titik yang diwarnai biru terletak berdekatan, maka ada siklus yang panjangnya ganjil. Kemudian dilanjutkan dengan mewarnai merah titik yang berdekatan dengan titik yang baru diwarnai biru. Seperti sebelumnya, tidak ada titik yang baru diwarnai merah dapat terletak berdekatan dengan titik yang telah berwarna merah. Proses ini diulangi sampai tidak ada titik yang belum mendapat warna terletak berdekatan dengan titik yang telah diwarnai.

Jika graphnya tidak terhubung, maka akan ada titik yang tidak berdekatan dengan titik yang telah berwarna, sehingga belum mendapat warna. Untuk titik-titik seperti itu, proses di atas diulang lagi dengan menggunakan warna merah dan biru. Akhirnya semua titik dapat diwarnai dengan warna merah dan biru.

Contoh 6

Pada graph dalam Gambar 6.9 (a), proses pewarnaan di atas dimulai dengan memilih titik V dan mewarnainya dengan warna merah. Karena F, B, dan A terletak berdekatan dengan V, maka warna biru diberikan pada titik itu. Titik yang belum mendapat warna dan terletak berdekatan dengan titik biru itu adalah C, D, dan E, sehingga diberi warna merah. Akhirnya, titik G adalah titik yang belum diwarnai dan terletak berdekatan dengan titik merah, sehingga diwarnai biru. Sekarang, X adalah titik belum diwarnai yang terletak tidak berdekatan dengan titik yang berwarna, sehingga X diberi warna merah. Kemudian Y diberi warna biru, serta akhirnya Z diberi warna merah. Lihat Gambar 6.9 (b).



Gambar 6.9

Teorema berikut ini memberikan batas atas pada banyak warna yang diperlukan untuk mewarna sebuah graph.

Teorema 2

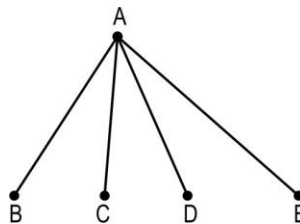
Bilangan khromatik dari graph G tidak dapat lebih satu dari derajat maksimum titik-titik dari G .

Bukti

Misalkan k adalah derajat maksimum titik dari G . Akan ditunjukkan bahwa G dapat diwarnai dengan menggunakan $k+1$ warna $C_0, \dots, C_k$. Mula-mula titik V dipilih dan diberi warna C_0 . Kemudian, beberapa titik W lain dipilih. Karena paling banyak ada k titik yang berdekatan dengan W dan ada paling sedikit $k+1$ warna yang tersedia, maka paling sedikit ada satu warna (dapat lebih banyak) yang belum digunakan untuk mewarnai titik yang berdekatan dengan W . Pilih warna itu. Proses ini dapat dilanjutkan sampai semua titik dari G mendapat warna.

Contoh 7

Proses yang digambarkan pada teorema 2 dapat menggunakan lebih banyak warna daripada yang sebenarnya diperlukan. Graph pada Gambar 6.10 memiliki titik berderajat 4, yang merupakan derajat maksimumnya, sehingga dengan teorema 2 di atas, graph itu dapat diwarnai dengan menggunakan $4 + 1 = 5$ warna. Tetapi, dengan menggunakan prosedur yang digambarkan pada teorema 1, graph itu dapat diwarnai dengan menggunakan 2 warna.



Gambar 6.10

Berikut ini akan diuraikan algoritma tambahan, yang ditemukan Welsh dan Powell, untuk pewarnaan titik-titik dari suatu graph.

Algoritma Welsh dan Powell

Algoritma ini memberikan cara mewarnai sebuah graph dengan memberi label titik-titiknya sesuai dengan derajatnya.

Langkah 1 (melabel titik dengan derajatnya). Label titik $V_1, V_2, \dots, V_n$ sedemikian hingga derajat $(V_1) \geq \text{derajat}(V_2) \geq \dots \geq \text{derajat}(V_n)$.

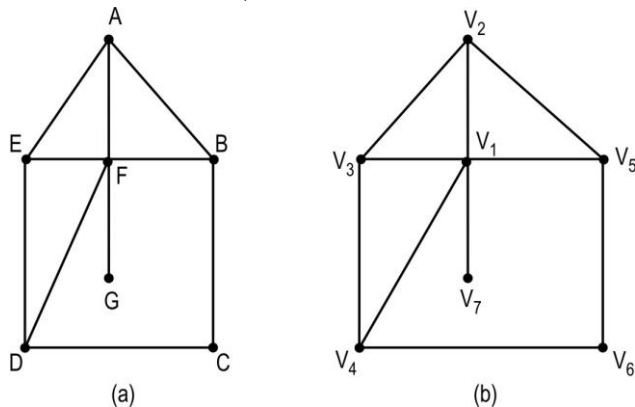
Langkah 2 (warnai titik belum berwarna pertama dari titik-titik belum berwarna yang berdekatan dengan titik itu). Berikan warna yang belum digunakan pada titik belum berwarna yang pertama pada daftar titik itu. Lakukan hal itu pada semua titik dalam daftar secara terurut, berikan warna baru ini pada setiap titik yang tidak berdekatan dengan setiap titik lain yang telah diwarnai ini.

Langkah 3 (graphnya telah diwarnai?). Jika beberapa titiknya belum berwarna, maka kembalilah ke langkah 2.

Langkah 4 (selesai). Pewarnaan graph telah dilakukan.

Contoh 8

Untuk graph pada Gambar 6.11 (a), titik F memiliki derajat terbesar, yaitu 4 sehingga F diberi label V_1 . Titik A, D, dan E berderajat 3 sehingga diberi label V_2 , V_3 , dan V_4 secara random. Demikian pula titik B dan C yang berderajat 2 diberi label V_5 dan V_6 . Titik G yang merupakan satu-satunya titik yang tersisa, diberi label V_7 . Hal ini diperlihatkan pada Gambar 6.11 (b).



