

PENALARAN MATEMATIKA

Melalui kegiatan bernalar dalam matematika, diharapkan siswa dapat melihat bahwa matematika merupakan kajian yang masuk akal atau logis. Dengan demikian siswa merasa yakin bahwa matematika dapat dipahami, dipikirkan, dibuktikan, dan dievaluasi. Seperti dinyatakan oleh Silver et al. (1990) bahwa dalam “doing mathematics” melibatkan kegiatan bernalar.

A. Penalaran Induktif

Penalaran induktif melibatkan persepsi tentang keteraturan. Misalnya, untuk mendapatkan kesamaan dari contoh-contoh yang berbeda. Dalam matematika, mendapatkan kesamaan tersebut dapat menjadi dasar dalam rangka pembentukan konsep, yaitu dengan cara mengurangi hal-hal yang harus diingat. Proses tersebut dinamakan abstraksi konsep. Sebagai contoh, dalam penalaran deduktif, hubungan antara fakta dapat diturunkan menjadi konsep baru atau fakta baru bagi penurunan konsep-konsep yang lain. Proses menurunkan tersebut hingga didapat fakta baru atau konsep atau prinsip seringkali dapat dilakukan dengan mengandalkan pada kekuatan bernalar.

Penalaran induktif memainkan peran penting dalam pengembangan dan penerapan matematika. Sebagai fakta, penemuan matematika ada pula yang berawal dari suatu penarikan kesimpulan dengan menerapkan penalaran induktif. Kesimpulan yang ditarik secara induktif tidak selalu dapat dibuktikan secara deduktif. Kesimpulan demikian dinamakan suatu konjektur. Konjektur adalah suatu tebakan, penyimpulan, teori, atau dugaan yang didasarkan pada fakta yang tak tertentu atau tak lengkap.

Penalaran induktif dimulai dengan memeriksa keadaan khusus dan menuju penarikan kesimpulan umum, yang dinamakan proses induktif generalisasi. Penalaran tersebut mencakup pengamatan contoh-contoh khusus dan menemukan pola atau aturan yang melandasinya. Sebagai contoh, hasil kali dua bilangan ganjil adalah ganjil, yang ditemukan melalui pengamatan dari beberapa contoh khusus. Kesimpulan yang ditarik dari contoh khusus tersebut merupakan kesimpulan umum, yaitu hasil kali sebarang dua bilangan ganjil adalah ganjil.

Kesimpulan umum yang ditarik dari jenis induktif generalisasi dapat merupakan suatu aturan, namun dapat pula sebagai prediksi yang didasarkan pada aturan itu. Misalnya, menentukan suku selanjutnya dari suatu barisan bilangan atau barisan gambar. Aturannya dapat dilihat dari jenis pola penyusunan barisan, yaitu pola berulang atau pola tumbuh.

Penalaran induktif yang menunjukkan kegiatan menebak suatu aturan dapat dilakukan dengan menggunakan mesin fungsi sebagai proses kerja dalam menarik suatu kesimpulan. Mesin fungsi terdiri dari masukan, proses, dan hasil. Sebagai contoh, apabila dimasukan bilangan 1, keluar 2; jika dimasukan 2 keluar 4; dan seandainya 3 yang dimasukan ke dalam mesin tersebut, diperoleh keluaran atau hasil 8; dan seterusnya. Selanjutnya, siswa yang belajar dapat menebak suatu hasil apabila diberikan suatu masukan tertentu, atau sebaliknya, yaitu diberikan suatu hasil dari proses mesin, dan siswa diminta menentukan masukannya.

Melalui mesin fungsi dapat dikenali aturan pengerjaan sehingga setiap masukan dapat diketahui hasilnya atau keluarannya. Aturan pengerjaan itu merupakan proses yang diandaikan terjadi dalam mesin. Proses penalaran induktif dapat ditunjukkan pula dengan menggunakan tabel yang berperan seperti komponen mesin dalam sistem mesin fungsi. Misalnya, dalam tabel dua kolom diberikan masukan dan keluaran, kemudian siswa diminta

untuk menentukan masukan lain apabila diberikan keluarannya atau sebaliknya. Atau, diberikan definisi atau aturan untuk mendapatkan keluaran dari masukan, sehingga contoh khusus pada tabel sesuai dengan definisi itu.

Penalaran induktif dapat dilakukan dalam kegiatan nyata, misalnya melalui suatu permainan atau melakukan sesuatu secara terbatas dengan mencoba-coba. Sebagai contoh, permainan Menara Hanoi yang dapat dikompetisikan di antara siswa. Kegiatan tersebut juga dapat dilakukan dengan variabel yang lebih banyak. Kalau pada permainan Menara Hanoi hanya melibatkan satu variabel, yaitu tiang atau tongkat untuk menempatkan lempengan berlubang sehingga tersusun berurutan dari yang paling besar di bawah hingga paling kecil terletak paling atas. Untuk variabel yang lebih banyak, misalnya menebak banyaknya masing-masing dua jenis barang berbeda yang masing-masing mempunyai nilai tertentu. Contohnya, diberikan sejumlah uang tertentu, siswa diminta membeli dua jenis barang yang masing-masing diketahui harganya.

Kesimpulan umum dari suatu penalaran induktif bukanlah merupakan bukti. Hal tersebut dapat dipahami karena aturan umum yang diperoleh ditarik dari pemeriksaan beberapa contoh khusus yang benar, tetapi belum untuk semua kasus. Kesimpulan tersebut boleh jadi valid pada contoh yang diperiksa, tetapi tidak dapat diterapkan pada keseluruhan contoh. Sebagai misal, siswa diminta menebak aturan yang digunakan untuk memilih bilangan 3, 5, 7. Jika aturan itu adalah “suatu barisan bilangan ganjil”, maka aturan itu sesuai dengan contoh. Tetapi, jika contohnya lebih bervariasi, misalnya, 2, 7, 11, maka aturan semula tidak dapat lagi digunakan. Dengan demikian melalui penalaran induktif dapat dihasilkan suatu kesimpulan yang benar berkenaan dengan contoh khusus yang dipelajari, tetapi kesimpulan tersebut tidak terjamin untuk generalisasi.

Penalaran induktif yang dikaji dalam penelitian ini adalah *penalaran analogi* dan *penalaran generalisasi*. Penalaran analogi merupakan kegiatan dan proses penyimpulan berdasarkan kesamaan data atau fakta, sedangkan penalaran generalisasi merupakan penarikan kesimpulan umum dari suatu data atau fakta-fakta yang diberikan atau yang ada. Shurter dan Pierce (Utari, 1987: 40) menyatakan bahwa *analogi induktif* adalah penalaran dari satu hal tertentu kepada satu hal lain yang serupa kemudian menyimpulkannya. Copi et al. dan Soekadijo (Utari, 1987: 41) menyatakan bahwa *generalisasi induktif* yaitu proses penalaran memperoleh kesimpulan umum berdasarkan data empiris.

B. Penalaran Deduktif

Ada dua jenis penalaran deduktif yaitu *kondisional* dan *silogisma* (Matlin, 1994). Penalaran kondisional menjelaskan hubungan “*Jika...maka...*”. Penalaran silogisma merupakan kuantor yaitu jenis penalaran yang menggunakan kata-kata *semua*, *beberapa*, dan *tidak satupun* (Matlin, 1994: 378).

1. Penalaran Kondisional

Penalaran kondisional merupakan hubungan antara kondisi. Jenis penalaran kondisional yang ditelaah dalam penelitian ini mencakup hubungan “*Jika...maka...*”. Ada empat jenis penalaran kondisional yaitu, (1) memperkuat anteseden, (2) memperkuat konsekuen, (3) menyangkal anteseden, dan (4) menyangkal konsekuen. Untuk masing-masing jenis dasar penalaran kondisional tersebut diberikan dalam contoh-contoh berikut ini.

Contoh 1. *Memperkuat anteseden*

Jika n bilangan genap maka ia habis dibagi dua.

n bilangan genap.

Oleh karena itu, n habis dibagi dua.

Contoh 2. Memperkuat konsekuen

Jika a dan $b > 0$ maka $a + b > 0$.

$a + b > 0$.

Oleh karena itu a dan $b > 0$

Contoh 3. Menyangkal anteseden

Jika suatu bangun geometri berbentuk persegi panjang, maka terdapat dua pasang sisi yang sejajar.

Suatu bangun geometri tidak berbentuk persegi panjang.

Oleh karena itu, ia tidak mempunyai dua pasang sisi yang sejajar.

Contoh 4. Menyangkal konsekuen

Jika suatu bangun geometri beraturan a dan tinggi t mempunyai luas $\frac{1}{2} at$ maka bangun itu adalah segitiga.

Suatu bangun geometri beraturan a dan tinggi t bukan merupakan segitiga.

Oleh karena itu luasnya tidak sama dengan $\frac{1}{2} at$.

Jenis penalaran kondisional contoh dua dan contoh tiga merupakan suatu bentuk penarikan kesimpulan yang salah atau tidak valid. Kedua jenis penalaran tersebut masing-masing merupakan bentuk konvers dan invers dari pernyataan implikasi. Sedangkan bentuk penarikan kesimpulan contoh satu dan contoh empat adalah benar atau valid, masing-masing merupakan modus ponens dan modus tolens.

Menguatkan anteseden berarti bahwa “jika ...” sebagai bagian dari kalimat adalah benar. Jenis penalaran ini menuju pada kesimpulan yang valid atau benar.

