

## EKSPLOKASI BILANGAN

Fokus eksplorasi bilangan ini adalah mencari pola dari masalah yang disajikan. Mencari pola merupakan bagian penting dari pemecahan masalah matematika. Eksplorasi pola-pola bilangan perlu memperoleh perhatian serius dalam pembelajaran matematika sehingga para siswa dapat mendeskripsikan, memperluas, menganalisis, dan membangun bermacam-macam pola dan merepresentasikan hubungan fungsionalnya dengan tabel-tabel, grafik-grafik, dan aturan-aturan.

Polisi biasa melakukan pengamatan atas beberapa file tindakan kriminal untuk menemukan modus operandi atau pola operasi jika serentetan peristiwa kriminal terjadi. Begitu pula di dalam matematika, kita dapat mencoba untuk menemukan penyelesaian masalah dengan mempelajari pola-pola untuk digunakan sebagai petunjuk.

Pola dapat menampilkan bentuk yang sangat indah. Sebagai contoh, perhatikan pola berikut ini.

$$\begin{aligned} 1 \times 9 + 2 &= 11 \\ 12 \times 9 + 3 &= 111 \\ 123 \times 9 + 4 &= 1111 \\ 1234 \times 9 + 5 &= 11111 \\ 12345 \times 9 + 6 &= 111111 \\ 123456 \times 9 + 7 &= 1111111 \end{aligned}$$

Di sini, tantangannya adalah bagaimana pola ini bekerja. Kita juga harus dapat menemukan suatu pola pada barikasn berikut:

$$1, 5, 14, 30, 55, 91, \dots$$

Seringkali kita menemukan pola lebih dari satu macam jika diberikan sekumpulan data. Sebagai contoh, kita diminta menemukan tiga bilangan berikutnya melengkapi suatu pola yang berdasarkan pada barisan berikut:

$$1, 2, 4, \_, \_, \_$$

Kita dapat menemukan tiga bilangan berikutnya pada barisan di atas, yaitu:

$$1, 2, 4, 7, 11, 16 \text{ atau } 1, 2, 4, 8, 16, 32.$$

### 1.1 Barisan Bilangan

Kita pernah bertemu dengan istilah barisan pada saat kita belajar matematika sebelumnya. Sebagai contoh, bilangan-bilangan 5, 7, 9, 11, 13, 15 mendefinisikan suatu barisan. Suatu barisan dikatakan terhingga karena ada bilangan pertama dan bilangan terakhir. Kita akan lebih fokus pada pembicaraan barisan tak hingga yang selanjutnya kita katakan sebagai “barisan” saja. Barisan adalah suatu kumpulan suku-suku dalam urutan tertentu. Secara formal, suatu barisan dapat didefinisikan sebagai suatu fungsi yang mempunyai daerah asal bilangan bulat positif.

Bilangan-bilangan di dalam daerah hasil suatu barisan, yang disebut suku barisan, kita batasi untuk bilangan-bilangan real. Perhatikan contoh barisan berikut ini.

- (a) 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...
- (b) 0, 5, 10, 15, 20, 25, ...
- (c) 2, 6, 10, 14, 18, 22, ...
- (d) 1, 11, 111, 1111, 11111, ...

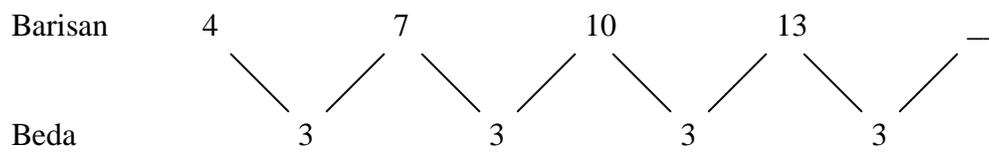
Tiga barisan (a), (b), dan (c) di atas mempunyai sifat yang sama, tetapi barisan ke empat berbeda sifatnya dari ke tiga lainnya. Pada barisan pertama, setiap suku, dimulai dari suku ke dua, diperoleh dari satu suku sebelumnya ditambah 1. Dengan kata lain, selisih antara dua bilangan yang berdekatan pada barisan itu adalah selalu 1. Di dalam barisan ke dua, selisih antara dua bilangan yang berdekatan adalah selalu 5, dan di dalam barisan ke tiga selalu 4. Tetapi pada barisan ke empat, selisihnya adalah  $11 - 1 = 10$ ,  $111 - 11 = 100$ ,  $1111 - 111 = 1000$ , dan sebagainya. Di dalam barisan (a), (b), dan (c) di atas, selisih antara satu suku dengan suku lain yang paling berdekatan tidak berubah sepanjang barisan itu. Barisan-barisan seperti barisan (a), (b), dan (c) di atas, di mana setiap suku yang berurutan diperoleh dari suku sebelumnya dengan menambah suatu bilangan tertentu yang tetap (disebut beda), adalah barisan aritmatika. Dengan demikian barisan (d) bukan merupakan barisan aritmatika karena selisih antara suku-suku yang berdekatan tidak tetap. Dengan kata lain, tidak ada bilangan tetap tertentu yang dapat digunakan sebagai beda.

Contoh 1.

Misalkan kita akan membangun bentuk-bentuk persegi dari batang-batang korek api. Satu persegi terbentuk oleh tepat 4 batang korek api, dua persegi terbentuk oleh tepat 7 batang korek api, tiga persegi terbentuk oleh tepat 10 batang korek api, dan empat persegi terbentuk oleh tepat 13 batang korek api. Tugas kita adalah mencari pola hubungan antara banyaknya persegi yang dibangun dengan banyaknya (minimum) batang korek api yang digunakan untuk membangun persegi-persegi itu.

Jawab.

Banyaknya batang korek api yang dibutuhkan untuk membangun satu buah persegi, dua buah persegi, tiga buah persegi, dan empat buah persegi berturut-turut adalah 4, 7, 10, dan 13. Sebagaimana terlihat di bawah ini, setiap suku setelah suku pertama adalah lebih besar 3 dari satu suku sebelumnya.



Jika pola ini berlanjut, tiga suku berikutnya secara berturut-turut adalah 16, 19, dan 22, yang mengindikasikan bahwa banyaknya batang korek api pada tiga suku berikutnya secara berturut-turut adalah 16, 19, dan 22.

Kita dapat menunjukkan bahwa jawaban kita benar dengan menambahkan 3 dari suatu suku setiap kita akan mencari satu suku berikutnya. Perhatikan bahwa setiap penambahan satu persegi kita memerlukan penambahan tiga batang korek api, yaitu untuk menambah tiga buah sisinya. Dengan demikian barisan ini adalah barisan aritmatika dengan beda 3.

Strategi membuat tabel dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah ini. Tabel berikut ini menunjukkan barisan untuk contoh di atas. Kolom yang diberi nama “Suku ke” merujuk pada urutan suku di dalam barisan atau banyaknya persegi yang dibangun. Kolom yang diberi nama “Bilangan” merujuk pada bilangan yang sesuai dengan urutan sukunya atau banyaknya batang korek api (minimal) yang diperlukan untuk membangun persegi-persegi. Tiga buah titik menunjukkan bahwa barisan ini berlanjut dengan cara

yang sama.

Tabel 1

Suku ke	Bilangan
1	4
2	$7 = 4 + 1.3$
3	$10 = 4 + 3 + 3 = 4 + 2.3$
4	$13 = 4 + 3 + 3 + 3 = 4 + 3.3$
.	.
.	.
.	.