Gambar 6.11

Penyajian dalam bentuk daftar berdekatan sangat mudah digunakan dengan algoritma Welsh dan Powell ini. Untuk graph pada Gambar 6.11 (b), penyajian daftar berdekataannya adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 V_1 &: V_2, V_3, V_4, V_5, V_7 \\
 V_2 &: V_1, V_3, V_5 \\
 V_3 &: V_1, V_2, V_4 \\
 V_4 &: V_1, V_3, V_6 \\
 V_5 &: V_1, V_2, V_6 \\
 V_6 &: V_4, V_5 \\
 V_7 &: V_1
 \end{aligned}$$

Pada Algoritma Welsh dan Powell ini, titik belum berwarna pertama dalam daftar adalah V_1 yang diberi warna merah. Kemudian dicari titik berikut yang tidak berdekatan dengan V_1 pada daftar, yaitu titik di bawah V_1 yang tidak mengikuti V_1 . Diperoleh titik V_6 , yang diberi warna merah. Dilanjutkan dengan melihat bagian bawah daftar untuk mencari titik berikutnya yang tidak berdekatan dengan V_1 maupun V_6 . Karena titik seperti itu tidak ada, maka kembali dilihat bagian atas daftar dan ditentukan lagi titik belum berwarna yang pertama, yaitu V_2 , yang diberi warna biru. Kemudian, titik belum berwarna berikutnya ditentukan yang tidak berdekatan dengan V_2 . Diperoleh titik V_4 dan diberi warna biru. Cara ini dilanjutkan lagi, dan diperoleh titik V_7 yang belum berwarna dan tidak berdekatan dengan V_2 maupun V_4 , sehingga V_7 diwarnai biru, bagian atas daftar dilihat kembali dan ditentukan titik belum berwarna berikutnya, yaitu V_3 , yang diberi warna hijau. Karena V_5 belum diwarnai dan tidak berdekatan dengan V_3 , yang diberi warna hijau. Dengan demikian maka graph pada Gambar 11 (b) dapat diwarnai dengan tiga warna.

Penyajian daftar berdekatan membuat algoritma Welsh dan Powell mudah digunakan, karena titiknya dapat ditandai ketika diwarnai, sehingga tinggal memperhatikan titik belum berwarna sisanya dalam proses perwarnaan itu.

Silakan Anda istirahat sejenak!

Setelah Anda cukup istirahat, ingat-ingat kembali dan pahami benar uraian di atas. Kemudian kerjakanlah soal-soal berikut ini sebagai latihan.



LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

- 1) Perhatikan tabel 1 matriks siswa dan bidang studi berikut ini.

Tabel 6.1
Matriks Siswa dan Bidang Studi

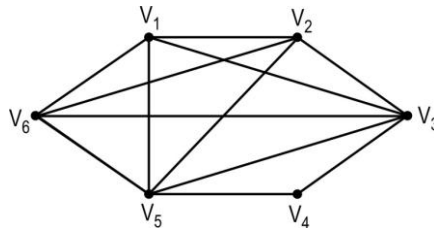
	A	B	C	D	E
1	0	1	0	0	1
2	0	1	0	1	0
3	0	0	1	1	0
4	1	1	0	0	0
5	0	1	0	1	0
6	0	1	0	0	0
7	1	0	1	0	0
8	0	0	1	1	0

Tabel 6.1 menunjukkan matriks tentang lima bidang studi (di label dengan abjad) yang dipilih oleh delapan orang siswa (di label dengan angka). Angka 1 diisikan sebagai elemen (i,j) matriks itu, jika siswa i memilih bidang studi j . Sedangkan angka 0 diisikan sebagai elemen (i,j) , jika siswa i tidak memilih bidang studi j .

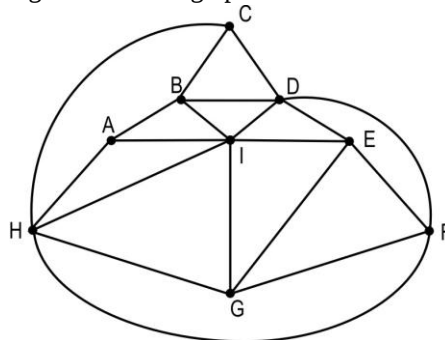
Contoh: siswa 1 memilih bidang studi B dan E karena elemen $(1,B)$ dan $(1,E)$ adalah 1.

Berdasarkan Tabel 6.1, tentukan banyak jadwal ujian yang dapat dibuat sedemikian rupa sehingga semua siswa dapat mengikuti ujian bidang studi itu tanpa ada kesulitan waktu (kesulitan terjadi jika ada siswa yang harus mengikuti ujian dua bidang studi atau lebih pada waktu yang bersamaan).

- 2) Berapa bilangan khromatik graph berikut?



- 3) Tentukan bilangan khromatik graph berikut.



- 4) Ada 6 jenis zat kimia yang perlu disimpan di gudang. Beberapa pasang dari zat itu tidak dapat disimpan di tempat yang sama, karena campuran gasnya bersifat eksplosif. Untuk zat-zat semacam itu perlu dibangun ruang-ruang terpisah yang dilengkapi ventilasi dan penyedot udara ke luar yang berlainan. Jika lebih banyak ruang dibutuhkan, berarti lebih banyak biaya yang dikeluarkan. Karena itu perlu diketahui berapa banyak minimum ruangan yang diperlukan untuk dapat menyimpan semua zat kimia itu dengan aman. Berikut ini adalah daftar pasangan zat kimia yang tidak dapat disimpan di tempat yang sama.

Zat kimia	tidak dapat bersama dengan zat kimia
A	B, D
B	A, D, E, F
C	E
D	A, B, F
E	B, C
F	B, D

Berapa banyak minimum ruangan berbeda untuk menyimpan semua zat kimia itu secara aman?

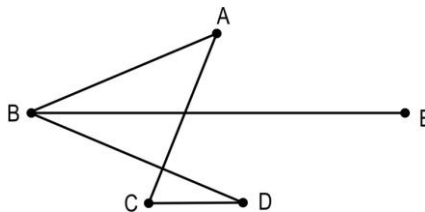
Periksa dan teliti kembali jawaban Anda, sekarang cocokkan jawabannya dengan kunci jawaban berikut ini.

Petunjuk Jawaban Latihan

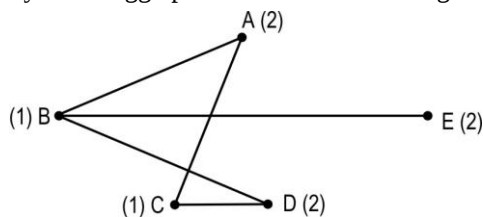
- 1) Penyelesaian masalah membuat jadwal ujian ini sebenarnya ekuivalen dengan masalah mencari bilangan khromatik suatu graph. Yang perlu diingat adalah ujian dan bidang studi dapat dijadwalkan pada waktu yang sama jika tidak ada siswa yang sama yang mengikuti ujian dua bidang studi itu.