Menguatkan konsekuen berarti “maka...” sebagai bagian dari kalimat adalah benar. Jenis penalaran ini menuju kesimpulan yang salah atau tidak valid. Penalaran jenis ini

merupakan satu jenis kesalahan penalaran (Bell dan Staines, 1981; Nickerson, 1985). Dengan demikian dalam penalaran logis, jenis penalaran seperti itu tidak dapat dijadikan sandaran dalam bernalar karena hal itu merupakan kesalahan kognitif pada suatu strategi yang digunakan.

Menolak anteseden berarti “jika...” adalah bagian dari kalimat yang salah. Menolak anteseden berarti menuju pada kesimpulan yang salah atau tidak valid.

Menolak konsekuen berarti “maka...” sebagai bagian dari kalimat adalah salah. Jenis penalaran ini menuju kesimpulan yang valid atau benar.

Keempat jenis penalaran kondisional tersebut berbeda dalam kesulitannya. Penguatan anteseden adalah yang termudah sebagaimana dinyatakan oleh Rips (1981), yaitu bahwa sulit membayangkan apa yang harus dikatakan kepada seseorang yang menyatakan bahwa anteseden adalah benar tetapi konsekuennya salah. Taplin's (1971) menyatakan bahwa orang sesungguhnya paling tepat dalam penguatan anteseden, berikutnya dalam penolakan konsekuen, dan terjelek dalam penolakan anteseden serta dalam penguatan konsekuen. Dua jenis penalaran terakhir ini sama jeleknya. Dengan demikian dapat dinyatakan bahwa seseorang adalah baik pada jenis penalaran yang benar, jelek pada penalaran yang tidak benar karena mereka salah meyakini yang benar ini.

2. Penalaran Silogisma

Bentuk umum dari penalaran silogisma adalah dua premis yang berbentuk implikasi serta kesimpulan dari kedua premis itu. Maksudnya, jika premis pertama merupakan implikasi “jika p maka q ” dan premis kedua berbentuk “jika q maka r ”, maka bentuk umum silogisma adalah sebagai berikut.

Premis pertama : $p \rightarrow q$

Premis kedua : $q \rightarrow r$

Kesimpulan : $p \rightarrow r$

Dengan demikian, silogisma terdiri atas dua premis atau pernyataan, ditambah dengan suatu kesimpulan. Silogisma mencakup kata *semua*, *beberapa*, *tidak satupun* atau istilah-istilah lain yang sejenis.

Contoh 1

Beberapa bilangan asli adalah bilangan prima.

Beberapa bilangan prima adalah bilangan ganjil.

Oleh karena itu, beberapa bilangan asli adalah bilangan ganjil.

Contoh tersebut adalah benar. Tetapi ada juga yang tidak benar seperti contoh 2 berikut ini.

Contoh 2

Beberapa bilangan ganjil adalah bilangan prima.

Beberapa bilangan prima adalah bilangan genap.

Jadi, beberapa bilangan ganjil adalah bilangan genap.

Salah satu cara yang efektif untuk menyajikan informasi dalam premis silogisma adalah dengan menggunakan diagram Euler. Diagram Euler menunjukkan bagaimana dua himpunan A dan B dikaitkan satu sama lain. Pernyataan dalam silogisma dapat dinyatakan ke dalam 4 jenis hubungan, (1) semua A adalah B , (2) tidak ada A yang merupakan B , (3) beberapa A adalah B , dan (4) beberapa A bukan B . Kata yang sering membingungkan siswa adalah *beberapa*. Mereka cenderung menafsirkan kata beberapa yang berarti “kurang dari setengahnya” (Begg, 1987).

Melalui penalaran deduktif dapat menyimpulkan informasi lebih banyak daripada penalaran induktif. Artinya, dari keterangan tertentu dapat ditarik kesimpulan tentang hal-hal lain tanpa perlu memeriksanya secara langsung (Donaldson, 1987: 36). Sebagai contoh, selalu dapat ditambahkan satu dari suatu bilangan. Dari keterangan tersebut dapat disimpulkan bahwa tidak ada bilangan terbesar atau bilangan tidak berakhir, melainkan tak terbatas. Walaupun hal tersebut sukar bagi siswa SLTP namun mereka dapat menyatakan bahwa barisan bilangan itu tidak dapat didaftarkan (Gelman, 1982).

Penalaran deduktif dimulai dengan premis-premis (proposisi umum) yang memunculkan sesuatu untuk dapat ditarik kesimpulan. Penalaran ini melibatkan penarikan kesimpulan dari apa yang diberikan (Ennis, 1969). Sebagai contoh, perkalian dua bilangan ganjil selalu menghasilkan bilangan ganjil (premis umum); 5 dan 3 adalah bilangan ganjil (premis kedua); Oleh karena itu, hasil kali 5 dan 3 haruslah ganjil.

Bukti deduktif dapat menentukan apakah suatu konjektur yang ditarik melalui suatu intuisi atau induksi secara logis konsisten dan apakah ia hanya berlaku untuk kasus-kasus tertentu atau kasus yang lebih umum. Meskipun demikian, penalaran deduktif memiliki keterbatasan. Maksudnya bahwa kesimpulan yang dibuktikan dengan penalaran deduktif apakah benar-benar secara universal.

Penalaran deduktif menjamin kesimpulan yang benar jika: (a) premis dari argument adalah benar, dan (b) argument adalah valid (logis). Namun, kesimpulan boleh jadi benar hanya dalam situasi tertentu. Misalnya jika premis tidak benar maka kesimpulan mungkin akan salah.

Penalaran deduktif dapat dikerjakan secara murni dan tak murni. Argument yang valid dapat menghasilkan kesimpulan yang benar, argument yang tidak valid dapat

menghasilkan kesimpulan yang masih dapat dipertanyakan. Sayangnya, argument yang tidak valid dapat pula secara sepintas masuk akal.

Sebagai contoh, pameran iklan, sales, pengacara, politisi, dan yang lainnya dimana pekerjaannya berkaitan dengan meyakinkan orang, kadangkala memelisetkan logika. Perhatikan contoh berikut: premis itu (*Kris Dayanti* nampak tetap bugar, mulus, dan ramping alami, cantik menarik, lincah dan sensual baik di panggung maupun dalam kehidupan sehari-hari, karena mengikuti *program Impression*) adalah sama dengan klaim yang tidak valid sehingga jika seseorang mengikuti *program Impression*, maka ia dapat seperti *Kris Dayanti*. Contoh tersebut menjanjikan kecantikan berdasarkan asosiasi. Orang-orang yang cantik seperti *Kris Dayanti* mengikuti *program Impression*. Jika seseorang mengikuti program *Impression*, maka ia akan cantik juga.

Logika yang baik akan membantu terhadap suatu hal. Perhatikan dalil geometri: Jarak terpendek antara dua titik merupakan suatu garis lurus. Apakah kebenaran ini berlaku pada semua situasi? Banyak orang percaya jawaban itu adalah ya. Apakah teorema itu berlaku pada permukaan dari bola (yaitu sewaktu berjalan dari suatu titik di permukaan bumi ke titik yang lain)? Sebenarnya itu tidak berlaku. Jarak terpendek antara dua titik dalam keadaan seperti itu merupakan suatu busur. Suatu dalil benar dalam kondisi tertentu, terdefinisi dengan baik menurut konteks. Di luar konteks itu teorema boleh jadi tidak dapat diterapkan.

C. Contoh Kegiatan Penalaran dalam Matematika

Berikut ini beberapa kegiatan penalaran seperti penyusunan dan pengelompokan, dan eksplorasi pola-pola, penalaran deduktif, dan mengevaluasi logika.

Peran Penalaran dan Pembuatan Konjektur.

Siswa pada jenjang pendidikan dasar dan menengah dapat menggunakan penalaran induktif serta pembuatan konjektur-konjektur. Kegiatan-kegiatan penalaran diberikan dengan tujuan:

(1) Memberikan kesempatan kepada siswa agar mereka dapat mempraktekkan penggunaan keterampilan-keterampilan penalaran dan pembuatan konjektur-konjektur.

Dalam memperoleh suatu hasil, siswa juga harus belajar melalui proses matematika, dengan menggunakan penalaran dan pembuatan konjektur. Pengalaman-pengalaman sehari-hari dalam mencari pola-pola (penalaran induktif), memformulasikan konjektur-konjektur mengenai pola-pola, mengevaluasi konjektur menggunakan penalaran logika (deduktif), dan mencari informasi yang banyak, membantu siswa memahami proses dalam mengerjakan matematika (Silver, 1990). Apabila siswa diberikan kesempatan untuk menggunakan penalaran induktif dan deduktif, serta membuat konjektur-konjektur matematika, maka mereka akan lebih mengenal matematika (Silver, 1990: 12). Lebih jauh, keterampilan-keterampilan proses seperti itu penting untuk mendorong tumbuhnya kemampuan matematika lain yang diperlukan sebagai tujuan dalam pembelajaran, seperti melakukan penyelesaian berbagai masalah.

(2) Mendorong tebakan yang edukatif. Takut akan salah juga menjadikan siswa takut membuat tebakan-tebakan (mengusulkan konjektur-konjektur) dalam kelas (Silver, 1990).

Kebanyakan siswa takut mengungkapkan kebingungan dan ketidaksetujuan mereka. Ketakutan ini seringkali bercampur baur dengan pengalaman mereka terdahulu dalam matematika. Adalah penting untuk menciptakan lingkungan kelas dimana siswa tidak takut salah.

