

FILE:18
RINGKASAN PERTEMUAN KE-15
STATISTIKA MATEMATIK 1

DISUSUN OLEH:
NAR HERRHYANTO

JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS PENDIDIKAN INDONESIA
BANDUNG

TEKNIK FUNGSI PEMBANGKIT MOMEN

Penentuan fungsi peluang atau fungsi densitas dari fungsi peubah acak bisa juga dilakukan melalui fungsi pembangkit momen. Dalam penentuannya, tentu saja harus digunakan sifat-sifat dari fungsi pembangkit momen. Berikut ini akan diberikan beberapa dalil tentang penentuan fungsi peluang atau fungsi densitas (atau secara umum distribusi) dari fungsi peubah acak berdasarkan teknik fungsi pembangkit momen. Dalam hal ini, peubah acak dalam fungsi peubah acaknya sudah diketahui distribusinya. Dengan kata lain, peubah acak dalam fungsi peubah acaknya berasal dari distribusi khusus yang dikenal.

Dalil 10.12: FUNGSI PEUBAH ACAK NORMAL UMUM

Misalkan $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ merupakan sampel acak berukuran n dan mengikuti distribusi normal umum dengan rata-rata μ_i dan varians σ_i^2 , ditulis $N(\mu_i; \sigma_i^2)$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

Jika $Z = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n$, maka Z akan mengikuti distribusi normal

umum dengan rata-rata $\sum_{i=1}^n \mu_i$ dan varians $\sum_{i=1}^n \sigma_i^2$.

Dalil 10.13: FUNGSI PEUBAH ACAK POISSON

Misalkan $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ merupakan sampel acak berukuran n dan mengikuti distribusi Poisson yang mempunyai parameter λ_i , $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

Jika $Z = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n$, maka Z akan mengikuti distribusi Poisson dengan parameter $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_n$.

Dalil 10.14: FUNGSI PEUBAH ACAK KHI-KUADRAT

Misalkan $X_1, X_2, X_3, \dots, X_k$ merupakan sampel acak berukuran k dan mengikuti distribusi khi-kuadrat dengan derajat kebebasan $dk = n_i$, $i = 1, 2, 3, \dots, k$.

Jika $Z = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_k$, maka Z akan mengikuti distribusi khi-kuadrat dengan derajat kebebasan $dk = n$, dengan $n = n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k$.

PENERAPAN TEKNIK DISTRIBUSI FUNGSI PEUBAH ACAK

Beberapa materi yang merupakan penerapan dari beberapa teknik distribusi fungsi peubah acak yang akan dibahas adalah distribusi t, distribusi F, distribusi rata-rata sampel, dan distribusi varians sampel.

Dalam pertemuan sebelumnya sudah dibahas beberapa distribusi yang mempunyai bentuk fungsi peluang atau fungsi densitas tertentu dan nama tertentu, yang disebut sebagai distribusi khusus. Ada dua distribusi khusus lainnya yang belum dibahas, yaitu distribusi t dan distribusi F. Kedua distribusi khusus kontinu ini bentuk fungsi densitasnya diperoleh berdasarkan teknik transformasi peubah acak.

DISTRIBUSI t

Sekarang kita akan membahas distribusi khusus kontinu yang penurunannya berdasarkan distribusi normal baku dan distribusi khi-kuadrat. Kemudian proses penurunannya menggunakan teknik transformasi peubah acak.

Misalkan W adalah peubah acak berdistribusi normal baku dan V adalah peubah acak berdistribusi khi-kuadrat dengan derajat kebebasan $dk = r$. Kedua peubah acak W dan V saling bebas.

Jika peubah acak $T = \frac{W}{\sqrt{V/r}}$, maka kita akan menentukan fungsi densitas dari T .

Dengan menggunakan teknik transformasi peubah acak diperoleh:

$$k_1(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi r} \cdot \Gamma(r/2) \left(1 + \frac{t^2}{r}\right)^{(r+1)/2}}; -\infty < t < \infty$$

Berdasarkan uraian di atas, kita bisa membuat definisi distribusi t.