Penjadwalan ujian itu dapat digambarkan sebagai sebuah graph, dan setiap bidang studi ditunjukkan sebagai titiknya. Dua titik dihubungkan dengan sebuah garis jika ada siswa yang memiliki kedua bidang studi itu. Sehingga dapat ditafsirkan bahwa jika dua titik dihubungkan oleh garis maka ujian dua bidang studi itu tidak dapat dilakukan bersamaan, karena akan ada siswa yang mendapat kesulitan. Diberikan warna yang berbeda untuk titik-titik semacam itu yang menunjukkan bahwa waktu ujiannya berbeda.

Kita gambar masalah graph di atas



Jadwalnya perlu dibuat sesedikit mungkin untuk memudahkan pelaksanaannya. Sehingga perlu kita tentukan bilangan khromatik graph di atas.



Ternyata bilangan khromatiknya 2. Ujian bidang studi A, E, dan D dapat dilaksanakan bersamaan, sedangkan ujian bidang studi B dan C dapat dilakukan bersama tetapi pada waktu yang berbeda dengan ujian bidang studi A, E, dan D.

- 2) Titik pada graph tersebut dapat diwarnai sebagai berikut.

V_5 merah

V_3 biru

V_2 dan V_4 kuning

V_1 hijau

V_6 putih

Karena graph itu dapat diwarnai minimal dengan 5 warna, maka bilangan khromatiknya adalah 5.

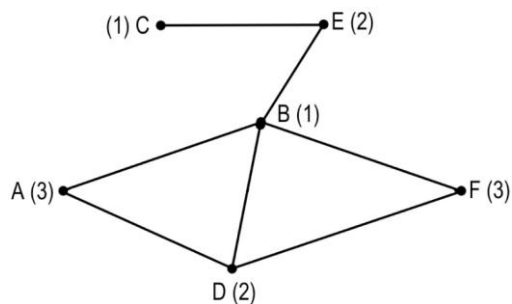
- 3) Titik-titik H, B, dan E warna merah (1).

Titik-titik I, F, dan C warna biru (2).

Titik-titik D, A, dan G warna kuning (3).

Bilangan khromatiknya adalah 3.

- 4) Soal tersebut dapat dibuat graphnya dengan titik menunjukkan “zat kimia” dan garis menunjukkan “tidak dapat bersama dengan zat kimia”. Gambar graphnya adalah sebagai berikut.



Berikut ini tabel yang menunjukkan hubungan antara titik, derajat titik, dan warna.

Titik	B	D	A	F	E	C
Derajat titik	4	3	2	2	2	1
Warna	(1)	(2)	(3)	(3)	(2)	(1)

Bilangan khromatiknya 3

Jadi, banyak minimum ruang berbeda atau terpisah yang dibutuhkan ada 3, yaitu:

ruang 1 menyimpan zat B dan C

ruang 2 menyimpan zat D dan E

ruang 3 menyimpan zat A dan F



RANGKUMAN

Mewarna sebuah graph berarti memberikan warna pada setiap titik graph itu sedemikian hingga titik yang berdekatan mendapat warna berbeda.

Bila suatu graph G dapat diwarnai minimal dengan n warna, maka G dikatakan memiliki bilangan khromatik n .

Untuk mewarna sebuah graph dengan memberi label titik-titiknya, sesuai dengan derajatnya, dikemukakan oleh Welsh dan Powell dengan langkah-langkah sebagai berikut.

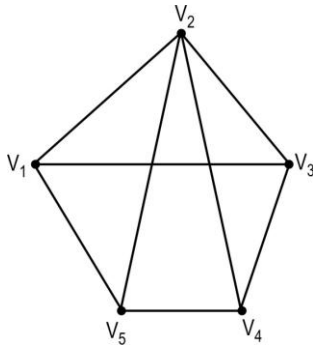
1. Beri label titik $V_1, V_2, \dots, V_n$ sedemikian hingga derajat $(V_1) > \text{derajat } (V_2) > \dots > \text{derajat } (V_n)$.
2. Tandailah titik berderajat terbesar dengan tanda angka 1. Kemudian tanda ini secara berurutan digunakan untuk menandai setiap titik lainnya yang tidak berdekatan dengan titik-titik yang telah bernomor sama.
3. Ulangilah langkah 2 dengan warna kedua, ketiga, dan seterusnya sampai semua titik bertanda.



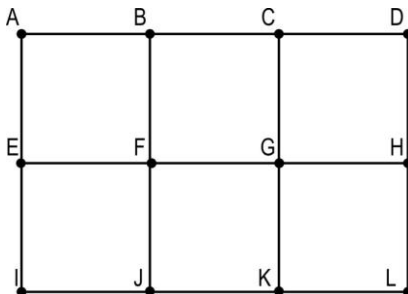
TES FORMATIF 1

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

- 1) Bilangan khromatik gambar graph di bawah ini adalah



- A. 5
B. 4
C. 3
D. 2
- 2) Jika graph G berkhromatik 5 dan memiliki 5 titik, maka G adalah
- A. graph nol
B. graph lengkap
C. graph bipartit
D. graph yang memiliki 5 sisi
- 3) Bilangan khromatik graph di bawah ini adalah

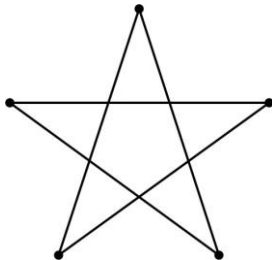


- A. 2
- B. 3
- C. 4
- D. 12

4) Jika diketahui bahwa G berkhromatik 1, maka G hanya memiliki

- A. satu titik
- B. satu sisi
- C. sisi
- D. titik

5) Graph di bawah ini mempunyai bilangan khromatik

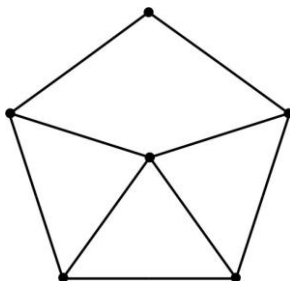


- A. 5
- B. 3
- C. 2
- D. 1

6) Bilangan khromatik dari graph bipartit lengkap $K_{3,5}$ adalah

- A. 2
- B. 3
- C. 4
- D. 5

7) Bilangan khromatik dari graph di bawah ini adalah



- A. 6
 - B. 5
 - C. 3
 - D. 2
- 8) Bilangan khromatik dari graph sikel C_8 adalah
- A. 2
 - B. 4
 - C. 6
 - D. 8
- 9) Bilangan khromatik dari graph lengkap K_7 adalah
- A. 1
 - B. 3
 - C. 5
 - D. 7
- 10) Bilangan khromatik dari graph sikel C_{15} adalah
- A. 2
 - B. 3
 - C. 10
 - D. 15

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 1.