Guru seringkali tidak mendorong atau bahkan membatasi tebakan-tebakan (misalnya guru mengatakan, “Kamu itu baru menebak”). Guru perlu membantu siswa memperhatikan bahwa jawaban yang tidak benar adalah bagian dari proses belajar dan karena itu membuat tebakan terdidik atau konjektur-konjektur adalah penting. Siswa perlu mengetahui bahwa yang penting adalah hanya dengan membuat tebakan yang baik, memecahkan dan memperbaikinya, dan mendukungnya dengan fakta-fakta, sehingga setiap siswa benar-benar dapat mengerjakan matematika. Hal yang lain hanyalah sekedar ingatan. Matematika dalam hal seperti itu memerlukan keinginan untuk mengambil resiko dengan cara menawarkan untuk tebakan (Silver, 1990: 12).

(3) Membantu siswa memahami nilai jawaban negatif dalam menurunkan suatu jawaban.

Siswa perlu memahami bahwa tebakan yang tidak benar dapat menghilangkan kemungkinan-kemungkinan tertentu dari pertimbangan selanjutnya. Mereka juga perlu menghargai bahwa efektifitas suatu tebakan tergantung pada berapa banyak kemungkinan yang hilang. Sebagai contoh, dalam permainan suatu kuis dengan sejumlah pertanyaan, adalah lebih baik dimulai dengan menanyakan tentang kategori-kategori umum.

Siswa harus memahami bahwa penalaran induktif dan konjektur, sebagaimana bukti-bukti logis (penalaran deduktif) memainkan peranan yang penting dalam matematika.

(4) Siswa perlu memahami bahwa pencarian pola-pola, keteraturan-keteraturan, hubungan, dan urutan merupakan inti dari matematika.

Siswa perlu memahami bahwa aturan matematika harus dapat diterapkan pada semua situasi. Jadi, sebelum penemuan dapat dipandang sebagai suatu aturan, ia harus diuji dengan berbagai macam masalah, situasi, atau contoh-contoh. Apabila ia tidak lolos dari pengujian itu, maka keterbatasan atau pengecualiannya didefinisikan, atau penemuan itu tidak dapat dijadikan suatu aturan.

Lebih jauh, siswa perlu mengenal bahwa apabila suatu pola berlaku pada banyak contoh, selalu mungkin menemukan pengecualian. Jadi, pola-pola harus ditelaah lebih mendalam, seperti dengan menggunakan penalaran deduktif.

Kegiatan 1: Mendorong Siswa untuk Menilai Contoh-contoh Tambahan

Pak Amir mengenalkan pada siswa kelas tiga SLTP suatu permainan Poison dan menantang mereka mencari strategi untuk menang. Ia mendorong mereka untuk bekerja menggunakan kasus-kasus sederhana (sedikit jumlah itemnya), dan membuat tabel dan mencari suatu pola.

<i>Banyak item</i>	1	2	3	4	5	6	7	8
<i>Pemain yang menang</i>			1	2	1			

Beberapa kelompok menyimpulkan bahwa apabila jumlah item genap, maka pemain akan memilih berpindah kedua, jika jumlah item ganjil, maka pemain memilih untuk menuju pertama. Untuk melihat apakah pengamatan ini benar atau salah, Pak Amir bertanya, “Siapa yang kalian pikir akan menang apabila ada enam item?” Siswa meramalkan bahwa pemain kedua akan menang. Pak Amir kemudian mengajak mereka untuk memeriksa dugaan mereka dan memeriksa kasus-kasus yang lebih besar dan lebih besar lagi.

Pertanyaan untuk Refleksi

1. Apakah dugaan siswa tentang enam item benar atau salah?
2. Pelajaran apa tentang penalaran induktif yang Pak Amir coba untuk membantu siswanya menghargai dengan cara memberitahukan kepada mereka untuk membuat dugaan dan memeriksanya?

3. Berikut ini adalah deskripsi atau uraian Kania tentang pola yang ditemukan kelompoknya. Apakah pola ini secara keseluruhan benar? Pola bilangan yang kami dapatkan adalah 2 1 1 2 1 1 2 1 1 2, dari satu hingga sepuluh. Satu (1) anda ingin menjadi yang pertama, dua (2) anda ingin yang kedua dan seterusnya.

Penyusunan dan Pengelompokkan

Siswa harus dikenalkan pada kegiatan penyusunan dan pengelompokkan *konkret* sejak mereka baru mulai masuk sekolah.

Mengenalkan bahasa logika. Pengembangan penalaran logis sangat terkait dengan pemahaman siswa mengenai kata-kata penting tertentu, seperti: *semua*, *beberapa*, *tidak*, *dan*, *atau*, dan *jika*. Kegiatan penyusunan dan pengelompokkan yang *konkret* dapat menjadi tak berarti dalam membantu siswa mengkonstruksi pemahaman mengenai istilah-istilah seperti itu (perhatikan Kegiatan 2).

Kegiatan 2: Pengelompokkan Kelas Kami

Tanyakan kepada kelas, “Bagaimana kita membagi kelas menjadi dua kelompok?”. Siswa mungkin akan menawarkan berbagai kriteria seperti perempuan atau laki-laki, di sebelah kiri atau kanan, dan tinggi atau pendek. Contoh yang terakhir ini muncul secara wajar dalam suatu perbincangan tentang “Apa yang dimaksud dengan tinggi?” dan memberikan definisi secara jelas.

Beberapa siswa mengusulkan kriteria seperti berpakaian biru atau *tidak* berpakaian biru, usia 14 tahun atau *bukan* 14 tahun. Perhatikan bahwa kriteria seperti wanita atau pria dapat juga diungkapkan dengan wanita atau *bukan* wanita. Dalam istilah formal, *bukan* menunjukkan negasi dari suatu ciri.

Berikanlah kepada kelas agar menyusun diri mereka sendiri menurut satu kriteria. Sebagai contoh, wanita berdiri dan menuju ke sisi ruangan sebelah kiri, dan pria berdiri

menuju sisi ruangan sebelah kanan. Perhatikan bahwa *semua* siswa di kelas itu terdiri dari siswa wanita *atau* pria, sehingga *beberapa* siswa adalah wanita dan sisanya adalah pria, dan bahwa *tidak seorangpun* dari siswa itu yang masih duduk atau tetap dikursinya. Tanyakan apakah *semua* yang *bukan* wanita adalah pria? Kegiatan ini memiliki satu ciri dan negasinya, setiap unsure (siswa) dalam suatu himpunan (kelas) harus berada dalam satu himpunan bagian (wanita) atau yang lain (pria). Hal itu menunjukkan bahwa suatu himpunan merupakan jumlah dari himpunan bagian-himpunan bagiannya.

Mintalah kelas memperhatikan kriteria lain. Apakah dua ciri yang benar-benar terpisah selalu membagi secara sempurna suatu himpunan atau kelas? Perhatikan kriteria berikut: Yang paling muda atau yang paling tua dalam suatu keluarga, berambut hitam atau berambut putih; dan berjalan kaki atau naik angkutan umum ke sekolah pagi ini. Mintalah kelas untuk memperhatikan seperti, apakah semua anak yang tidak berjalan kaki ke sekolah pagi ini menggunakan angkutan umum?

Apakah dua kriteria selalu saling lepas? Perhatikan kriteria berikut: Mempunyai seekor kucing atau mempunyai seekor kelinci; memiliki saudara laki-laki atau memiliki saudara perempuan; berjalan kaki ke sekolah atau naik angkutan umum. Apakah dengan memiliki seekor kucing berarti seorang anak tidak memiliki seekor kelinci?

Menggali kesempatan-kesempatan dimana penyusunan dan pengelompokkan secara konkret membantu siswa. Berbagai kegiatan penyusunan dan pengelompokkan akan tumbuh dari kebutuhan real. Banyak situasi sehari-hari yang memerlukan penyusunan dan pengelompokkan. Sebagai contoh, seorang guru meminta siswa untuk menyusun krayon ke dalam kotak berdasarkan warna atau himpunan warna-warna yang diinginkan.

Kegiatan 3: Pembelajaran Penelompokkan Terpadu

Banyak kesempatan dalam bidang lain untuk menyusun dan mengelompokkan. Dalam sains, siswa mungkin menyusun sesuatu ke dalam dua kelompok, misalnya sesuatu yang berputar atau tidak berputar, bersifat magnet atau tidak bersifat magnet, serta makanan berkolertelur tinggi atau rendah. Contoh-contoh dengan tiga atau lebih kategori mencakup pengelompokkan batuan seperti endapan, batuan beku karena perapian, atau metamorfik.

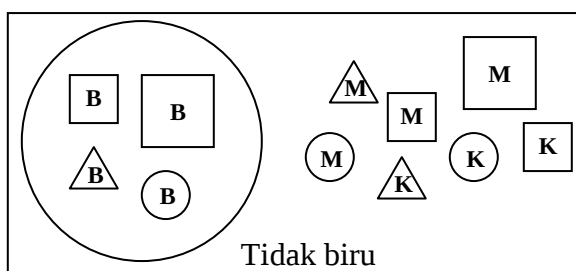
Menggunakan diagram Venn untuk meningkatkan keterampilan pengklasifikasian dan kemampuan penalaran. Pada umumnya, siswa memiliki pangalaman pengklasifisian secara informal. Meskipun demikian, siswa perlu menguasai keterampilan pengelompokkan formal seperti mengetahui cara mengelompokkan benda-benda. Diagram Venn, yang digunakan dalam kaitan dengan objek nyata atau mengenal balok-balok sangat berguna untuk tujuan ini (perhatikan Kegiatan 4).