Jika kita mengasumsikan bahwa pola ini kontinu, maka bilangan pada suku ke-10 pada contoh 1 adalah  $4 + 9.3$  atau 31, dan bilangan pada suku ke-100 adalah  $4 + 99.3$  atau 301. Secara umum, bilangan pada suku ke- $n$  adalah  $4 + (n - 1)3$ . Dengan demikian kita dapat menemukan bilangan pada sebarang suku pada contoh 1 tersebut. Misalkan, bilangan pada suku ke-200 adalah  $4 + (200 - 1).3$ , atau  $4 + 199.3$ , atau 601.

Beberapa siswa mungkin dapat menemukan bilangan pada suku ke-100 dengan cara yang berbeda. Cara siswa yang berbeda itu perlu mendapat dukungan dari kita karena kita mengharapkan siswa untuk terlibat secara aktif dalam membangun dan menerapkan ide-ide matematikanya. Suatu pendekatan yang berbeda mungkin sebagai berikut: Jika batang-batang korek api itu dapat membentuk 100 buah persegi, kita dapat menemukan batang-batang korek api itu dengan menjumlahkan banyaknya batang korek api yang horisontal dan banyaknya batang korek api yang vertikal. Ada 2.100 batang korek api yang horisontal. Mengapa? Pada satu buah persegi ada 2 batang korek api yang ditempatkan secara vertikal, pada dua buah persegi ada 3 batang korek api, dan pada tiga buah persegi ada 4 batang korek api. Pada seratus buah persegi ada  $10 + 1$  batang korek api yang ditempatkan secara vertikal. Jika batang-batang korek api yang horisontal dan batang-batang yang vertikal dijumlahkan, akan diperoleh  $2.100 + (100 + 1)$ , atau 301 batang korek api. Hal yang sama, jika diminta untuk menemukan banyaknya batang korek api (minimum) yang dapat membangun  $n$  buah persegi, maka akan diperoleh sebanyak  $4 + (n - 1).3 = 3n + 1$  batang korek api.

Di dalam tabel 1, bilangan pada suku ke- $n$  adalah  $4 + (n - 1)3$ . Kita dapat menggunakan ungkapan ini untuk menemukan suku ke berapa jika diberikan bilangan

pada suku itu. Sebagai contoh, bilangan pada suatu suku adalah 1798. Kita kita diminta untuk menemukan suku ke berapa yang bilangannya (nilainya) 1798. Kita mengetahui bahwa  $4 + (n - 1)3 = 1798$ . Hal ini berarti  $(n - 1)3 = 1794$  atau  $n - 1 = 598$ . Dengan demikian,  $n = 599$ . Kita juga dapat menemukan jawaban yang sama dengan menyelesaikan persamaan  $3n + 1 = 1798$ .

#### Contoh 2.

Tentukan empat suku pertama jika bilangan (nilai) pada suku ke  $n$  diberikan sebagai berikut:

- a.  $4n + 3$
- b.  $n^2 - 1$

Jawab.

- a. Untuk menemukan bilangan pada suku ke-1, kita mensubstitusikan  $n = 1$  pada  $4n + 3$ , dan diperoleh  $4 \cdot 1 + 3$ , atau 7. Hal yang sama, substitusi  $n = 2, 3, 4$  pada  $4n + 3$  secara berturut-turut diperoleh  $4 \cdot 2 + 3$  atau 11,  $4 \cdot 3 + 3$  atau 15, dan  $4 \cdot 4 + 3$  atau 19. Dengan demikian, empat suku pertama dari barisan aritmatika itu adalah 7, 11, 15, 19.
- b. Substitusi  $n = 1, 2, 3, 4$  pada  $n^2 - 1$  secara berturut diperoleh  $1^2 - 1$  atau 0,  $2^2 - 1$  atau 3,  $3^2 - 1$  atau 8, dan  $4^2 - 1$  atau 15. Dengan demikian, empat suku pertama dari barisan  $n^2 - 1$  adalah 0, 3, 8, 15. Barisan ini bukan merupakan barisan aritmatika.

Kita akan membuat generalisasi dari yang kita kerjakan dengan barisan aritmatika. Misalkan suku pertama suatu barisan aritmatika adalah  $a$  dan bedanya adalah  $b$ . Strategi *membuat tabel* dapat kita gunakan untuk melakukan investigasi suku umum dari barisan  $a, a + d, a + 2d, a + 3d, \dots$ , sebagaimana tampak pada tabel 2.

Kita mengetahui bahwa suku ke- $n$  untuk sebarang barisan dengan suku pertama  $a$  dan beda  $d$  adalah  $a + (n - 1)d$ . Sebagai contoh, di dalam barisan 5, 9, 13, 17, 21, 25,  $\dots$ , suku pertamanya adalah 5 dan bedanya adalah 4. Dengan demikian suku ke- $n$  adalah  $a + (n - 1)d = 5 + (n - 1)4$ . Secara sederhana kita peroleh suku  $n$  adalah  $5 + 4n - 4 = 4n + 1$ .

Tabel 2

Suku ke	Nilai
1	$a$
2	$a + d$
3	$a + 2d$
4	$a + 3d$
5	$a + 4d$
.	.
.	.
.	.
$n$	$a + (n - 1)d$

Sering kali lebih dari satu strategi digunakan untuk menyelesaikan suatu masalah yang diberikan, sebagaimana contoh berikut ini.

Contoh 3.

Tentukan dua suku pertama barisan aritmatika jika diketahui suku ke tiga adalah 13 dan suku ke tiga puluh adalah 121.

Jawab.

Untuk memahami masalah ini lebih baik, kita coba menggunakan strategi *membuat tabel*. Kita membangun suatu tabel sama dengan tabel 2. Kita tidak mengetahui bilangan pada suku pertama, tetapi kita mengetahui bahwa bilangan pada suku ke tiga adalah 13 dan bilangan pada suku ke tiga puluh adalah 121. Karena barisan yang diberikan adalah barisan aritmatika, selisih antara bilangan pada satu suku dan bilangan pada satu suku berikutnya adalah tetap, atau dengan kata lain barisan ini mempunyai beda tetap. Jika beda barisan ini dilambangkan dengan  $d$ , maka suku ke empat adalah  $13 + d$  dan seterusnya, sebagaimana tampak pada tabel 3.

Tabel 3

Suku ke	Nilai
1	?
2	?
3	13
4	$13 + d$
5	$13 + 2d$
6	$13 + 3d$
.	.
.	.
.	.
30	$13 + ? d$

Untuk menentukan dua suku pertama, kita hanya membutuhkan menemukan  $d$  karena kita dapat mengurangi dengan  $d$  dari 13 untuk menemukan suku ke dua dan mengurangi lagi  $d$  dari suku ke dua untuk menemukan suku pertama.

Dari tabel 3, tampak bahwa suku ke tiga puluh adalah  $13 + \_ d$ , dan kita mengetahui bahwa bilangan pada suku ke tiga puluh adalah 121. Dengan demikian, kita mempunyai persamaan,

$$13 + \_ d = 121$$

Karena bilangan pada suku ke tiga adalah 13, kita memperoleh bilangan pada suku ke empat adalah  $13 + d$ , bilangan pada suku ke lima adalah  $13 + 2d$  dan bilangan pada suku ke enam adalah  $13 + 3d$ , dan karena barisan ini adalah barisan aritmatika, kita tahu bahwa bilangan (koefisien)  $d$  pada setiap kasus selalu lebih kecil 3 dari urutan sukunya. Misalnya, pada suku ke-4 koefisien  $d$  adalah 1, suku ke-5 koefisien  $d$  adalah 2, dan seterusnya. Dengan demikian, suku ke-30 koefisien  $d$  adalah 27, sehingga kita peroleh persamaan

$$13 + 27 d = 121$$

$$27 d = 108$$

$$d = 4$$

Akhirnya kita mengetahui bahwa suku ke dua adalah  $13 - 4$ , atau 9, dan suku pertama adalah  $9 - 4$ , atau 5.