Rumus:

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan yang Anda capai:

90 - 100% = baik sekali

80 - 89% = baik

70 - 79% = cukup

< 70% = kurang

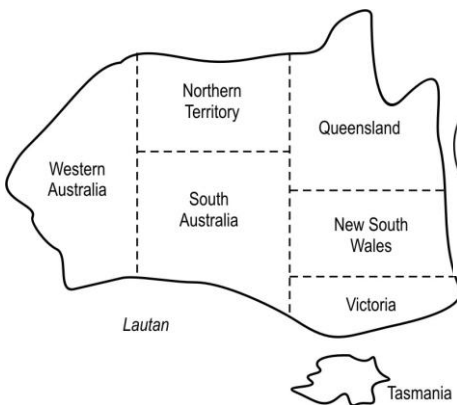
Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 2. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kegiatan Belajar 2

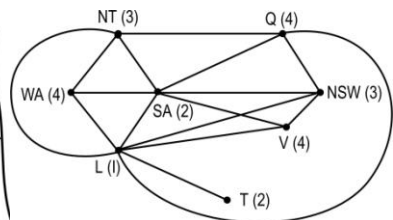
Pewarnaan Peta dan Pewarnaan Garis

Sebuah atlas akan sangat mudah dipahami kalau masing-masing daerah yang saling berbatasan mempunyai warna yang berlainan. Suatu masalah yang menarik ialah menentukan banyaknya minimum warna yang harus disediakan agar tujuan tersebut terwujud. Misalnya untuk mewarnai peta negara tetangga kita Australia seperti diperlihatkan pada Gambar 6.12. Pewarnaan peta sama dengan pewarnaan titik-titik graph dari gambar peta tersebut sedemikian hingga tidak ada dua titik berdekatan yang mendapat warna sama.

Dalam hal ini negara-negara bagiannya dan lautan yang mengelilinginya diwakili oleh titik-titik. Selanjutnya pasangan titik yang mewakili daerah-daerah yang saling berbatasan dihubungkan dengan sebuah sisi, sehingga model graphnya seperti tampak pada Gambar 6.13. Oleh karena itu derajat suatu titik mencerminkan banyaknya perbatasan yang mengelilingi daerah yang diwakili titik itu. Jadi rumusan persoalan graphnya ialah mewarnai semua titik graph sedemikian hingga titik-titik yang terhubung oleh sisi mempunyai warna berbeda satu sama lain.



Gambar 6.12



Gambar 6.13

Jadi dapat disimpulkan bahwa langkah-langkah yang dilakukan dalam pemodelan dengan graph ialah menentukan:

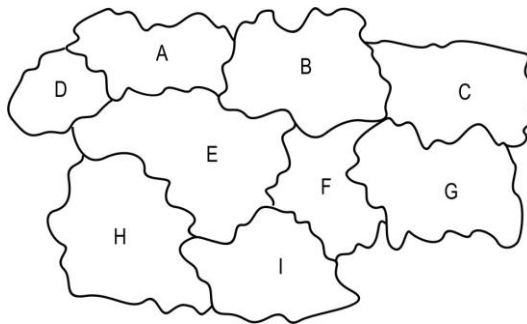
1. Objek apa yang akan dikonversikan sebagai titik graph?
2. Hubungan apa yang dicerminkan oleh sisi graph? Pasangan titik apa saja yang harus dihubungkan oleh sisi?
3. Merumuskan masalah nyata dalam bahasa teori graph.

Angka-angka pada Gambar 6.13 menyatakan kemungkinan penempatan warna, dan masih ada pula kemungkinan penempatannya yang lain. Dari graph tersebut tampak bahwa dengan empat macam warna kita telah mampu membuat peta Australia sedemikian hingga dua negara bagian yang saling berbatasan dapat dibedakan dengan jelas.

1. Pewarnaan Peta

Contoh 1

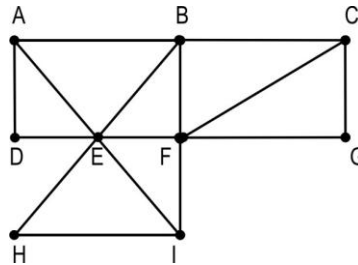
Warnai peta pada Gambar 6.14, kemudian tentukan bilangan khromatiknya.



Gambar 6.14

Jawab

Peta pada Gambar 6.14, dapat dilukiskan bentuk graphnya seperti pada Gambar 6.15 berikut ini.



Gambar 6.15

1. Pengurutan derajat titik

Titik	E	F	B	A	C	I	D	G	H
Derajat titik	6	5	4	3	3	3	2	2	2

2. Pewarnaan titik

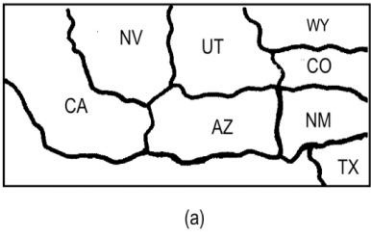
Pertama tandailah titik E dengan angka 1. Telusuri daftar titik tadi dan amati gambar graphnya, ternyata titik C adalah titik pertama yang tidak berdekatan dengan E. Kembali ke daftar titik, tandai titik F dengan angka 2, dan juga titik A dan H, karena tidak berdekatan dengan F. Penelusuran ketiga kalinya terhadap daftar titik akan menandai titik B dengan angka 3, lalu tandai pula titik I, D, dan G dengan angka 3. Dengan demikian bilangan khromatik graph tersebut adalah 3. Langkah-langkah tersebut dirangkum dalam bentuk tabel berikut.

Setiap graph G memiliki sebuah subgraph dari derajat minimum sedikitnya $\chi(G) \leq \frac{1}{2} + m\sqrt{2} + \frac{1}{4}$.