Kegiatan 4: Membimbing Siswa Belajar tentang Diagram Venn

Diagram Venn bisa terdiri dari suatu loop (lengkungan tertutup) yang terbuat dari benang atau di gambar pada kertas gambar.

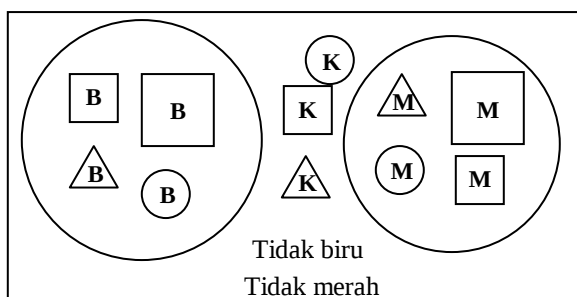
Pengelompokkan benda-benda menurut satu ciri

Misalnya terdapat bermacam-macam balok, dengan warna berbeda-beda. Siswa diminta untuk memilih balok-balok berwarna biru yang beratribut. Mintakan kepada mereka untuk memasukkan balok-balok biru ke dalam loop itu. Perhatikan bahwa semua balok-balok di luar loop *bukan berwarna biru* (“tidak biru”). Siswa diminta untuk memberi nama diagram Venn yang mereka buat seperti ditunjukkan berikut ini.



Pengelompokkan benda-benda berdasarkan dua ciri yang saling lepas

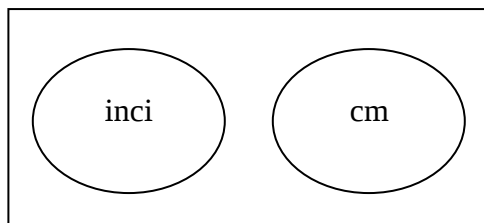
Selanjutnya, tanyakan kepada siswa bagaimana mereka menyusun benda-benda, misalnya berdasarkan dua warna. Siswa secara khusus akan mengalami sedikit kesulitan berkenaan dengan dua loop. Hal itu akan berguna dalam rangka memberi nama masing-masing diagram Venn seperti ditunjukkan di bawah ini. Hal ini menjadikan dasar untuk memahami langkah selanjutnya.



Penyajian dua ciri yang tidak saling lepas

1. Contoh berikut digunakan dalam belajar penemuan *Mathematics Their Way* (Baratta-Lorton, 1976):

Amelia mengambil tugas penyusunan melalui kotak yang berisi penggaris-penggaris. Ia menemukan penggaris-penggaris dalam ukuran inci dan penggaris dalam ukuran centimeter. Untuk membantunya berkenaan dengan tugas penyusunan itu, ia mengambil dua tali, satu tali untuk penggaris dengan ukuran inci dan satu tali lagi untuk penggaris dengan ukuran centimeter.



Di dalam kotak itu, Amelia menemukan setumpuk penggaris yang memiliki *kedua* ukuran itu yaitu centimeter dan inci. “Dimana saya harus menempatkannya?”

- a. apa yang dapat Amelia lakukan dengan penggaris yang memiliki kedua ukuran itu apabila tidak ada tali lagi?
 - b. Irma, mengusulkan meletakkan penggaris dengan dua macam ukuran itu diantara kedua loop yang ada. Nilailah usulan ini berdasarkan logika diagram Venn.
 - c. Dimana penggaris yang memiliki kedua sistem ukuran itu ditempatkan?
2. Buatlah diagram Venn untuk menyusun balok-balok beratribut ke dalam balok-balok persegi, balok-balok biru, dan yang lain. Beri nama masing-masing bagian dari diagram itu. Fajar, mengusulkan penggunaan tiga loop. Apakah hal ini perlu? Mengapa atau mengapa tidak?

Penyajian tiga ciri yang tidak saling lepas

Buat diagram Venn untuk menyusun satu himpunan balok-balok beratribut ke dalam balok-balok persegi, balok-balok biru, balok-balok besar, dan yang lainnya.

- a. Tunjukkan dimana persegi kecil tebal dan berwarna biru ditempatkan!
- b. Tunjukkan dimana persegi besar tipis dan berwarna biru ditempatkan!
- c. Tunjukkan dimana persegi besar, tipis, dan berwarna kuning ditempatkan!

Penggunaan diagram Venn untuk mengilustrasikan suatu hubungan hirarkis

Tunjukkan bagaimana suatu diagram Venn dapat digunakan untuk menyusun balok-balok ke dalam ciri berikut: segitiga, segitiga berwarna biru, dan segitiga berwarna biru yang besar.

1. Siswa disuruh membuat diagram Venn untuk menunjukkan bahwa siswa itu mempunyai seorang saudara laki-laki dan saudara perempuan. Sebelum kelas itu dapat memutuskan suatu penyajian, Aris mencatat, “Tetapi saya memiliki keduanya yaitu saudara laki-laki dan saudara perempuan”.
- a. Bagaimana siswa lain menanggapi komentar itu?

- b. Bagaimana diagram Venn dikonstruksi, dan dimana seharusnya Aris ditempatkan dalam diagram itu?
 - c. Komentar aris menimbulkan pertanyaan guru, “Bagaimana kalau hanya seorang anak?”. Dimana yang hanya seorang anak ditempatkan pada diagram Venn itu?
2. Diagram Venn digunakan untuk mengilustrasikan dua ciri yang tidak saling lepas: *merah* dan *segitiga*.
- a. Dimana suatu balok yang merah *dan* berbentuk segitiga ditempatkan dalam diagram Venn itu?
 - b. Dimana suatu balok yang merah *atau* berbentuk segitiga ditempatkan?
 - c. Gabungkan dari dua himpunan direpresentasikan dengan situasi di atas yang mana (a atau b) berdasarkan istilah, *dan* atau *atau*?
 - d. Irisan dari dua himpunan disajikan dalam situasi apa (a atau b) berdasarkan istilah, *dan* atau *atau*?

Kegiatan 5: Mendiagramkan Kelas Kami Menggunakan Diagram Venn

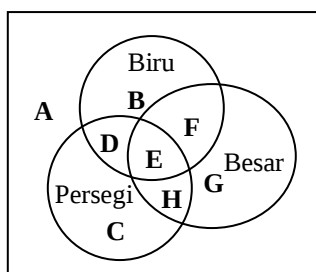
Setelah siswa dikenalkan dengan berbagai cara penggunaan diagram Venn, mereka diminta untuk membuat diagram mereka sendiri. “Mendiagramkan kelas kami” secara esensi adalah “Mengelompokkan kelas kami” dengan menggunakan suatu diagram Venn. Guru dapat menanyakan berbagai kriteria pada papan tulis: umur (misalnya, di atas 12 tahun, di atas 13 tahun, di atas 14 tahun), penyakit (misalnya, berpenyakit malaria atau tidak), memiliki hewan berkumis (kucing, kelinci, yang lainnya), saudara kandung (laki-laki, perempuan) dan seterusnya. Bersama-sama dengan siswa, dapat membantu bagaimana mengkonstruksi masing-masing diagram Venn, termasuk berapa banyak loop diperlukan dan dimana loop berpotongan atau tidak atau termuat.

Setelah berbagai diagram dibuat, masing-masing kelompok dapat menggambarkan diagram Venn pada kertas gambar dan memperlihatkan di depan kelas, dimana masing-masing anggota kelas ditempatkan pada diagram itu. Kemudian kelompok itu dapat mewarnai diagram mereka (misalnya loop saudara perempuan diwarnai dengan kapur berwarna kuning, loop saudara laki-laki dengan biru, irisan berwarna hijau). Masing-masing kelompok dapat juga merangkum temuan mereka. Diagram-diagram itu kemudian dapat ditampilkan.

Kegiatan 6 menggambarkan suatu permainan yang dapat digunakan untuk mempraktekkan interpretasi diagram Venn.

Kegiatan 6: Dimana Saya Ditempatkan?

Permainan ini adalah praktek interpretasi diagram Venn. Masing-masing kelompok memerlukan satu himpunan balok-balok beratribut, salinan dari suatu diagram Venn dengan masing-masing bagian dari diagram itu diberi nama dengan suatu huruf, dan pelakat huruf. Diagram itu ditunjukkan di bawah ini.



Guru atau kelompok pemain lain memilih dan menunjukkan suatu balok beratribut (misalnya, persegi merah besar). Masing-masing tim memutuskan dimana balok harus ditempatkan dalam diagram itu. Setelah mencapai suatu kesepakatan, kelompok itu kemudian memilih pelakat huruf yang sesuai. Apabila kelompok pemain itu menyebut suatu suara, anggota kelompok mengangkat pelakat huruf yang dipilih oleh kelompok itu. Pemain itu dapat mencatat masing-masing suara berikutnya hingga nama-nama kelompok

itu dituliskan pada papan tulis. Ketidaksesuaian dapat didiskusikan. Setelah ditentukan jawaban yang benar, kelompok dengan jawaban yang benar mendapat suatu angka.