Misalkan seorang anak dalam suatu keluarga besar mempunyai 2 orang tua, mempunyai 4 kakek-nenek, mempunyai 8 buyut, mempunyai 16 orang tuanya buyut, dan seterusnya. Kita melihat bahwa banyaknya leluhur adalah 2, 4, 8, 16, 32 ... . Jenis barisan seperti ini disebut barisan geometri. Setiap bilangan pada suku-suku yang berurutan di dalam barisan geometri ini diperoleh dari bilangan pada satu suku sebelumnya dikalikan dengan suatu bilangan tertentu yang disebut rasio. Pada contoh ini, bilangan pada suku pertamanya adalah 2 dan rasionya adalah 2. Untuk menemukan bilangan pada suku ke- $n$ , kita dapat memperhatikan tabel 4.

Pada tabel 4 muncul suatu pola, yaitu bilangan pada setiap suku adalah 2 dipangkatkan dengan bilangan yang menunjukkan urutan sukunya. Bilangan pada suku pertama adalah  $2^1$ , bilangan pada suku ke-2 adalah  $2^2$ , bilangan pada suku ke-3 adalah  $2^3$ , dan seterusnya. Dengan demikian, bilangan pada suku ke-n adalah  $2^n$ .

Tabel 4

Suku ke	Nilai
1	$2 = 2^1$
2	$2 = 2.2 = 2^2$
3	$2 = (2.2).2 = 2^3$
4	$2 = (2.2.2).2 = 2^4$
5	$2 = (2.2.2.2).2 = 2^5$
.	.
.	.
.	.
.	.

Dari tabel 4 di atas, kita dapat memperoleh bahwa bilangan pada suku ke n adalah  $2^n$ . Selanjutnya, perhatikan barisan 2, 6, 18, 54, ... . Bilangan pada setiap suku diperoleh dari bilangan pada satu suku sebelumnya dikalikan dengan 3, sebagaimana diperlihatkan pada tabel 5. Pada pola ini, bilangan pada suku ke-10 adalah  $2 \cdot 3^9$ , dan bilangan pada suku ke-n adalah  $2 \cdot 3^n$ .

Tabel 5

Suku ke	Nilai
1	$2 = 2^1$
2	$6 = 2.3$
3	$2 = (2.3).3 = 2 \cdot 3^2$
4	$2 = (2 \cdot 3^2).3 = 2 \cdot 3^3$
5	$2 = (2 \cdot 3^3).3 = 2 \cdot 3^4$
.	.
.	.
.	.
.	.

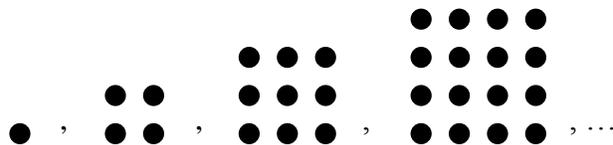
Pendekatan yang sama dapat digunakan untuk menemukan bilangan pada suku ke- $n$  jika bilangan pada suku pertamanya  $a$  dan rasionya  $r$ . Pada tabel 6 kita lihat bahwa pada barisan geometri jika diketahui bilangan pada suku pertamanya  $a$  dan rasionya  $r$  maka bilangan pada suku ke- $n$  adalah  $a.r^{n-1}$ . Untuk  $n = 1$  maka kita memperoleh  $a.r^{1-1} = a.r^0$ . Jika  $r \neq 0$ , maka  $r^0 = 1$ . Dengan demikian, untuk  $n = 1$  kita peroleh  $a.r^0 = a.1 = a$ . Jika kita diberi barisan geometri 3, 12, 48, 192, ..., bilangan pada suku pertama adalah 3 dan rasionya adalah 4. Dengan demikian, bilangan pada suku ke- $n$  adalah  $a.r^{n-1} = 3.4^{n-1}$ .

Tabel 6

Suku ke	Nilai
1	$a$
2	$a.r$
3	$a.r^2$
4	$a.r^3$
5	$a.r^4$
.	.
.	.
.	.
$n$	$a.r^{n-1}$

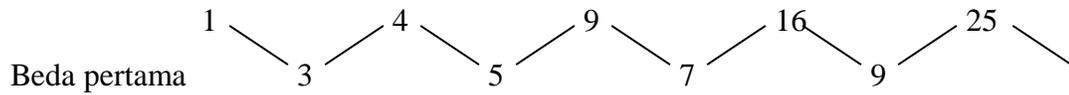
Perhatikan gambar 1 berikut ini

Gambar 1

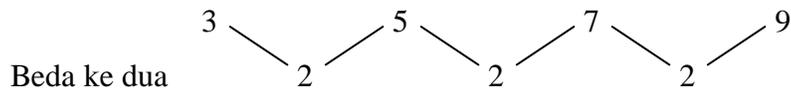


Pada gambar 1 di atas, tampak bahwa banyaknya bulatan pada suku pertama adalah 1, pada suku ke dua adalah 4, pada suku ke tiga adalah 9, dan pada suku ke empat adalah 16. Barisan banyaknya bulatan ini akan kita tulis dalam bentuk barisan bilangan 1, 4, 9, 16, ... dan barisan ini bukan merupakan barisan aritmatika dan juga bukan merupakan

barisan geometri (mengapa?). Kita mengetahui bahwa bilangan-bilangan 1, 4, 9, dan 16 merupakan bilangan kuadrat dan barisan ini tidak mempunyai beda yang tetap.



Barisan dari beda pertama, 3, 5, 7, 9 membentuk barisan aritmatika dengan beda 2.

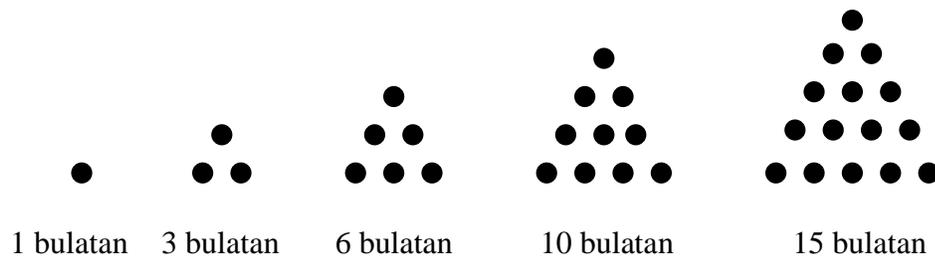


Karena beda ke dua semuanya 2, beda pertama berikutnya (setelah beda 9) adalah 11. Dengan menggunakan informasi ini, kita dapat menentukan suku berikutnya pada barisan asal, yaitu  $25 + 11 = 36$ .

Contoh 4.

Susunan yang tampak pada gambar 2 ini merepresentasikan empat suku pertama dari suatu barisan bilangan yang disebut bilangan-bilangan segitiga sama sisi. Apakah suku ke-10?, apakah suku ke-100? Apakah suku ke-n?

Gambar 2



Kita melihat bahwa empat suku pertama adalah 1, 3, 6, 10, 15. Barisan ini bukan merupakan barisan aritmatika karena tidak mempunyai beda yang sama.

Jawab.

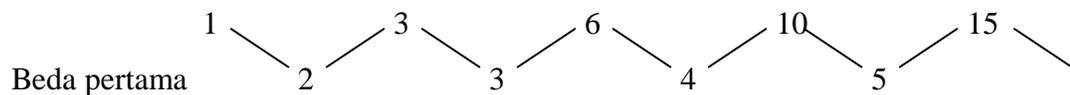
Untuk menyelesaikan ini kita akan menggunakan strategi membuat tabel.