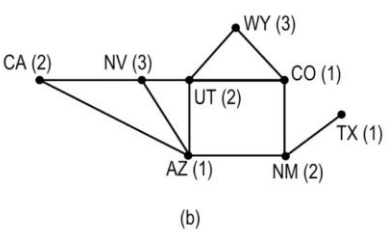
Titik	Warna		
	Tahap 1	Tahap 2	Tahap 3
E	1		
F		2	
B			3
A		2	
C	1		
I			3
D			3
G			3
H		2	

Contoh 2

Gambar 6.16 (a) merupakan bagian dari peta Amerika Serikat. Graphnya beserta warna (label) diperlihatkan pada Gambar 6.16 (b) dengan menggunakan algoritma Welsh dan Powell.



Gambar 6.16 (a)



Gambar 6.16 (b)

Berikut ini tabel yang menunjukkan hubungan antara titik, derajat titik dan warna.

Titik	AZ	UT	NV	CO	NM	CA	WY	TX
Derajat titik	4	4	3	3	3	2	2	1
Warna	(1)	(2)	(3)	(1)	(2)	(2)	(3)	(1)

Peta pada Gambar 6.16 (a) dapat diwarnai dengan 3 warna.

2. Pewarnaan garis

Pewarnaan garis atau rusuk pada suatu graph adalah penentuan warna rusuk-rusuk suatu graph sehingga setiap rusuk yang berdekatan mendapatkan warna yang berbeda. Ukuran keberwarnaan suatu graph didefinisikan sama dengan ukuran keberwarnaan titik, yaitu mengacu kepada banyaknya warna yang memungkinkan sehingga setiap rusuk yang berdekatan mendapat warna yang berbeda.

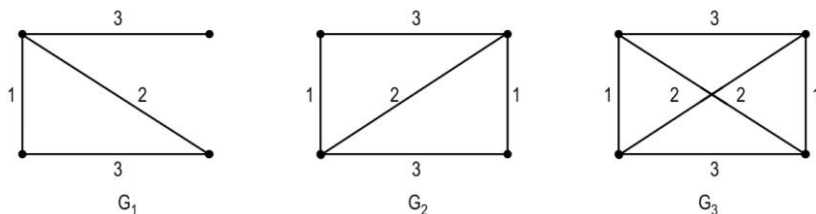
Jumlah warna minimal yang dapat digunakan untuk mewarnai rusuk-rusuk dalam suatu graph G disebut bilangan khromatik G .

Teorema 1

Jika G adalah graph sederhana yang derajat maksimum titiknya adalah m , maka bilangan khromatiknya $\chi(G)$ adalah

$$m \leq \chi(G) \leq m+1$$

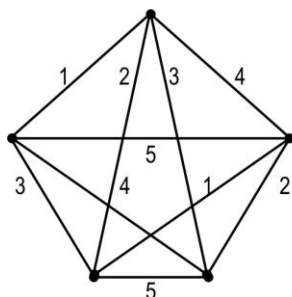
Contoh 1



Derajat maksimum titik dari graph G_1 , G_2 , dan G_3 adalah 3

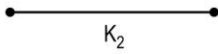
Bilangan khromatiknya adalah 3.

Contoh 2

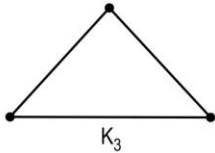


Derajat maksimum titik graf G adalah 4
 Bilangan khromatiknya adalah 5

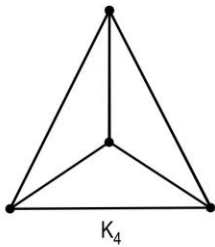
Untuk graph lengkap K_n mempunyai sifat khusus mengenai bilangan khromatiknya. Perhatikan beberapa contoh graph lengkap berikut ini.



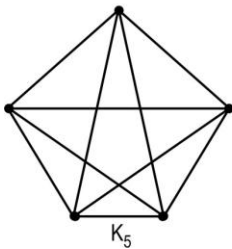
$$\chi(K_2) = 1$$



$$\chi(K_3) = 3$$



$$\chi(K_4) = 3$$



$$\chi(K_5) = 5$$

Hubungan antara banyaknya titik graph lengkap dan bilangan khromatik untuk graph itu dapat dirumuskan dalam teorema berikut ini.

Teorema 2

$$\chi(K_n) = n, \text{ jika } n \text{ ganjil dan } n > 1$$

$$\chi(K_n) = n-1, \text{ jika } n \text{ genap}$$

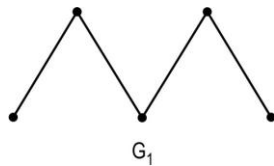
Contoh 3

$$\chi(K_5) = 5; \chi(K_6) = 5; \chi(K_7); \chi(K_8) = 7.$$

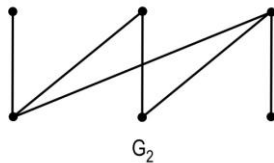
Teorema 3

Jika G adalah graph sederhana bipartit yang derajat maksimum titiknya adalah m , maka $\chi(G) = m$.

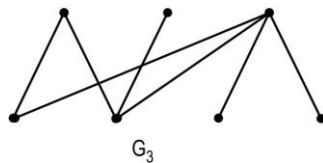
Contoh 4



$$\chi(G_1) = 2$$



$$\chi(G_2) = 3$$

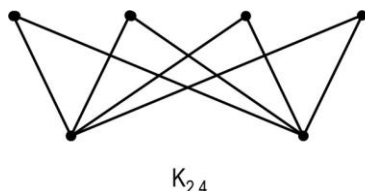


$$\chi(G_3) = 4$$

Berdasarkan teorema 3, dapat disimpulkan bahwa $\chi(K_{p,t}) = \max(p, t)$. $K_{p,t}$ adalah lambang untuk graph bipartit lengkap yang himpunan titiknya terpisah menjadi himpunan pertama terdiri atas p titik dan himpunan kedua terdiri atas t titik.

Tanda $\max(p, t)$ menyatakan yang terbesar di antara p dan t .

Contoh 5



$$\chi(K_{2,4}) = \max(2, 4) = 4$$

Silakan Anda istirahat sejenak!

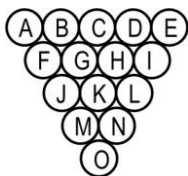
Setelah Anda cukup istirahat, ingat-ingat kembali dan pahami benar uraian di atas. Kemudian kerjakanlah soal-soal berikut ini sebagai latihan.



LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

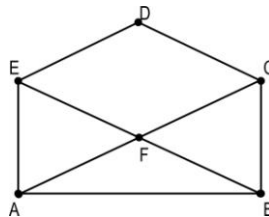
- 1) Susunlah model graph untuk mewarnai 15 bola sodok sehingga bola-bola itu disusun seperti berikut.