Pola-pola

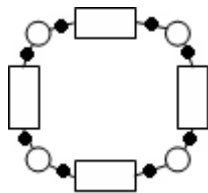
Sebagai suatu aturan, kegiatan dimulai dengan pola-pola menggunakan bentuan benda konkret dan secara bertahap memperkenalkan pola yang lebih luas.

Membantu siswa melihat berbagai macam pola yang luas. Terdapat keteraturan dalam peristiwa-peristiwa (misalnya, makan siang pada pukul 12.30 setiap hari), pakaian (misalnya, rancangan seragam batik yang bermotif), ruang (misalnya, sesuatu “tumbuh” lebih kecil dengan jarak), dan bilangan (misalnya empat kelompok dari tiga dan tiga kelompok dari empat, yang keduanya adalah duabelas). Pola-pola visual merupakan contoh yang baik untuk memulai kegiatan ini bersama siswa. Pola-pola suara (misalnya, musik atau ritme) dan pola-pola gerakan (misalnya, pola berdiri, pola berjalan, pola duduk) adalah juga contoh yang baik bagi siswa. Bilangan dan pola-pola aritmetika dapat diperkenalkan pada saat itu.

Siswa didorong untuk menyalin, menemukan (analisis, rekognisi, perluasan, penguraian), dan membuat pola-pola. Siswa dapat diperkenalkan untuk menyalin, menemukan, dan menciptakan pola-pola, dalam aturan itu (DeGuire, 1987). Penyalinan suatu pola merupakan tugas yang relatif sederhana dan dapat dilakukan dengan suatu kegiatan seni atau kerajinan (perhatikan Kegiatan 7).

Kegiatan 7: Replikasi pola-pola sebagai Kegiatan Seni atau Kerajinan

Siswa dapat mereplikasikan pola-pola relatif sederhana untuk membuat kalung atau dekorasi (perhatikan ilustrasi di bawah ini). Tingkatan siswa yang lebih tinggi dapat diminta untuk mereplikasikan rancangan-rancangan yang lebih sulit



Mengidentifikasi atau menemukan suatu pola sebenarnya melatih siswa untuk menganalisis dan mengenali suatu pola. Untuk melihat bahwa siswa mampu mengidentifikasi suatu pola, mereka dapat diminta untuk memperluas atau menguraikannya. Menemukan pola-pola dapat dilatih dengan berbagai aktivitas dan permainan-permainan. Prediksi pola (perhatikan Kegiatan 8), misalnya, memuat pola untuk menentukan apa yang muncul setelah itu.

Kegiatan 8: Prediksi Pola

Objek dari prediksi pola adalah memprediksi apa yang muncul selanjutnya. Jawaban-jawaban itu dapat ditempatkan pada bagian belakang kartu sebagai permainan secara individual atau kelompok.

	Pengulangan Pola (pengulangan-pengulangan inti)	Pertumbuhan Pola (pertumbuhan-pertumbuhan inti)
Warna		
Bentuk		
Arah		
Ukuran		
Bilangan	1 2 3 1 2 3 1 2 3	1 1 2 1 2 3 1 2 3 4

Membuat pola-pola oleh siswa sendiri dapat memberikan dorongan bagi mereka.

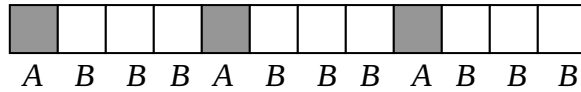
Membuat siswa mencari pola-pola, mendorong mereka untuk mengidentifikasi pola-pola “inti”. Secara garis besarnya terdapat dua jenis pola-pola (a) berulang atau pengulangan pola-pola, dan (b) pola-pola pertumbuhan atau berurutan. Seperti diagram dalam Kegiatan 8 mengilustrasikan, “*pengulangan pola-pola*” yang terdiri dari pengulangan inti, sementara “*pertumbuhan pola-pola*” memiliki suatu inti yang tumbuh. Untuk menghindari ketidakjelasan, inti yang lengkap, bukan persial, yang digunakan dalam contoh-contoh itu. Selanjutnya, dalam pengulangan pola-pola, suatu inti harus diulang sekurang-kurangnya tiga kali untuk memberikan contoh-contoh pola yang baik. Pengidentifikasian pola-pola berulang sederhana dapat diperkenalkan sejak dini. Walaupun beberapa pola-pola pertumbuhan secara mudah dapat dikenali (yakni, pola tangga dari satu balok, dua balok bertumpuk, tiga balok bertumpuk, dan seterusnya), pola-pola demikian secara umum lebih sukar bagi anak untuk memahaminya daripada pola-pola berulang. Sebagai suatu aturan, maka pola-pola berulang diperkenalkan lebih dulu, baru kemudian setelah itu diperkenalkan pola-pola pertumbuhan.

Kegiatan-kegiatan pola dengan menggunakan benda konkret. Bekerja dengan benda konkret lebih mudah dengan pendekatan mencoba-coba. Siswa benar-benar menikmati dengan meneruskan pengulangan pola-pola, sesuatu lebih mudah dilakukan dengan benda-benda manipulatif daripada buku lembar kerja siswa.

Kegiatan 9: Penggeneralisasian Pola-pola

Bagian I: Menggunakan Huruf-huruf untuk Mencari Pengulangan Pola-pola

Gambar berikut ini adalah pengulangan pola yang dapat dibuat dengan menggunakan balok-balok tersusun. Perhatikan bahwa masing-masing unsur yang berbeda (warna) diberikan huruf yang berbeda. Inti dari tampilan yang pertama (ABBB) adalah jelas.



Bagaimanapun, berbagai pengulangan pola-pola mungkin kurang jelas. Gunakan huruf untuk mengidentifikasi inti dari pengulangan pola-pola berikut.

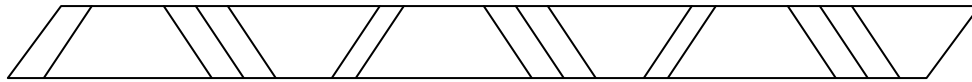
1. Tepuk tangan (T) dan jentikkan jari (J):

T, J, T, T, J, T, T, T, J, T, T, J, T, T, T, J, T, T, J, T, T

2. Bentuk-bentuk kertas:



3. Balok-balok pola:



4. Korekapi:

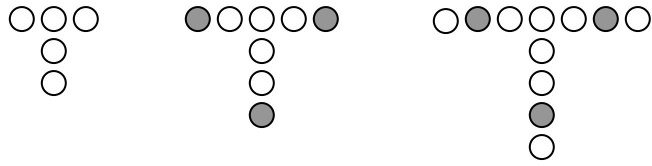


Bagian II: Penggunaan Huruf untuk Mengidentifikasi Pola-pola Berulang Umum

1. Gunakan huruf untuk memberi kode pengulangan pola-pola dalam Kegiatan 8. Apa yang kalian lihat? Bagaimana menggunakan huruf untuk memberi kode pengulangan pola-pola dalam membantu siswa memperluas pikiran mereka tentang pola-pola?
2. Mana dari pola-pola musik berikut yang paling mirip berkenaan dengan pengulangan pola warna yang diilustrasikan dalam Kegiatan 8?
 - (a) do, re
 - (b) do, re, do
 - (c) do, re, mi
 - (d) do, re, mi, fa
 - (e) do, do, do

Bagian III: Mentranslasikan Pola-pola Fisik Pertumbuhan

Secara berurutan huruf T dapat dibuat dengan cara menambahkan suatu penghitung kepada masing-masing dari tiga yang terakhir sebelumnya.



(Perhatikan bahwa pola ini dapat juga disajikan dengan gambar). Berapa banyak penghitung diperlukan untuk membuat yang berikutnya (yang keempat) dari huruf T? Berapa banyak diperlukan penghitung untuk membuat huruf T kesepuluh?

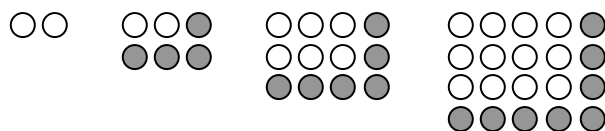
Walaupun pertanyaan di atas dapat dijawab dengan menggunakan penghitung untuk membuat model-model konkret dari huruf T yang keempat dan kesepuluh, cara lain dapat dilakukan dengan membuat tabel dan mencari suatu pola. Guru dapat mengarahkan dengan pendekatan yang lebih abstrak dengan memberikan kepada siswa hanya dengan 11 penghitung yang diperlukan untuk membuat huruf T ketiga.

Bilangan Segitiga	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Jumlah Penghitung										

1. Apa pola bilangan dari tabel itu?
2. Berapa banyak penghitung akan diperlukan untuk huruf T kesepuluh?

Bagian IV: *Penggeneralisasian Pola-pola Tumbuh*

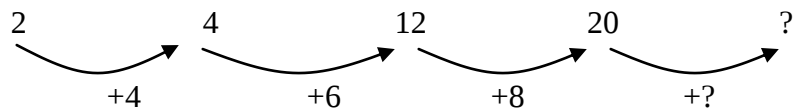
Perhatikan pola visual persegi panjang berikut!



Pola ini dapat disarikan dalam bentuk data numeric dalam sebuah tabel berikut.

Bilangan Persegipanjang	1	2	3	4	5	...	500
Jumlah Penghitung							

Salah satu cara untuk menentukan banyak bilangan untuk persegipanjang kelima adalah dengan memeriksa hubungan antara banyak penghitung:



Sehingga dari pola itu muncul (4, 6, 8, ...), akan muncul 10 yang harus ditambahkan pada banyak penjumlahan sebelumnya, yaitu 20, untuk menentukan banyak penghitung pada persegipanjang kelima.