Tabel 7

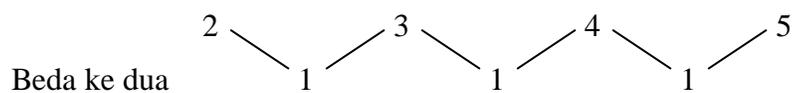
Suku ke	Nilai
1	1
2	$3 = 1 + 2$
3	$6 = 1 + 2 + 3$
4	$10 = 1 + 2 + 3 + 4$
5	$15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$
.	.
.	.
.	.
.	.
10	$1 + 2 + 3 + \dots + 9$

Dari tabel 7 kita mengetahui bahwa suku ke-2 diperoleh dari suku ke-1 ditambah 2, suku ke-3 diperoleh dari suku ke-2 ditambah 3, dan seterusnya. Secara umum, karena bilangan segitiga sama sisi ke- $n$  mempunyai  $n$  bulatan pada baris ke- $n$ , bilangan segitiga sama sisi ke- $n$  sama dengan banyaknya bulatan pada segitiga sama sisi sebelumnya (segitiga sama sisi  $(n-1)$ ) ditambah  $n$  bulatan pada baris ke- $n$ . Polanya adalah, suku ke-10 adalah  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$ , atau 55. Suku ke-100 adalah  $1 + 2 + 3 + \dots + 100$ , dan suku ke- $n$  adalah  $1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n$ .

Cara lain mencari barisan bilangan-bilangan segitiga sama sisi adalah dengan memperhatikan beda-beda, sebagaimana kita lihat pada bilangan kuadrat.



Barisan dari beda pertama, 2, 3, 4, 5 membentuk barisan aritmatika dengan beda 1.



Dengan menggunakan gagasan-gagasan “beda” ini, kita mengetahui bahwa bilangan segitiga sama sisi berikutnya (setelah 15) adalah  $15 + 6$ , atau 21.

Contoh berikutnya adalah bagaimana kita menemukan suatu pola dari barisan-barisan yang mempunyai beda lebih dari satu tingkat (ada beda pertama, beda ke dua dan beda ke tiga).

Contoh 5.

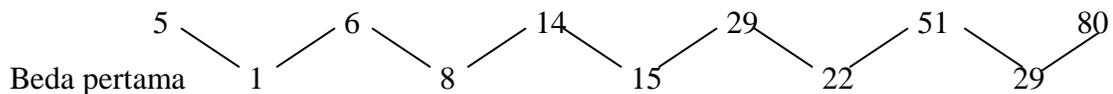
Asumsikan bahwa pola yang akan kita temukan kontinu, tentukan suku ke-7 dari barisan berikut ini.

a. 5, 6, 14, 29, 51, 80, ...

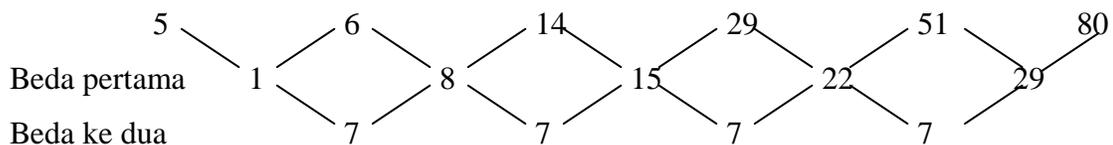
b. 2, 3, 9, 23, 48, 87, ...

Jawab.

a. Pola dari beda-beda antara suku-suku berurutan tidak selalu mudah untuk dipahami.

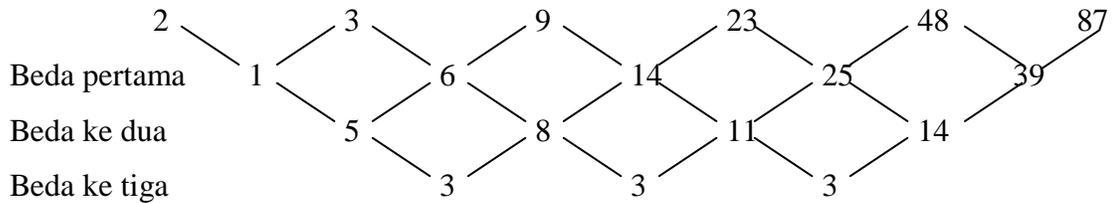


Untuk menemukan pola barisan asal, kita coba menemukan pola barisan beda 1, 8, 15, 22, 29, ... .Barisan ini adalah barisan aritmatika dengan beda 7.



Dengan demikian, suku ke-6 pada baris beda pertama adalah  $29 + 7$ , atau 36 an suku ke-7 pada barisan asal adalah  $80 + 36$ , atau 116. Bilangan berapa setelah 116?

b. Karena beda ke dua bukan bilangan yang tetap, kita lanjutkan untuk melihat beda ke tiga.



Beda ke tiga adalah suatu bilangan tetap. Dengan demikian beda ke dua merupakan barisan aritmatik. Suku ke-5 pada barisan beda ke dua adalah  $14 + 3$ , atau 17, suku ke-6 pada barisan beda pertama adalah  $39 + 17$ , atau 56, dan suku ke-7 pada barisan asal adalah  $87 + 56$ , atau 143.

Ketika diminta menemukan suatu pola untuk suatu barisan yang diberikan, pertama kita coba mengingat beberapa pola yang pernah kita punya. Jika tidak menemukan, maka kita coba menentukan apakah barisan itu termasuk barisan aritmatika atau barisan geometri. Jika polanya tetap belum jelas, kita dapat mencari beberapa tingkat beda, mungkin dapat membantu. Bisa jadi tidak ada satupun metode yang ditampilkan akan memberikan suatu pola.

## 1.2 Basis Bilangan

Para ahli sejarah matematika percaya bahwa satu alasan mengapa mayoritas orang di dunia menggunakan sistem berbasis sepuluh (desimal), dengan sepuluh digit, dari 0 sampai dengan 9, karena pada umumnya orang mempunyai jari tangan sepuluh. Andaikan orang hanya mempunyai satu tangan dengan lima buah jari. Digit yang dapat digunakan untuk membilang hanyalah 0, 1, 2, 3, dan 4. Di dalam “sistem satu tangan” kita membilang 1, 2, 3, 4, 10, di mana 10 merepresentasikan satu tangan dan tidak ada jari. Sistem satu tangan adalah sistem berbasis lima.

Membilang di dalam sistem berbasis lima mengikuti sebagaimana ditunjukkan pada gambar 1 berikut. Kita tulis kata “lima” dalam huruf yang berukuran kecil dan ditempatkan sedikit di bawah suatu lambang bilangan yang menunjukkan bahwa bilangan yang dimaksud adalah ditulis dalam basis lima.

Gambar 1

Simbol Basis Lima	Pengelompokan Basis Lima	Sistem Satu tangan
$0_{\text{lima}}$		0 jari
$1_{\text{lima}}$	x	1 jari
$2_{\text{lima}}$	xx	2 jari
$3_{\text{lima}}$	xxx	3 jari
$4_{\text{lima}}$	xxxx	4 jari
$10_{\text{lima}}$	xxxxx	1 tangan dan 0 jari
$11_{\text{lima}}$	xxxxx x	1 tangan dan 1 jari
$12_{\text{lima}}$	xxxxx xx	1 tangan dan 2 jari
$13_{\text{lima}}$	xxxxx xxx	1 tangan dan 3 jari
$14_{\text{lima}}$	xxxxx xxxx	1 tangan dan 4 jari
$20_{\text{lima}}$	xxxxx xxxxx	2 tangan dan 0 jari
$21_{\text{lima}}$	xxxxx xxxxx x	2 tangan dan 1 jari

Bilangan apa setelah  $44_{\text{lima}}$ ? Tidak ada bilangan dua digit dalam sistem ini setelah  $44_{\text{lima}}$ . Di dalam basis sepuluh, situasi yang sama terjadi pada 99. Kita gunakan 100 untuk merepresentasikan sepuluh puluhan atau seratus. Dalam sistem basis lima, kita membutuhkan suatu simbol untuk merepresentasikan lima lima-an. Meneruskan analogi dengan basis sepuluh, kita gunakan  $100_{\text{lima}}$  untuk merepresentasikan satu kelompok lima-lima-an, 0 kelompok lima-an, dan 0 satuan. Untuk membedakan dari “seratus” dalam basis sepuluh, nama untuk  $100_{\text{lima}}$  adalah “satu-nol-nol basis lima”. Bilangan 100 dan  $100_{\text{lima}}$  mempunyai arti yang berbeda. Bilangan 100 berarti  $1 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0$ , dan bilangan  $100_{\text{lima}}$  mempunyai makna  $(1 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0)_{\text{lima}}$  atau  $(1 \cdot 5^2 + 0 \cdot 5^1 + 0 \cdot 5^0)_{\text{sepuluh}}$  atau 25.