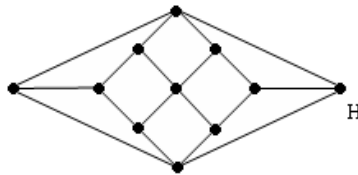
- 2) Sekolah “Harapan Bangsa” merencanakan seminar pendidikan matematika bagi anak-anak. Ada enam pembicara tampil dalam kesempatan yang berbeda, kegiatan tersebut akan memakan waktu terlalu lama. Akan tetapi juga tidak diharapkan pembicara-pembicara tertentu tampil pada saat yang bersamaan. Pimpinan sekolah menghendaki seminar ini berlangsung tidak lebih dari empat babak. Bagaimanakah kegiatan ini dijadwalkan jika pembicara-pembicara yang sebaiknya tidak tampil pada saat yang bersamaan ditandai dengan “*” pada tabel berikut.

Nama pembicara	A	B	C	D	E	F
A		*	*			
B			*		*	*
C					*	*
D						
E						*

- 3) Berilah warna pada garis (rusuk) graph berikut, kemudian tentukan bilangan khromatiknya.



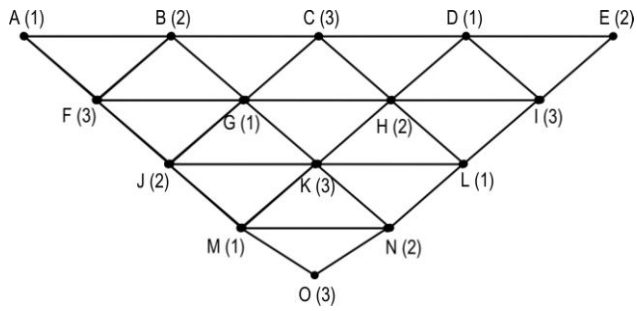
- 4) Tentukan bilangan khromatik dari graf berikut.



Periksa dan teliti kembali jawaban Anda, sekarang cocokkan jawabannya dengan kunci jawaban berikut ini.

Kunci Jawaban Latihan

1) Model graph dari soal tersebut adalah sebagai berikut.



Hubungan antara titik, derajat titik, dan warna ditunjukkan pada tabel berikut ini.

Titik	G	H	K	B	C	D	F	I	J	L	M	N	A	E	O
Derajat	6	6	6	4	4	4	4	4	4	4	4	4	2	2	2
Warna	(1)	(2)	(3)	(2)	(3)	(1)	(3)	(3)	(2)	(1)	(1)	(2)	(1)	(2)	(3)

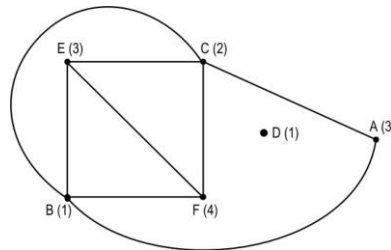
minimum banyaknya warna yang harus disediakan untuk mewarnai 15 bola sodok sehingga bola-bola yang saling bersentuhan berbeda warnanya adalah 3 warna.

2) Masalah ini dapat dimodelkan dengan graph. Setiap pembicara diwakili oleh sebuah titik. Setiap sisi mencerminkan dua pembicara tidak diharapkan tampil pada saat yang bersamaan. Jadi rumusan persoalan graphnya ialah memperlihatkan bahwa bilangan khromatik graphnya tidak lebih dari 4.

Berikut ini tabel yang menunjukkan hubungan antara titik, derajat titik, dan warna.

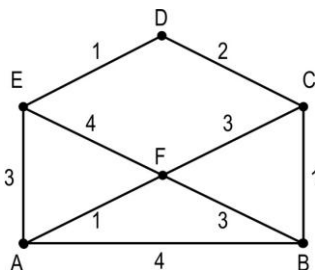
Titik	B	C	E	F	A	D
Derajat titik	4	4	3	3	2	0
Warna	(1)	(2)	(3)	(4)	(3)	(1)

Graphnya adalah sebagai berikut.



Angka mewakili warna yang dapat diberikan kepada titik graph. Warna-warna ini mewakili babak pembicara tampil di forum. Dari gambar itu dapat diamati bahwa titik-titik graphnya dapat diwarnai dengan sekurang-kurangnya 4 macam warna. Jadi dapat disimpulkan bahwa kegiatan tersebut dapat diselesaikan dalam empat babak.

3) Berikut ini graph yang dilengkapi dengan warna pada setiap garisnya (rusuknya).



Garis DE, AF, dan BC diberi warna 1

Garis CD dan BF diberi warna 2

Garis AE dan CF diberi warna 3

Garis AB dan EF diberi warna 4

Jadi bilangan khromatik graph tersebut adalah 4.

4) Bilangan khromatik graph H yaitu $\chi(H) = 5$.



RANGKUMAN

Pewarnaan peta sama dengan pewarnaan titik-titik pada graph hasil pemodelan dari gambar peta tersebut sedemikian hingga tidak ada dua titik berdekatan yang mendapat warna sama.

Langkah-langkah yang dilakukan dalam pemodelan dengan graph ialah menentukan:

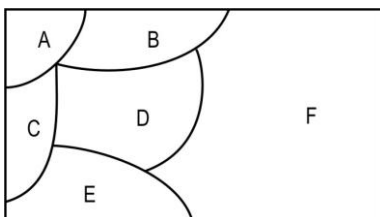
1. Objek apa yang akan dikonversikan sebagai titik graph?
2. Hubungan apa yang dicerminkan oleh sisi-sisi graph? Pasangan titik apa saja yang harus dihubungkan oleh sisi?
3. Merumuskan masalah nyata dalam bahasa teori graph.