Akan diperlukan banyak waktu untuk menentukan banyak penghitung dalam persegipanjang ke-500 dalam barisan itu. Untungnya, ada cara lain yaitu dengan menggunakan suatu tabel untuk membuat suatu prediksi: menentukan hubungan antara dua himpunan bilangan pada tabel itu. Dalam tabel di atas, misalnya, menentukan aturan transformasi banyak persegipanjang ke dalam banyak penghitung: aturan bahwa 1 ditransformasikan ke 2, 2 ke 6, 3 ke 12, 4 ke 20 dan seterusnya. Walaupun hubungan seperti itu lebih sulit daripada mendapatkan hubungan diantara banyak penghitung, sekali ditemukan, aturan itu dapat digunakan untuk menentukan penghitung yang diperlukan untuk sebarang persegipanjang dalam barisan itu, termasuk yang ke-500.

1. a. Apa hubungan antara bilangan persegipanjang dan banyak penghitung yang diperlukan? Berikan jawaban kalian secara umum (rumus aljabar).
 b. Berapa banyak penghitung yang diperlukan untuk mengkonstruksi persegipanjang yang ke-500 dalam barisan itu?
2. Dalam beberapa kasus, salah satu cara untuk mencari aturan adalah memperhatikan konstanta apa yang tersisa dari kasus demi kasus dan berapa perubahannya. Untuk model-model T yang berurutan, yang digambarkan dalam bagian III di atas, inti dari konstanta adalah 5; T yang kedua ditambahkan 3 kepada inti itu; T yang ke 3

ditambahkan 6; dan seterusnya. Secara Aljabar ini dapat dituliskan sebagai berikut:

$$5 + 3(n - 1) = 5 + 3n - 3 = 3n + 2.$$

Dari suatu tabel, dapat disimpulkan suatu aturan yang dapat dijadikan untuk memprediksi secara informal atau formal. Perhatikan masalah berikut.

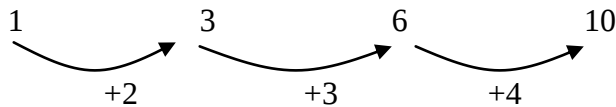
Masalah Bersalaman

Jika setiap orang dalam suatu kelas yang jumlah siswanya 40 orang bersalaman dengan setiap orang lain dalam kelas itu, berapa banyak salaman akan terjadi?

Data untuk kasus yang paling sederhana disajikan dalam tabel di bawah ini.

Banyak anak dalam kelas	2	3	4	5
Banyak salaman	1	3	6	10

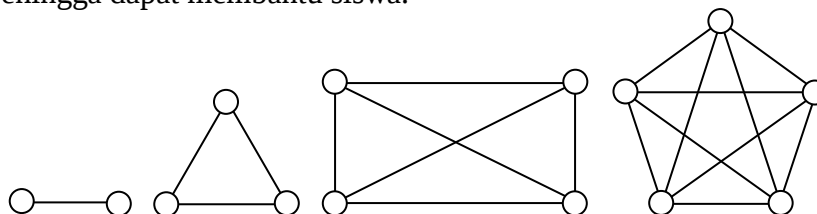
Siswa akan keliru menggunakan hubungan yang nampak jelas, diantara banyak salaman yang terjadi:



Dengan menggunakan relasi ini mereka dapat memperluas tabel itu dan secara informal menyelesaikan masalah itu. Siswa perlu memahami, walaupun ada cara lain yang formal yang lebih ampuh untuk menggunakan suatu tabel untuk membuat suatu prediksi: menentukan aturan hubungan antara dua himpunan bilangan dalam tabel.

Membuat suatu gambar dapat membantu siswa menyelesaikan masalah itu, tetapi menconga untuk menyajikan salaman dengan jumlah siswa yang lebih besar dapat membingungkan. Perhatikan kasus yang lebih sederhana, 1 kelompok yang terdiri dari 2

siswa. Kemudian periksa berapa kasus yang agak sulit. Organisasikan data itu ke dalam suatu tabel sehingga dapat membantu siswa.



Jumlah siswa	2	3	4	5
Banyak salaman	1	3	6	10

Periksa data itu secara umum. Apakah kalian memperhatikan polanya? Penambahan dalam banyak salaman meningkat 1 setiap kali.

Ada beberapa cara untuk menggunakan pola ini untuk menyelesaikan masalah salaman. Salah satu cara yang sederhana adalah dengan memperluas tabel. Coba tentukan aturan untuk transformasi banyak siswa dalam kelas dengan banyak salaman tadi! Aturan tersebut adalah: Kalikan banyak siswa (n) dengan $(n - 1)$ dan bagi dengan 2 (misalnya untuk 5 siswa: $\frac{(5)(4)}{2} = 10$).

Walaupun penentuan hubungan dengan cara formal seringkali lebih sukar daripada melakukannya dengan cara informal, keperluan untuk menemukan aturan umum dapat dilakukan dengan cara meminta siswa untuk memprediksikan kasus-kasus yang sangat besar (lihat Kegiatan 9 bagian IV). Sebagai contoh, setelah siswa dapat menentukan banyak salaman dalam kelas dengan 40 siswa, tanyakan kepada mereka ada berapa kali salaman apabila terdapat 400 siswa atau 4000 siswa.

Siswa sejak dini dapat didorong untuk melakukan kegiatan dan penyelesaian masalah yang melibatkan penalaran deduktif.

Mendorong siswa menyajikan masalah-masalah penalaran dengan menggunakan model-model konkret atau visual oleh mereka

Membuat suatu sajian informal akan membantu siswa menyelesaikan masalah-masalah penalaran. Perhatikan contoh berikut ini!

Contoh: Sajian informal dari suatu masalah penalaran deduktif

Nani memiliki uang lebih banyak daripada Neti.

Djoko memiliki uang lebih banyak daripada Andi.

Andi memiliki uang lebih banyak daripada Nani.

- a. Siapa yang memiliki uang paling banyak?
- b. Siapa yang memiliki uang paling sedikit?

Walaupun siswa dapat menentukan jawaban itu, sajian konkret atau visual merupakan cara yang berguna untuk menunjukkan jawaban mereka kepada orang lain.

Mendorong siswa untuk menyelesaikan masalah-masalah menggunakan proses eliminasi

Penggunaan proses eliminasi dapat dilihat dalam kegiatan 10 berikut ini.

Kegiatan 10: Menarik Kesimpulan dan Mengidentifikasi Jenis Penalaran

Tarikalah suatu kesimpulan dan identifikasi jenis-jenis penalarannya. Soal cerita memuat cara untuk mempraktekkan penalaran dan untuk mendorong refleksi tentang penalarannya. Perhatikan masalah di bawah ini!

Tiga pemain golf bernama Tom, Dick, dan Harry sedang berjalan menuju padang golf. Tom, pemain golf paling baik dari ketiganya, selalu menang. Dick, kadang-kadang menang, sedangkan Harry pemain golf paling jelek tidak pernah menang.

- (i) Dapatkah kalian menggambarkan siapa adalah siapa? Jelaskan bagaimana kalian mengetahuinya. (Petunjuk: Pertama, tunjukkan yang mana Tom)
- (ii) Jenis penalaran apa yang kalian gunakan untuk menentukan ciri-ciri di atas? Jelaskan secara singkat!

Membantu siswa melihat bahwa diagram Venn dapat menjadi alat bantu dalam penyelesaian masalah

Masalah 1: Pembagian makanan

Pak Ahmad meninggalkan kelompok pramuka dengan memberi tugas untuk pembagian makanan. Sewaktu ia pulang, ia menemukan bahwa kelompok pramuka memahami menu secara keliru: 18 sudah dipilih untuk menerima coklat dan 12 dipilih untuk menerima roti. Hanya ada 24 laki-laki dalam kelompok pramuka itu, sehingga jelaslah beberapa makanan sudah dipilih untuk keduanya (coklat dan roti). Berapa orang yang mendapatkan keduanya?

Masalah 2: Pemilihan yang membingungkan

Suatu pemungutan suara untuk memilih wakil dari suatu kelas terdaftar tiga nama, Reni, Syahrul, dan Tedy, dan instruksinya: "Pemilihan suara tidak lebih dari dua calon". Reni mendapatkan 19 total suara; Syahrul 22 suara; dan Tedy 27 total suara. Seorang siswa hanya memilih Reni, 2 siswa hanya memilih Syahrul, dan 3 memilih hanya Tedy. Enam siswa memilih untuk keduanya Reni dan Syahrul, 10 siswa memilih untuk keduanya Reni dan Tedy, 12 siswa memilih untuk keduanya Syahrul dan Tedy. Berapa banyak siswa pada kelas itu yang tidak bisa membaca instruksi pemungutan suara secara berhati-hati dan memilih ketiga calon seluruhnya? Jika ada 42 siswa pada kelas itu, berapa siswa yang tidak memilih?