### Contoh

Ubahlah  $11244_{\text{lima}}$  ke dalam basis sepuluh.

Jawab.

$$\begin{aligned}
 11244_{\text{lima}} &= 1 \cdot 5^4 + 1 \cdot 5^3 + 2 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^1 + 4 \cdot 5^0 \\
 &= 1 \cdot 625 + 1 \cdot 125 + 2 \cdot 25 + 4 \cdot 5 + 4 \cdot 1
 \end{aligned}$$

$$= 625 + 125 + 50 + 20 + 4$$

$$= 824$$

Untuk merubah 824 ke suatu bilangan berbasis lima, kita membaginya dengan bilangan lima pangkat 4, lima pangkat tiga, lima pangkat dua, lima pangkat satu, dan lima pangkat nol secara berturut-turut. Pembahasan ini dapat diilustrasikan sebagai berikut.

$\begin{array}{r} 625 \overline{) 824} \quad 1 \\ - 625 \\ \hline \end{array}$	Berapa banyak kelompok 625 di dalam 824?
$\begin{array}{r} 125 \overline{) 199} \quad 1 \\ - 125 \\ \hline \end{array}$	Berapa banyak kelompok 125 di dalam 199?
$\begin{array}{r} 25 \overline{) 74} \quad 2 \\ - 50 \\ \hline \end{array}$	Berapa banyak kelompok 25 di dalam 74?
$\begin{array}{r} 5 \overline{) 24} \quad 4 \\ - 20 \\ \hline \end{array}$	Berapa banyak kelompok 5 di dalam 24?
$\begin{array}{r} 1 \overline{) 4} \quad 4 \\ - 4 \\ \hline 0 \end{array}$	Berapa banyak satuan di dalam 4?
	Dengan demikian, $824 = 11244_{\text{lima}}$

Cara lain untuk merubah 824 menjadi basis lima adalah dengan membagi oleh 5 secara berturut-turut. Hasil baginya diletakkan tepat di bawah bilangan yang dibagi dan sisanya diletakkan di sebelah kanannya. Jawabannya dibaca dari bawah ke atas. Sekarang akan kita tunjukkan merubah 824 menjadi bilangan berbasis lima. Cara yang dibahas ini dikerjakan sebagai berikut.

$$\begin{array}{r} 5 \overline{) 824} \\ 5 \overline{) 164} \quad 4 \\ 5 \overline{) 32} \quad 4 \\ 5 \overline{) 6} \quad 2 \\ 1 \end{array}$$

Para ahli sejarah matematika mengatakan bahwa banyak manusia pada awalnya menggunakan basis dua. Mereka membilang “satu, dua, dua dan satu, dua dua dan satu, ...”. Karena basis dua hanya mempunyai dua digit, basis dua disebut sistem biner. System ini menjadi sangat penting karena digunakan di dalam komputer. Meskipun basis dua digunakan di dalam komputer tetapi sistem ini dianggap tidak efisien digunakan dalam kehidupan sehari-hari.

Konversi dari basis dua ke basis sepuluh dan sebaliknya dapat diperoleh dengan cara yang sama seperti konversi pada basis lima ke basis sepuluh dan sebaliknya.

Contoh 2.

- a. Ubahlah  $10111_{\text{dua}}$  ke basis sepuluh.
- b. Ubahlah 27 ke basis dua.

Jawab.

$$\begin{aligned} \text{a. } 10111_{\text{dua}} &= 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \\ &= 16 + 0 + 4 + 2 + 1 \\ &= 23 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} \text{b.} \quad 2 \overline{) 27} \\ \underline{2 \quad 13} \quad 1 \\ \quad 2 \overline{) 6} \quad 1 \\ \quad \quad \underline{2 \quad 3} \quad 0 \\ \quad \quad \quad 1 \quad 1 \end{array}$$

Dengan demikian, 27 ekuivalen dengan  $11011_{\text{dua}}$

Sistem basis bilangan lain yang biasa digunakan adalah basis dua belas atau sistem duadesimal, yang populer sebagai “sistem losin” atau *dozens system*. Telur dibeli dengan menggunakan losin, pensil dibeli dengan menggunakan gross (losin-losin). Di dalam basis duabelas, ada dua belas digit. Kita mempunyai sepuluh digit pada basis sepuluh, lima digit pada basis lima, dan dua digit pada basis dua. Di dalam basis dua belas kita membutuhkan simbol baru digit setelah 9 dan setelah itu. Simbol yang kita pilih adalah secara berturut-turut T dan E, sedemikian sehingga dua belas digit itu adalah

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, T, E. Dengan demikian, di dalam basis dua belas kita membilang “0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, T, E, 10, 11, 12, ..., 18, 19, 1T, 1E, 20, 21, 22, ..., 2T, 2E, 30, ...”.

Contoh 3.

- Ubahlah  $E2T_{\text{dua belas}}$  ke basis sepuluh.
- Ubahlah 1277 ke basis dua belas.
- 

Jawab.

$$\begin{aligned}
 \text{a. } E2T_{\text{dua belas}} &= 11 \cdot 12^2 + 2 \cdot 12^1 + 10 \cdot 12^0 \\
 &= 11 \cdot 144 + 2 \cdot 12 + 10 \\
 &= 1584 + 24 + 10 \\
 &= 1618
 \end{aligned}$$

b.

$  \begin{array}{r}  \underline{144} \overline{) 1277} \underline{8} \\  - 1152 \\  \hline  \end{array}  $	Berapa banyak kelompok 144 di dalam 1277?
$  \begin{array}{r}  \underline{12} \overline{) 125} \underline{T} \\  - 120 \\  \hline  \end{array}  $	Berapa banyak kelompok 12 di dalam 125?
$  \begin{array}{r}  \underline{1} \overline{) 5} \underline{5} \\  - 5 \\  \hline  0  \end{array}  $	Berapa banyak satuan di dalam 5?

Dengan demikian,

$$1277 = 8T5_{\text{dua belas}}$$

## Penjumlahan dan Pengurangan

Sama seperti pada basis sepuluh, pada basis non-sepuluhpun kita harus belajar fakta dasar penjumlahan dan pengurangan sebelum kita belajar algoritma-algoritma. Sekarang kita pusatkan perhatian kita pada bilangan berbasis lima. Untuk mempelajari fakta dasar penjumlahannya, kita dapat membangun tabel penjumlahan sebagai berikut.