TES FORMATIF 2

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

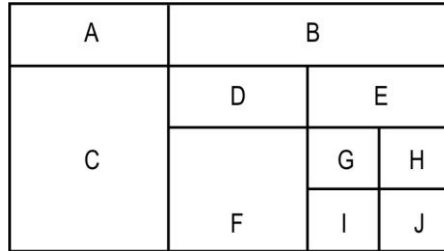
- 1) Graph bipartit lengkap $K_{7,4}$ sisinya (rusuknya) dapat diwarnai minimal
 A. 3 warna
 B. 4 warna
 C. 7 warna
 D. 11 warna
- 2) Graph lengkap K_{10} rusuknya dapat diwarnai minimal dengan
 A. 10 warna
 B. 9 warna
 C. 8 warna
 D. 7 warna
- 3) Peta berikut ini dapat diwarnai minimal dengan



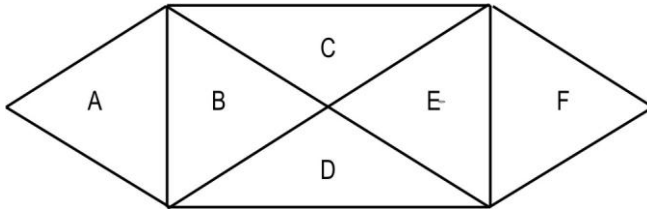
- A. 6 warna
- B. 5 warna
- C. 4 warna
- D. 3 warna

4) Peta di samping dapat diwarnai minimal dengan

- A. 3 warna
- B. 4 warna
- C. 5 warna
- D. 6 warna



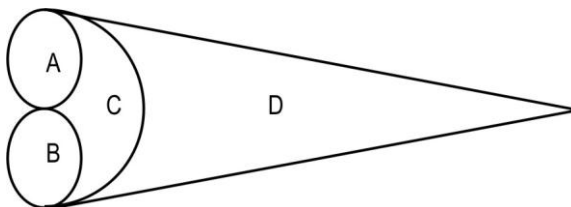
5) Perhatikan gambar peta berikut!



Peta tersebut dapat diwarnai minimal dengan

- A. 6 warna
- B. 4 warna
- C. 3 warna
- D. 2 warna

6) Peta berikut dapat diwarnai minimal dengan

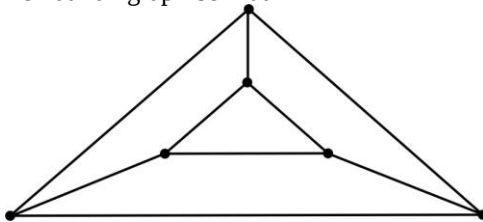


- A. 2 warna
- B. 3 warna
- C. 4 warna
- D. 5 warna

7) Graph lengkap K_{15} rusuknya dapat diwarnai minimal dengan

- A. 12 warna
- B. 13 warna
- C. 14 warna
- D. 15 warna

8) Perhatikan graph berikut ini

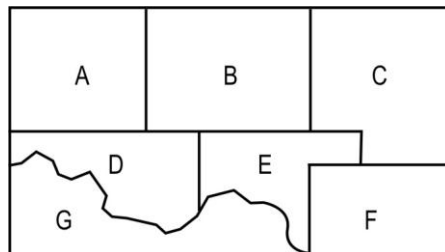


Sisi (rusuk) graph tersebut dapat diwarnai minimal dengan

- A. 2 warna
- B. 3 warna
- C. 4 warna
- D. 6 warna

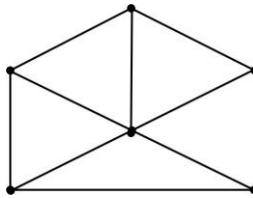
9) Peta berikut ini dapat diwarnai minimal dengan

- A. 7 warna
- B. 5 warna
- C. 3 warna
- D. 2 warna



10) Sisi (rusuk) dari graph berikut dapat diwarnai minimal dengan

- A. 6 warna
- B. 5 warna
- C. 4 warna
- D. 3 warna



Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 2 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 2.

Rumus:

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan yang Anda capai:

90 - 100% = baik sekali

80 - 89% = baik

70 - 79% = cukup

< 70% = kurang

Apabila Anda mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat mengikuti Ujian Akhir Semester (UAS). **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 2, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kunci Jawaban Tes Formatif

Tes Formatif 1

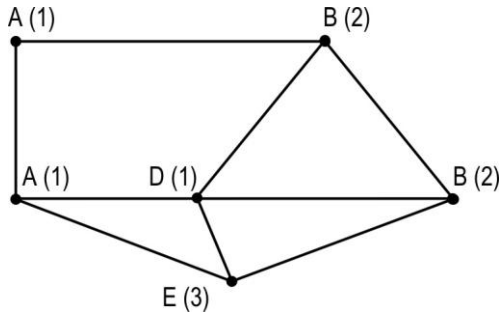
1) C

Titik	V_2	V_1	V_3	V_4	V_5
Derajat titik	4	3	3	3	3
Warna	(1)	(2)	(3)	(2)	(3)

- 2) B Graph lengkap G dengan 5 titik mempunyai bilangan khromatik 5.
- 3) A Titik-titik B, D, E, G, J, dan L diwarnai dengan warna pertama, sedangkan titik-titik A, C, F, H, I, dan K diwarnai dengan warna kedua.
- 4) D A salah, tidak hanya satu titik tetapi bisa lebih dari satu titik
B salah, karena mempunyai bilangan khromatik 2
C salah, karena graph yang hanya mempunyai sisi, minimal mempunyai dua titik, sehingga bilangan khromatiknya minimal 2
D benar, karena graph yang hanya mempunyai titik (tidak mempunyai sisi) memiliki bilangan khromatik 1.
- 5) B Dengan menggunakan algoritma Welsh dan Powell diperoleh 3 warna.
- 6) A Graph bipartit lengkap mempunyai bilangan khromatik 2.
- 7) C Dengan menggunakan algoritma Welsh dan Powell diperoleh 3 warna.
- 8) A Suatu siklus yang memiliki titik yang banyaknya genap, dapat diwarnai dengan dua warna.
- 9) D Bilangan khromatik dari graph lengkap K_7 adalah 7, karena setiap titik dari graph lengkap saling berdekatan.
- 10) B Suatu siklus yang memiliki titik yang banyaknya ganjil, dapat diwarnai dengan 3 warna.

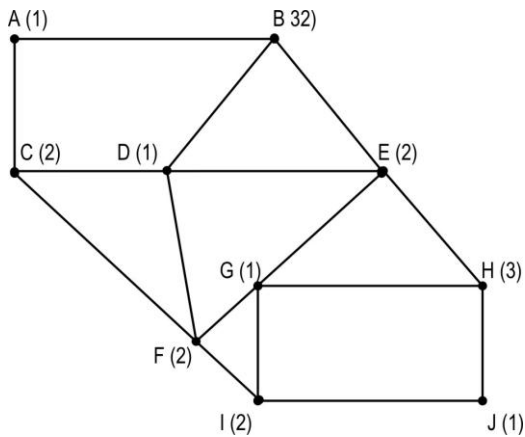
Tes Formatif 2

- 1) C Bilangan khromatik sisi (rusuk) $K_{7,4} = \max(7,4) = 7$.
- 2) B Bilangan khromatik rusuk $K_{10} = 10 - 1 = 9$.
- 3) C Pemodelan graphnya adalah sebagai berikut.