Kegiatan 11: Menggunakan Diagram Euler dan Counterexamples untuk Menguji

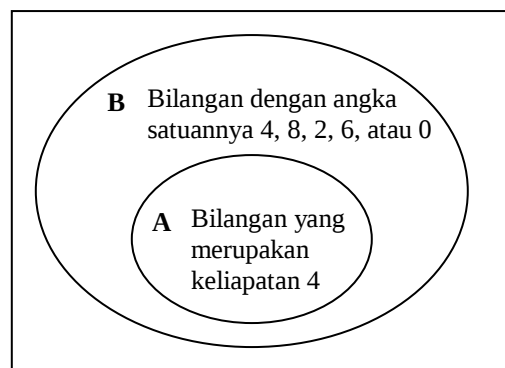
Kesimpulan

Penggunaan diagram Euler untuk mengevaluasi kesimpulan penalaran deduktif

Diagram Euler berguna untuk menetapkan argument valid (kesimpulan yang benar) atau untuk menunjukkan yang tidak valid (kesimpulan yang tidak benar).

Contoh 1: Kesimpulan benar tentang suatu contoh

Diagram Euler menggunakan lingkaran untuk suatu himpunan. Perhatikan himpunan bilangan kelipatan dari 4. Semua kelipatan dari 4 adalah bilangan yang mempunyai angka satuannya adalah 4, 8, 2, 6, atau 0. Tidak semua bilangan yang mempunyai angka satuan 4, 8, 2, 6, atau 0 merupakan bilangan kelipatan 4 (contoh: 14, 18, 22, 26, dan 30). Pengamatan ini dapat disarikan dalam kegiatan diagram Euler seperti berikut.



Perhatikan argument berikut: “Hasilkali dari 2495,25 dan 16 adalah kelipatan dari 4, karena itu hasilkali ini harus berakhir dengan 4, 8, 2, 6, atau 0. Apakah kesimpulan ini valid atau tidak? Tempatkan titik untuk melabeli p dalam lingkaran A, lingkaran itu menyajikan bilangan yang merupakan kelipatan dari 4. Perhatikan bahwa p itu juga ada dalam lingkaran B dan karena itu harus mempunyai angka satuan 4, 8, 2, 6, atau 0.

Contoh 2: Kesimpulan yang benar mengenai suatu bukan contoh

Perhatikan bilangan 39.927, yang tidak mempunyai angka satuan 4, 8, 2, 6, atau 0. Tunjukkan bilangan ini dalam diagram di atas dengan satu titik yang dilabeli dengan huruf *q*. Dapatkah bilangan 39.927 merupakan bilangan kelipatan 4?

Contoh 3: Kesimpulan yang tidak benar tentang suatu contoh

Perhatikan argument berikut: “hasilkali dari 1826,9 dan 20 memiliki angka satuan 8, karena itu ia kelipatan dari 4. Tempatkan titik yang dilabeli huruf *r* yang menyajikan hasilkali ini akan masuk pada lingkaran *B*, tetapi dapatkah kamu yakini apakah titik itu dapat masuk dalam lingkaran *A* atau diluarnya?

Contoh 4: Kesimpulan yang tidak benar tentang sesuatu bukan contoh

Perhatikan argument berikut: “Hasilkali dari 2851 dan 14 bukan kelipatan dari 4, karena itu tidak mempunyai angka satuan 4, 8, 2, 6, atau 0”. Dapatkah kamu merasa yakin bahwa titik yang dilabeli dengan huruf *s* masuk dalam lingkaran *B* atau diluarnya?

Contoh 5:

Perhatikan argument berikut: “Jika suatu bilangan kelipatan dari 8, maka ia kelipatan dari 4 (Premis 1). Hasil kali dari 2984 dan 15 adalah kelipatan 8 (Premis 2)”. Kesimpulan apa yang dapat kamu tarik mengenai angka satuan dari hasil kali itu? Buatlah diagram Euler yang menunjukkan hasil kali itu yang dilabeli dengan titik *t*.

Contoh 6:

Setelah memeriksa beberapa contoh dari diagram Euler, apakah bagian dari suatu premis *jika* selalu disajikan pada lingkaran dalam dan bagian dari premis *maka* pada bagian lingkaran luar (besar)?

Contoh 7:

Gambarkan suatu diagram Euler untuk menyatakan premis berikutnya: Jika dua segitiga sama dan sebangun (kongruen), maka satu sisi dan satu sudut yang bersisian dari masing-masing segitiga haruslah sama. Gunakan diagram Euler untuk mengevaluasi masing-masing argumentasi berikut. Untuk argumentasi yang tidak valid berikan satu contoh menyangkal bahwa ia bukanlah akibat atau konklusi yang benar.

- I. Dua segitiga diketahui tidak kongruen; karena itu, tidak ada sisi dan sudut bersisian dari masing-masing segitiga tersebut yang sama.
- II. Dua segitiga yang lain mempunyai satu sisi dan satu sudut bersisian sama; karena itu, kedua segitiga itu sama dan sebangun (kongruen).

Penggunaan contoh menyangkal untuk menilai konjektur

Pertanyaan pada contoh 7 di atas menggunakan contoh menyangkal untuk menilai validitas kesimpulan deduktif. Pertanyaan di bawah ini meminta siswa untuk menggunakan contoh menyangkal untuk menilai konjektur-konjektur. Perbaiki setiap pernyataan yang salah untuk menjadikannya benar.

1. Jumlah dari sebarang empat bilangan bulat adalah genap.
2. Jumlah dari sebarang dua bilangan bulat habis dibagi dua.
3. Jumlah dari sebarang empat bilangan bulat habis dibagi dua.
4. Jumlah dari sebarang tiga bilangan bulat habis dibagi dua.

D. Faktor-faktor yang Mempengaruhi Kemampuan Bernalar

1. Faktor-faktor yang Mempengaruhi Penalaran Kondisional

Ada dua faktor yang seringkali menimbulkan kesalahan dalam penalaran kondisional yang ditentukan dalam pembelajaran (Barrody, 1993), yaitu: (1) salah karena

keanstrakan permasalahan dan (2) kesalahan karena pernyataan memuat informasi yang negatif.

Siswa akan lebih akurat pada saat permasalahan menggunakan contoh-contoh konkrit. Apabila permasalahan bukan merupakan contoh konkrit atau merupakan permasalahan yang abstrak maka mereka memiliki kesulitan (Wason dan Johnson-Laird, 1972). Hal tersebut dapat dipahami karena walaupun permasalahan penalaran anstrak relative sederhana, permasalahan tersebut tetap sulit, seperti contoh berikut.

Jika suatu objek merah, maka objek itu berbentuk persegi panjang.

Objek ini tidak berbentuk persegi panjang.

Oleh karena itu objek ini tidak merah.

Penelitian lain tentang penalaran menunjukkan bahwa kemampuan bernalar siswa lebih baik, jika suatu proposisi lebih menonjol atau utama dalam imajerinya (Clement dan Falmage, 1986). Dalam masalah yang menggunakan proposisi tersebut, siswa lebih mudah menangkap informasi yang positif daripada informasi negatif. Faktor kedua yang mempengaruhi penalaran kondisional adalah lingkungan (negation). Penalaran kondisional menjadi sulit jika mengandung kata negatif “tidak” dalam premis (Evans, 1972; Galotti, 1989). Perhatikan permasalahan berikut.

Jika suatu objek tidak biru, maka itu persegi panjang.

Objek ini tidak persegi panjang.

Oleh karena itu biru.

Siswa memutuskan tidak ada kesimpulan yang dapat diambil dalam permasalahan ini, kenyataannya kesimpulannya benar. Siswa mendapat kesulitan memahami negatif ganda. Dalam permasalahan penalaran di atas, penolakan konsekuen menghasilkan

kesimpulan. “Tidak benar objek tidak biru”. Siswa sepertinya membuat kesalahan dalam menerjemahkan kalimat itu menjadi jawaban benar, “Objek itu berwarna biru”.

Kesalahan-kesalahan dalam Penalaran Logis

Siswa membuat kesalahan pada saat mereka menggambarkan kesimpulan pada penalaran kondisional, walaupun mereka telah memperoleh pelajaran logika (Chene, 1986).

Terdapat empat jenis kesalahan yang sering dilakukan siswa.

a. Membuat hanya satu model dari anteseden dan konsekuen

Menurut Johnson-Laird dan Byrne (1991), siswa mengkonstruksikan kognisinya untuk merepresentasikan premis/ dalam kognisinya, tidak menggambarkan semua kemungkinan logis. Siswa mungkin tidak mencari ruang permasalahan sebagaimana seharusnya. Perhatikan permasalahan penalaran berikut.

Jika dia bertemu temannya, maka dia akan pergi bermain.

Dia tidak bertemu temannya.

Oleh karena itu dia mungkin tidak pergi bermain, mungkin pula pergi bermain.

Byrne (1989) menemukan bahwa 46 persen siswa SMU melakukan kesalahan dalam membuat kesimpulan, “Dia tidak akan bermain”. Nyatanya siswa mengkonstruksikan model tunggal yaitu dia akan pergi bermain melalui pertemuan dengan temannya. Byrne menambahkan premis tambahan, “Jika dia bertemu saudara laki-lakinya, maka dia akan pergi bermain”. Sekarang hanya 4 persen menggambarkan kesalahan dalam kesimpulan, “Dia tidak akan pergi bermain”. Kenyataannya, mereka mengkonstruksi model tambahan melibatkan saudara laki-lakinya. Mereka sekarang melihat bahwa dia mungkin pergi bermain, walaupun tanpa teman.

b. Membuat konversi “Gelap”

Konversi gelap merupakan salah satu bentuk kesalahan interpretatif yang sering dilakukan. Konversi gelap berarti siswa tidak tepat dalam mengubah suatu bagian permasalahan menjadi bentuk lain. Misalnya, Wason dan Johnson-Laird (1972) menunjukkan cara kerja siswa saat menggunakan metoda penolakan anteseden sebagai metoda yang valid. Bentuk umum metoda ini adalah sebagai berikut.