Tabel 1  
Penjumlahan (Basis Lima)

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	10
2	2	3	4	10	11
3	3	4	10	11	12
4	4	10	11	12	12

Dari fakta penjumlahan pada tabel 1 di atas, kita mengembangkan algoritma penjumlahan basis lima seperti penjumlahan pada basis sepuluh. Misalkan kita ingin menjumlahkan  $12_{\text{lima}} + 31_{\text{lima}}$ . Untuk menyelesaikan masalah ini, kita dapat menggunakan beberapa cara: (1) menggunakan benda-benda kongrit, (2) menggunakan pengantar algoritma, dan (3) menggunakan algoritma biasa. Cara pertama kita dapat memanfaatkan batang-batang lima dan batang-batang satuan. Langkah pertama, kita siapkan satu buah batang lima dan dua buah batang satuan. Langkah kedua, kita siapkan tiga buah batang lima dan satu batang satuan. Langkah selanjutnya, gabungkan batang-batang itu dan kita akan memperoleh empat batang lima dan tiga batang satuan. Langkah terakhir ini merepresentasikan  $43_{\text{lima}}$ . Cara ke dua dapat ditunjukkan sebagai berikut:

Limaan	Satuan
1	2
3	1
4	3

Cara ke tiga dapat ditunjukkan sebagai berikut:

$$\begin{array}{r} 12_{\text{lima}} \\ 31_{\text{lima}} + \\ \hline 41_{\text{lima}} \end{array}$$

Untuk menyelesaikan pengurangan, kita dapat memanfaatkan tabel 1 karena pengurangan adalah balikan dari penjumlahan. Misalkan  $12_{\text{lima}} - 4_{\text{lima}} = 3_{\text{lima}}$ , karena kita tahu bahwa  $4_{\text{lima}} + 3_{\text{lima}} = 12_{\text{lima}}$ . Untuk menyelesaikan penjumlahan atau pengurangan seringkali kita harus menggunakan “pengelompokan kembali” atau *regrouping*. Sebagai contoh, kita ingin menyelesaikan  $32_{\text{lima}} - 14_{\text{lima}}$ .

Cara 1.

Langkah pertama, siapkan 3 buah batang lima dan 2 buah batang satuan. Langkah kedua, tukar satu batang lima dengan lima batang satuan; sehingga kita mempunyai 2 batang lima dan 7 batang satuan. Langkah berikutnya, singkirkan 1 batang lima dan 4 batang satuan. Dengan demikian batang-batang yang tersisa adalah 1 batang lima dan 3 batang satuan. Hal ini merepresentasikan  $32_{\text{lima}} - 14_{\text{lima}} = 13_{\text{lima}}$ .

Cara 2.

Cara ini dapat kita tunjukkan sebagai berikut:

Limaan	Satuan
3	2
1	4 -
↓	
Limaan	Satuan
2	12
1	4 -
1	3

Cara 3.

Cara ini dapat ditunjukkan sebagai berikut:

$$\begin{array}{r} 21 \\ \cancel{3}2_{\text{lima}} \\ 14_{\text{lima}} + \\ \hline 31_{\text{lima}} \end{array}$$

## Perkalian dan Pembagian

Sebagaimana pada penjumlahan dan pengurangan, sekarang kita juga perlu mengidentifikasi fakta-fakta dasar perkalian sebelum menggunakan algoritma-algoritma. Fakta-fakta ini diturunkan dengan menggunakan penjumlahan. Fakta-fakta dasar perkalian untuk basis lima disajikan pada tabel 2.

Tabel 2  
Perkalian (Basis Lima)

x	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	11	13
3	0	3	11	14	22
4	0	4	13	22	31

Ada beberapa cara untuk menyelesaikan perkalian  $21_{\text{lima}} \cdot 3_{\text{lima}}$

<u>Limaan</u>	<u>Satuan</u>	$(30 + 1)_{\text{lima}}$	$21_{\text{lima}}$	$21_{\text{lima}}$
2	1	x $3_{\text{lima}}$	x $3_{\text{lima}}$	x $3_{\text{lima}}$
x	3	<hr style="width: 100%;"/>	<hr style="width: 100%;"/>	<hr style="width: 100%;"/>
		$(110 + 3)_{\text{lima}}$	3	113 <sub>lima</sub>
			<hr style="width: 100%;"/>	
			110	
			<hr style="width: 100%;"/>	
			113 <sub>lima</sub>	

Perkalian bilangan dua digit oleh dua digit dapat dikembangkan sebagaimana contoh berikut ini.

$23_{\text{lima}}$		$23_{\text{lima}}$
<u><math>14_{\text{lima}}</math> x</u>	$(10 + 4)_{\text{lima}}$	<u><math>14_{\text{lima}}</math> x</u>
22	$(4 \cdot 3)_{\text{lima}}$	202
130	$(4 \cdot 20)_{\text{lima}}$	<hr style="width: 100%;"/>
30	$(10 \cdot 3)_{\text{lima}}$	432 <sub>lima</sub>
<u>200</u>	$(10 \cdot 20)_{\text{lima}}$	
432 <sub>lima</sub>		

Pembagian dapat ditampilkan dengan menggunakan fakta-fakta perkalian dan definisi pembagian. Sebagai contoh,  $22_{\text{lima}} : 3_{\text{lima}} = c$  jika dan hanya jika  $c \cdot 3_{\text{lima}} = 22_{\text{lima}}$ . Dari tabel perkalian kita mengetahui bahwa  $c = 4_{\text{lima}}$ . Sebagaimana pada basis sepuluh, pembagian-pembagian multidigit pada basis lima perlu sering latihan agar efisien. Gagasan tentang algoritma pembagian dapat dikembangkan dengan menggunakan pengurangan berulang, sebagaimana pada bilangan berbasis sepuluh. Sebagai contoh,  $3241_{\text{lima}} : 43_{\text{lima}}$  dapat diselesaikan dengan menggunakan teknik pengurangan berulang atau dengan menggunakan algoritma biasa. Penggunaan kedua cara ini dalam menyelesaikan masalah  $3241_{\text{lima}} : 43_{\text{lima}}$  ini disajikan sebagai berikut:

a.

$$\begin{array}{r}
 43_{\text{lima}} \overline{) 3241_{\text{lima}}} \\
 \underline{430} \quad (10 \cdot 43)_{\text{lima}} \\
 2311 \\
 \underline{430} \quad (10 \cdot 43)_{\text{lima}} \\
 1331 \\
 \underline{430} \quad (10 \cdot 43)_{\text{lima}} \\
 401 \\
 \underline{141} \quad (2 \cdot 43)_{\text{lima}} \\
 210 \\
 \underline{141} \quad (2 \cdot 43)_{\text{lima}} \\
 14 \quad (34 \cdot 43)_{\text{lima}}
 \end{array}$$

b.

$$\begin{array}{r}
 34_{\text{lima}} \\
 43_{\text{lima}} \overline{) 3241_{\text{lima}}} \\
 \underline{234} \\
 401 \\
 \underline{332} \\
 14
 \end{array}$$

Berikut ini adalah contoh operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian pada bilangan berbasis dua.

Contoh 4.

Selesaikan soal-soal berikut:

a.

$$\begin{array}{r}
 101_{\text{dua}} \\
 111_{\text{dua}} \\
 \underline{110_{\text{dua}} +}
 \end{array}$$

b.

$$\begin{array}{r}
 1010_{\text{dua}} \\
 \underline{111_{\text{dua}} -}
 \end{array}$$

c.

$$\begin{array}{r}
 101_{\text{dua}} \\
 \underline{11_{\text{dua}} \times}
 \end{array}$$

d.

$$101_{\text{dua}} \overline{) 110110_{\text{dua}}}$$

Jawab.