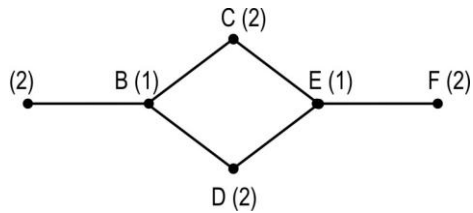
Titik	D	B	C	E	F	A
Derajat titik	4	3	3	3	3	2
Warna	(1)	(2)	(2)	(3)	(4)	(1)

- 4) A Pemodelan graphnya adalah sebagai berikut

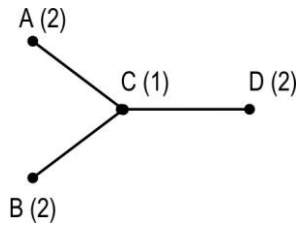


Titik	G	D	E	F	C	I	H	B	A	J
Derajat titik	4	4	4	4	3	3	3	3	2	2
Warna	(1)	(1)	(2)	(2)	(2)	(2)	(3)	(3)	(1)	(1)

5) D Pemodelan graphnya adalah sebagai berikut.

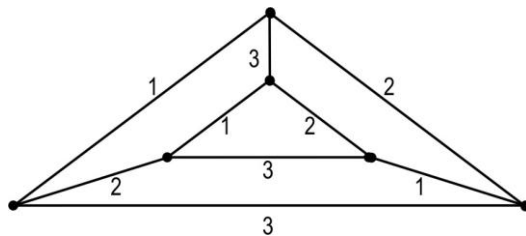


6) A Pemodelan graphnya adalah sebagai berikut.

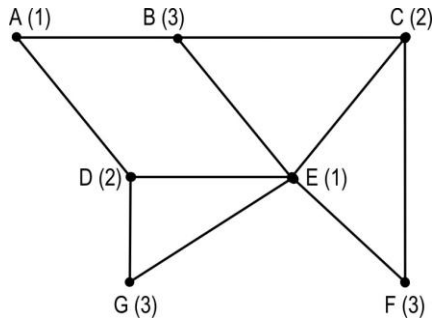


7) D Bilangan khromatik rusuk $K_{15} = 15$.

8) B

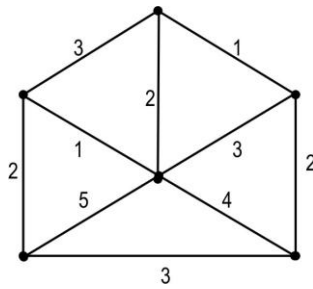


9) C Pemodelan graphnya adalah sebagai berikut.



Titik	E	D	B	C	A	G	F
Derajat titik	5	4	4	3	2	2	2
Warna	(1)	(2)	(3)	(2)	(1)	(3)	(3)

10) B



Daftar Pustaka

- Budayasa, I. K (1997). *Matematika Diskrit I*. Surabaya: University Press IKIP Surabaya.
- Deo, N. (1994). *Graph Theory with Application to Engineering and a Computer Science*. New Delhi: Prentice-Hall International, Inc.
- Harary, F. (1969). *Graph Theory*. California: Addison Wesley Publishing Company.
- Mayeda, W. (1992). *Graph Theory*. New York: John Wiley and Sons, Inc.
- Suryadi, D. (1995/1996). *Materi Pokok Matematika Diskrit*. (Modul 5 dan Modul 6). Jakarta: Universitas Terbuka.
- Suryanto. (1986). *Materi Pokok Pengantar Teori Graph*. Jakarta: Universitas Terbuka.
- Sutarno, H., Priatna, N., dan Nurjanah (2004). *Matematika Diskrit*. Malang: IKIP Malang Press.
- Tirta-Seputro, T. M. H. (1992). *Matematika Diskrit*. (terjemahan). Surabaya: University Press IKIP Surabaya.
- Wilson, R. J. (1985). *Introduction to Graph Theory*. New York: John Wiley and Sons, Inc.

Glosarium

Ajassen

Dua buah titik disebut *ajassen*, jika kedua titik tersebut merupakan titik-titik ujung dari sisi yang sama.

Algoritma

Algoritma merupakan prosedur atau aturan. Contoh: algoritma Welsh dan Powell.

Bilangan Khromatik

Bila suatu graph G dapat diwarnai minimal dengan n warna, maka G dikatakan memiliki *bilangan khromatik* n .

Derajat titik

Derajat titik V yaitu jumlah atau banyaknya sisi yang insiden dengan titik V .

Insiden

Jika sebuah titik V merupakan titik ujung dari sisi E maka V dan E saling berinsidensi atau titik V *insiden* dengan sisi E .

Komputer super

Komputer super merupakan komputer yang mempunyai kapasitas dan kemampuan yang sangat tinggi.

Konjektur

Konjektur merupakan dugaan sementara atau jawaban sementara yang harus ditunjukkan kebenarannya.

Lintasan (path)

Suatu lintasan $u-v$ ($u-v$ path) dalam graph G adalah lintasan yang tidak mengulangi sebarang *sisi* (rusuk) dan tidak mengulangi sebarang *titik* (simpul).

Pewarnaan titik

Mewarnai titik dilakukan dengan cara memberi label pada titik-titik graph sehingga titik yang berdekatan mendapatkan label yang berbeda.

Pewarnaan sisi (pewarnaan peta)

Pewarnaan sisi (pewarnaan peta) sama dengan pewarnaan titik-titik pada graph hasil pemodelan dari gambar peta tersebut sedemikian hingga tidak ada dua titik berdekatan yang mendapat warna sama.

Pewarnaan garis

Pewarnaan garis atau rusuk pada suatu graph adalah penentuan warna rusuk-rusuk suatu graph sehingga setiap rusuk yang berdekatan mendapatkan warna yang berbeda.

Sikel

Sikel adalah suatu sirkuit yang tidak mengulang sebarang titik internalnya (titik dalamnya).

Sirkuit

Lintasan $u-v$, dengan $u = v$ (titik awal sama dengan titik akhir) disebut sirkuit.