Jika p , maka q adalah pernyataan yang benar.

p tidak benar.

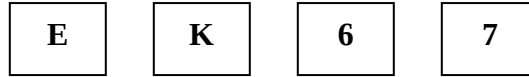
Oleh karena itu q tidak benar.

Permasalahannya adalah siswa menggunakan konversi yang gelap saat mereka melihat pernyataan pertama. Bagian yang “gelap” adalah premis bahwa q tidak benar sehingga mereka mengkonversikannya tidak tepat, yaitu menjadi: Jika p tidak benar maka q tidak benar. Kegagalan tersebut terjadi ketika mereka memecahkan pernyataan yang terkonversi tadi, yaitu menggunakan metoda penolakan konsekuen. Mereka menyimpulkan bahwa q tidak benar.

Dalam situasi penalaran sehari-hari, kita sering menggunakan konversi gelap tanpa permasalahan. Anggap seorang teman mencoba menerka bahwa asrama tempat ia tinggal akan menyediakan sarapan pagi, dia berkata, “Jika sekarang hari Selasa, maka kita mendapatkan sarapan pagi dengan goreng telur”. Pernyataan itu termasuk korespondensi satu-satu antara hari dan sarapan pagi. Dengan demikian siswa dapat beralasan menyimpulkan bahwa dua bagian pernyataan dapat dikonversikan untuk menghasilkan pernyataan, “Jika kita mendapatkan sarapan pagi dengan goreng telur, maka sekarang hari Selasa”. Dalam penalaran formal tidak seperti dalam kehidupan nyata kita harus menganggap bahwa sarapan pagi dengan goreng telur lebih dari sekali dalam seminggu.

c. Mencoba mengkonfirmasi hipotesis, daripada mencoba menyangkalnya

Masing-masing persegi di bawah ini menunjukkan sebuah kartu. Setiap kartu memiliki huruf di satu sisi dan angka di sisi lainnya.



Kemudian siswa diberi aturan tentang empat kartu ini: *“Jika sebuah kartu mempunyai huruf hidup di satu sisi, maka sisi lain kartu itu menunjukkan bilangan genap”*.

Tugas siswa adalah menentukan yang mana dari kartu ini harus dibalik untuk mencari apakah aturan ini benar atau salah.

Tugas ini mengilustrasikan bagaimana siswa lebih banyak mencoba untuk mengkonfirmasi hipotesis daripada menyangkalnya. Sebagian besar siswa bekerja pada seleksi tugas klasik, katakan saja saat akan membalikkan kartu E dan 6, atau hanya kartu E; dalam strategi ini, siswa mengkonfirmasi hipotesisnya. Bagaimanapun juga, strategi yang benar adalah memilih kartu 7, seperti halnya kartu E. Kurang dari 10% siswa SMU melakukan solusi yang benar (Gellatly, 1986; Griggs dan Cox, 1982).

Mengapa kartu E dan 7 merupakan jawaban yang benar. Pertama perlu dilihat apa yang terdapat pada sisi lain dari kartu E. Jika angka genap, aturannya adalah benar. Jika angka ganjil aturannya salah. Bagaimanapun juga, siswa harus juga menguji sisi lain dari 7, suatu pilihan yang sangat sedikit dilakukan. Informasi tentang sisi lain dari 7 sangat berharga sebagaimana layaknya informasi tentang kartu E, jika sisi lain kartu 7 menunjukkan huruf mati (konsonan), aturannya masih benar. Jika menunjukkan huruf hidup maka aturannya salah dan harus ditolak.

Ingat bahwa kita mempunyai dua strategi penalaran kondisional: (1) untuk menguatkan anteseden, kita memeriksa huruf hidup (dalam hal ini, kartu E) dan (2) menolak konsekuen, kita harus memeriksa sejumlah sisi yang bukan angka genap (dalam

hal ini, kartu 7). Siswa ingin sekali menguatkan anteseden, tetapi mereka enggap menolak konsekuen dengan mencari counterexamples. Hal ini merupakan sesuatu untuk menyangkal hipotesis, suatu strategi penghindaran yang sistematis.

Mengapa kita tidak perlu memeriksa kartu K dan 6. Jika dilihat dengan hati-hati, aturan tidak mengatakan apapun tentang konsonan, seperti halnya kartu K. Sisi lain dari kartu K dapat saja memiliki angka ganjil, angka genap, atau gambar lain, dan kita tidak memperdulikannya. Aturan juga tidak mengkhususkan apa yang harus muncul pada sisi lain dari angka 6. Banyak siswa memilih kartu 6 untuk dibalik sebab mereka menunjukkan aturan konversi gelap, sehingga terbaca, “Jika sebuah kartu memiliki angka genap pada satu sisi, maka sisi lain kartu itu menunjukkan huruf hidup”. Dengan demikian mereka memilih kartu 6 dengan kesalahan.

Kita melihat saat siswa diberikan pilihan, mereka lebih suka mencari informasi positif daripada informasi negatif. Kita lebih mengetahui apa yang ada daripada yang tidak ada.

d. Kegagalan mentransfer pengetahuan pada tugas baru

Sejauh ini kita telah melihat bahwa orang membuat kesalahan dalam penalaran kondisional sebab: mereka hanya mengkreasikan satu model premis, mereka membuat konversi gelap, dan mereka menghindarkan penyangkalan hipotesis. Siswa memiliki kesulitan dalam mengapresiasi kesamaan antara permasalahan matematika yang mereka kerjakan. Kesamaannya, siswa mempunyai kesulitan mengapresiasi kesamaan antara dua versi tugas seleksi yang diilustrasikan dalam bagian c, yaitu kegiatan untuk membalikkan kartu (Klaczynski, 1989). Siswa yang telah belajar logika mempunyai kesulitan mengaplikasikan pengetahuan mereka dalam situasi baru (Salmon, 1991).

2. Faktor-faktor yang Mempengaruhi Penalaran Silogisma

Beberapa variabel dapat mempengaruhi tampilan silogisma. Semua ini meliputi faktor-faktor bahasa dan waktu.

Bentuk kalimat adalah kritis dalam menentukan kesulitan silogisma. Sebagaimana kita lihat dengan penalaran kondisional, permasalahan adalah lebih sulit memecahkan ketika mereka melibatkan kata-kata negatif seperti tidak. Selain itu, silogisma lebih sulit jika mereka menggunakan bentuk negatif (Lippman, 1972). Siswa memahami bahasa lebih baik apabila dalam bentuk aktif daripada pasif.

Waktu yang tersedia juga mempunyai efek yang jelas terhadap keakuratan dalam memecahkan masalah silogisma. Galotti (1986) dalam penelitiannya mengatakan bahwa dengan diberikannya waktu yang sedikit, mereka dapat memberikan hanya kesan pertama jawaban yang benar. Apabila diberi waktu yang cukup, mereka menjawab dengan lebih baik. Siswa yang berkemampuan tinggipun membuat kesalahan jika waktunya sedikit.

Kesalahan dalam Penalaran Silogisma

Siswa membuat dua kesalahan umum dalam memecahkan silogisma. Mereka membuat konversi gelap dan mereka dipengaruhi oleh keyakinan yang bias. Siswa juga menampilkan konversi gelap untuk silogisma. Khususnya mereka menganggap bahwa premis “semua A adalah B” dapat juga diinterpretasikan sebagai “semua B adalah A”. Penelitian menunjukkan bahwa 30% siswa SMU secara konsisten menunjukkan konversi gelap silogisma yang menggunakan kata semua (Newstead, 1989; Newstead dan Griggs, 1983). Konversi gelap premis merupakan sumber umum kesalahan terhadap silogisma.

Keyakinan efek bias dalam penalaran silogisma terjadi ketika siswa membuat pertimbangan didasarkan prioritas keyakinan, daripada aturan logis. Kurang dari setengahnya siswa menerima dengan benar kesimpulan silogisma dimana kesimpulan

sesungguhnya valid, tetapi tidak yakin (Evans, 1983). Siswa sering merasa segan mengatakan bahwa suatu kesimpulan adalah valid jika kesimpulan itu kontradiktif dengan kesan umum.

Sejalan dengan itu, Markovitz dan Nantel (1989) memberikan sederetan silogisma pada siswa. Beberapa butir menjelaskan objek nyata, dan kesimpulan logis kontradiksi dengan keyakinan utama siswa. Hasilnya menunjukkan bahwa siswa secara signifikan lebih meyakini kesimpulan yang benar apabila kesimpulan ini konsisten dengan keyakinan utama mereka. Berbeda dengan itu, ketika silogisma menggunakan kata-kata yang tidak berkesan, mereka lebih menyukai mendeteksi cacat logis.

Bagaimana kita dapat menjelaskan keyakinan bias? Menurut Evans (1989), keyakinan bias merupakan contoh dari heuristic yang mengatakan, “Kamu tidak harus menguji logika silogisma secara hati-hati ketika kesimpulan jelas terpecaya”. Dengan kata lain, siswa biasa menggunakan pendekatan kritis ketika kesimpulan konsisten dengan keyakinan utama mereka. Siswa cenderung menerima informasi tidak dengan kritis jika mereka setuju dengannya (Lord, 1979).