Definisi 11.1: FUNGSI DENSITAS t

Peubah acak X dikatakan berdistribusi t, jika dan hanya jika fungsi densitasnya berbentuk:

$$k_1(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi r} \cdot \Gamma(r/2) \cdot \left(1 + \frac{t^2}{r}\right)^{(r+1)/2}}; -\infty < t < \infty$$

Peubah acak X yang berdistribusi t disebut juga peubah t.

Penulisan notasi dari peubah acak X yang berdistribusi t adalah t(r), artinya peubah acak X berdistribusi t dengan derajat kebebasan = r.

Peubah acak X yang berdistribusi t dengan derajat kebebasan = r bisa juga ditulis sebagai :

$$X \sim t(r)$$

Rataan dan varians dari distribusi t dapat dilihat dalam Dalil 11.1.

Dalil 11.1: PARAMETER DISTRIBUSI t

Rataan dan varians dari distribusi t adalah:

1. $E(T) = 0$
2. $Var(T) = r / (r - 2)$

DISTRIBUSI F

Distribusi khusus kontinu lainnya yang dalam penurunan fungsi densitasnya menggunakan teknik transformasi peubah acak adalah distribusi F.

Sekarang kita akan membahas distribusi khusus kontinu yang penurunannya berdasarkan distribusi khi-kuadrat. Kemudian proses penurunannya menggunakan teknik transformasi peubah acak.

Misalkan U dan V adalah dua peubah acak kontinu yang saling bebas dan berdistribusi khi-kuadrat masing-masing dengan derajat kebebasannya r_1 dan r_2 .

Jika peubah acak $F = \frac{U/r_1}{V/r_2}$, maka kita akan menentukan fungsi densitas dari F.

Dengan menggunakan teknik transformasi peubah acak diperoleh:

$$k_1(f) = \frac{\Gamma\left(\frac{r_1+r_2}{2}\right) \cdot \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{r_1/2}}{\Gamma\left(\frac{r_1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{r_2}{2}\right)} \cdot \frac{f^{(r_1/2)-1}}{\left(1 + \frac{r_1 f}{r_2}\right)^{(r_1+r_2)/2}}; 0 < f < \infty$$

$$= 0; f \text{ lainnya.}$$

Berdasarkan uraian di atas, kita dapat membuat definisi distribusi F.

Definisi 11.2: FUNGSI DENSITAS F

Peubah acak X dikatakan berdistribusi F, jika dan hanya jika fungsi densitasnya berbentuk:

$$k_1(f) = \frac{\Gamma\left(\frac{r_1+r_2}{2}\right) \cdot \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{r_1/2}}{\Gamma\left(\frac{r_1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{r_2}{2}\right)} \cdot \frac{f^{(r_1/2)-1}}{\left(1 + \frac{r_1 f}{r_2}\right)^{(r_1+r_2)/2}} ; 0 < f < \infty$$

$$= 0 ; f \text{ lainnya.}$$

Peubah acak X yang berdistribusi F disebut juga peubah F.

Penulisan notasi dari peubah acak X yang berdistribusi F adalah $F(r_1, r_2)$, artinya peubah acak X berdistribusi F dengan derajat kebebasan pembilang = r_1 dan derajat kebebasan penyebut = r_2 .

Peubah acak X yang berdistribusi F dengan derajat kebebasan pembilang = r_1 dan derajat kebebasan penyebut = r_2 bisa juga ditulis sebagai :

$$X \sim F(r_1, r_2)$$

Rataan dan varians dari distribusi F dapat dilihat dalam Dalil 11.2.

Dalil 11.2: PARAMETER DISTRIBUSI F

Rataan dan varians dari distribusi F adalah:

1. $E(F) = \frac{r_2}{r_2 - 2}$
2. $Var(F) = \frac{2 \cdot r_2^2 (r_2 + r_1 - 2)}{r_1 \cdot (r_2 - 2)^2 (r_2 - 4)}$