<p>a.</p> $\begin{array}{r} 101_{\text{dua}} \\ 111_{\text{dua}} \\ \hline 110_{\text{dua}} + \\ \hline 10010_{\text{dua}} \end{array}$	<p>b.</p> $\begin{array}{r} 1010_{\text{dua}} \\ \hline 111_{\text{dua}} - \\ \hline 11_{\text{dua}} \end{array}$	<p>c.</p> $\begin{array}{r} 101_{\text{dua}} \\ \hline 11_{\text{dua}} \times \\ \hline 101 \\ \hline 101 \\ \hline 1111_{\text{dua}} \end{array}$	<p>d.</p> $\begin{array}{r} 1010_{\text{dua}} \\ \hline 101_{\text{dua}} \overline{) 110110_{\text{dua}}} \\ \underline{101} \phantom{0} \\ 111 \\ \underline{101} \phantom{0} \\ 100 \end{array}$
---	---	--	--

### Rangkuman

1. Pola merupakan bagian penting dalam pemecahan masalah matematika.
2. Pola digunakan di dalam penalaran induktif untuk membentuk conjecture. Conjecture yaitu pernyataan yang diduga kuat benar tetapi belum dibuktikan kebenarannya.
3. Barisan adalah suatu kumpulan suku-suku dalam urutan tertentu.
  - a. Barisan aritmatika: setiap suku berurutan diperoleh dari satu suku sebelumnya ditambah suatu bilangan tertentu yang disebut beda. Bilangan pada suku ke-n diberikan oleh  $a + (n - 1)d$ , di mana a adalah suku pertama dan d adalah beda.
  - b. Barisan geometri: Setiap suku berurutan diperoleh dari satu suku sebelumnya dikalikan dengan suatu bilangan tertentu yang disebut rasio. Bilangan pada suku ke-n diberikan oleh  $ar^{n-1}$ , di mana a adalah suku pertama dan r adalah rasio.
  - c.  $a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a$  (n buah suku)
  - d.  $a^0 = 1$ , di mana a adalah bilangan asli
  - e. Menemukan beda pada suatu barisan merupakan suatu teknik untuk menemukan suku berikutnya.
4. Di dalam basis lima kita mempunyai lima digit, yaitu 0, 1, 2, 3, dan 4. Jika a, b, c, dan d adalah digit-digit pada bilangan berbasis lima, maka  $abcde_{\text{lima}}$  dapat dikonversikan ke dalam bentuk basis sepuluh, yaitu  $a \cdot 5^3 + b \cdot 5^2 + c \cdot 5^1 + d \cdot 5^0$ .

5. Di dalam basis dua kita mempunyai dua digit, yaitu 0 dan 1. Jika a, b, c, dan d adalah digit-digit pada bilangan berbasis dua, maka  $abcd_{\text{dua}}$  dapat dikonversikan ke dalam bentuk basis sepuluh, yaitu  $a.2^3 + b.2^2 + c.2^1 + d.2^0$ .
6. Di dalam basis dua belas kita mempunyai dua belas digit, yaitu 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, T, E. Jika a, b, c, dan d adalah digit-digit pada bilangan berbasis dua belas, maka  $abcd_{\text{dua belas}}$  dapat dikonversikan ke dalam bentuk basis sepuluh, yaitu  $a.12^3 + b.12^2 + c.12^1 + d.12^0$ .
7. Konversi bilangan berbasis sepuluh ke basis lima, dua, atau dua belas dapat menggunakan model “membagi secara berturut-turut”.

8. Tabel

Fakta Dasar Penjumlahan (Basis Lima)

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	10
2	2	3	4	10	11
3	3	4	10	11	12
4	4	10	11	12	12

6. Tabel

Fakta Dasar Perkalian (Basis Lima)

x	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	11	13
3	0	3	11	14	22
4	0	4	13	22	31

## Latihan 1

Selesaikan soal-soal berikut!

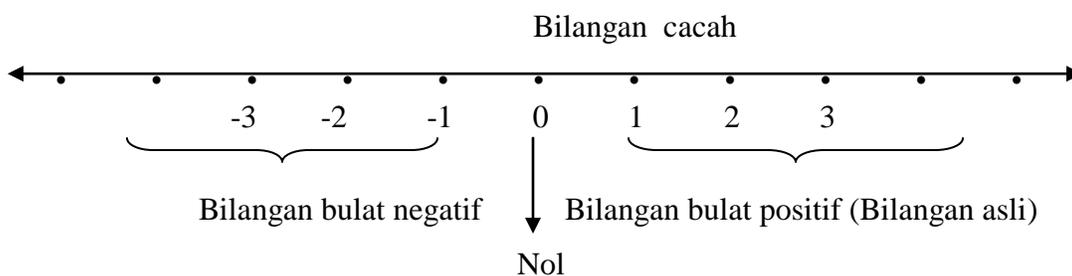
1. Tentukan suku ke-6 dari barisan 2, 5, 8, 11, 14, ... !
2. Tentukan suku ke-100 dari barisan 2, 6, 10, 14, ... !
3. Diketahui suatu susunan persegi-persegi panjang yang mempunyai ketentuan sebagai berikut: persegi panjang pertama mempunyai ukuran panjang dan lebar  $2 \times 1$ , persegi panjang ke dua mempunyai ukuran panjang dan lebar  $3 \times 2$ , persegi panjang ke tiga mempunyai ukuran panjang dan lebar  $4 \times 3$ , persegi panjang ke empat mempunyai ukuran panjang dan lebar  $5 \times 4$ . Tentukan luas persegi panjang ke 100 !
4. Diketahui beda pertama suatu barisan adalah 2, 4, 6, 8, .... Jika suku ke lima pada barisan asal adalah 35, tentukan suku ke enam pada barisan asal itu!
5. Sebuah bis kota mulai menaikkan penumpang jam 5.30. Jika 1 orang masuk pada halte pertama, 3 orang masuk pada halte ke dua, 5 orang masuk pada halte ke tiga, dan seterusnya. Tentukan banyak orang yang masuk pada halte ke sepuluh!
6. Tentukan banyak suku pada barisan 9, 13, 17, 21, 25, ..., 151 !
7. Carilah empat bilangan pertama pada basis dua!
8. Ubahlah bentuk  $432_{\text{lima}}$  ke dalam basis sepuluh!
9. Tentukan nilai  $b$  jika  $b2_{\text{tujuh}} = 44$  !
10. Tentukan hasil dari  $110_{\text{dua}} + 11_{\text{dua}}$  !

## BAB II

### BILANGAN BULAT

Bab ini membahas tentang bilangan bulat dan pembelajarannya di Sekolah Dasar. Bilangan bulat merupakan perluasan dari bilangan cacah, untuk menjawab permasalahan-permasalahan yang tidak terjawab pada bilangan cacah. Sebagai contoh, tidak ada jawaban untuk mencari penyelesaian dari “ $3 - 5$ ” pada bilangan cacah. Dengan kata lain, pada himpunan bilangan cacah memiliki beberapa kekurangan. Oleh sebab itu, perlu adanya perluasan untuk himpunan bilangan cacah yang dikenal dengan nama bilangan bulat.

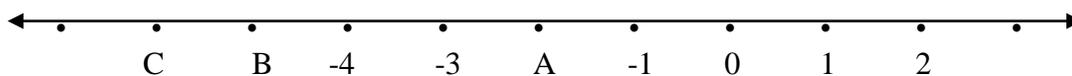
Sebagai seorang guru di Sekolah Dasar mengajar matematika, tentu saudara sudah mengenal dengan apa yang disebut bilangan bulat. Himpunan bilangan bulat terdiri dari himpunan bilangan asli yaitu  $\{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$  yang selanjutnya disebut bilangan bulat positif, bilangan nol dan lawan dari bilangan asli yaitu  $\{-1, -2, -3, -4, \dots\}$ , yang selanjutnya disebut bilangan bulat negatif. Jadi himpunan bilangan bulat adalah  $\{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ . Sedangkan gabungan himpunan bilangan asli dan nol disebut himpunan bilangan cacah.. Hubungan antara himpunan bilangan asli, cacah, nol, dan bulat dapat disajikan dengan menggunakan garis bilangan sebagai berikut.



Gambar 1

Gambar 1 di atas menunjukkan bahwa untuk bilangan bulat positif digambarkan sebagai jarak berarah ke kanan pada garis bilangan yang dimulai dari 0, dan untuk bilangan bulat negatif digambarkan sebagai jarak berarah ke kiri pada garis bilangan yang dimulai dari 0.

Penyajian bilangan bulat dapat menggunakan sebuah garis bilangan. Titik nol adalah titik yang mewakili bilangan nol. Titik-titik yang ada di sebelah kanan bilangan nol mewakili bilangan positif dan titik-titik yang ada di sebelah kiri titik nol mewakili bilangan negatif. Guru dapat menggambarkan garis bilangan seperti pada gambar 2 pada papan tulis, kemudian meminta seorang siswa maju kedepan dengan mengajukan pertanyaan-pertanyaan sebagai berikut : Bilangan berapakah yang sesuai dengan titik A, B dan C pada garis bilangan berikut ?



Gambar 2

Selanjutnya guru menunjukkan bahwa letak titik 3 berlawanan dengan letak titik -3 terhadap titik nol pada garis bilangan. 3 disebut lawan dari -3. Setelah konsep bilangan bulat dipahami oleh siswa, maka dapat dilanjutkan dengan operasi penjumlahan dan pengurangan pada bilangan bulat. Untuk menjelaskan operasi penjumlahan dan pengurangan guru dapat menggunakan beberapa media. Media yang disajikan di sini adalah dengan menggunakan garis bilangan dan muatan.

## 2.1 Penjumlahan dan Pengurangan Bilangan Bulat

Misalkan kita akan menyelesaikan bentuk-bentuk penjumlahan atau pengurangan dua bilangan bulat berikut :

$$1. 1 + 2 =$$

$$2. 1 + (-2) =$$

$$3. 1 - 2 =$$

$$4. 1 - (-2) =$$

Untuk menyelesaikan masalah-masalah ini, kita dapat menggunakan banyak cara, diantaranya adalah menggunakan garis bilangan dan menggunakan manik-manik.

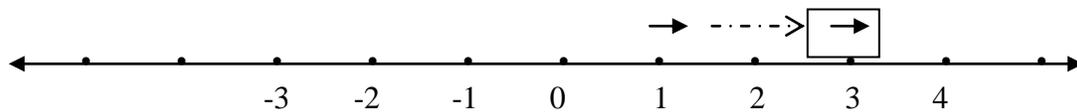
### Penjumlahan dan Pengurangan dengan Menggunakan Garis Bilangan

Ada beberapa perjanjian yang harus diperhatikan dalam penggunaan garis bilangan, yaitu:

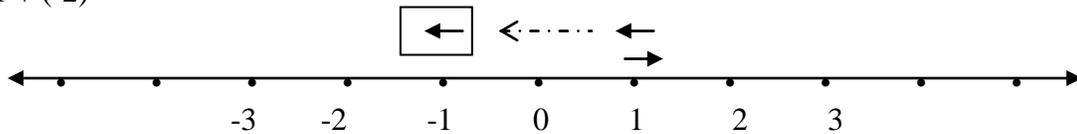
1. Posisi awal anak panah harus dimulai dari bilangan yang pertama. Apabila bilangan pertama itu positif maka anak panah menghadap ke kanan, dan apabila negative maka anak panah menghadap ke kiri.
2. Untuk operasi penjumlahan anak panah maju sejauh bilangan penambahnya. Apabila bilangan penambahnya positif maka anak arah panah tetap menghadap ke kanan, dan apabila bilangan penambahnya bilangan negatif maka arah anak panah diubah menghadap ke kiri.
3. Untuk pengurangan anak panah mundur sejauh bilangan pengurangnya. Apabila bilangan pengurangnya positif maka anak arah panah tetap menghadap ke kanan, dan apabila bilangan pengurangnya bilangan negatif maka arah anak panah diubah menghadap ke kiri.

Sebagai ilustrasi perhatikan peragaan berikut:

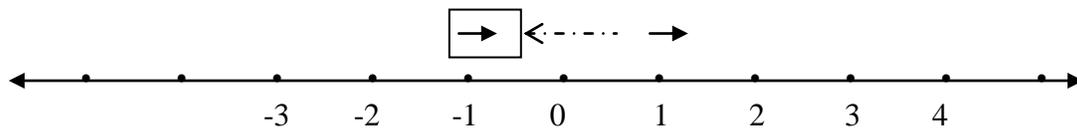
1.  $1 + 2 =$



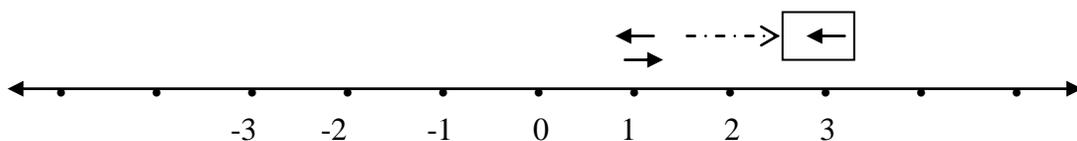
2.  $1 + (-2) =$



3.  $1 - 2 =$



4.  $1 - (-2) =$



## Penjumlahan dan Pengurangan dengan Menggunakan Muatan

Ada beberapa prinsip yang perlu diperhatikan untuk memperagakan operasi hitung penjumlahan dan pengurangan bilangan bulat menggunakan muatan. Muatan positif untuk menunjukkan bilangan bulat positif dan muatan negatif menunjukkan bilangan negatif. Pasangan muatan positif dan negatif adalah netral, yang diartikan mempunyai nilai nol. Operasi penjumlahan adalah penggabungan muatan sesuai dengan bilangannya. Hasil penjumlahan ditunjukkan dengan muatan yang tidak mempunyai pasangan (positif atau negatif). Operasi pengurangan adalah pengambilan muatan sesuai dengan bilangannya. Seperti penjumlahan, hasil pengurangan ditunjukkan dengan muatan yang tidak mempunyai pasangan (positif atau negatif).

Sebagai ilustrasi perhatikan peragaan berikut:

1. Bilangan 0 dapat ditunjukkan dengan 

+
-

, 

+	+
-	-

, atau 

+	+	+
-	-	-

2. Bilangan 1 dapat ditunjukkan dengan 

+
---

, 

+	+
-	-

, atau 

+	+	+
-	-	-

3. Bilangan -1 dapat ditunjukkan dengan 

-
---

, 

+	
-	-

, atau 

+	+	
-	-	-

4.  $-1 + 2 = \dots$ , dapat ditunjukkan dengan 

+	+
---	---

-
---

Dengan demikian,  $-1 + 2 = 1$

5.  $-1 + (-2) = \dots$ , dapat ditunjukkan dengan 

-
---

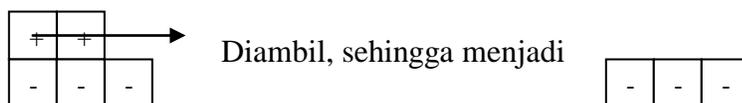
-	-
---	---

Dengan demikian,  $-1 + (-2) = -3$

6.  $-1 - 2 = \dots$ ,

Untuk menyelesaikan masalah ini, pertama kita harus menunjukkan -1 dengan beberapa muatan yang dapat diambil dua buah muatan positifnya. Untuk itu, -1 dapat ditunjukkan dengan 3 muatan negatif dan 2 muatan positif. Selanjutnya diambil 2

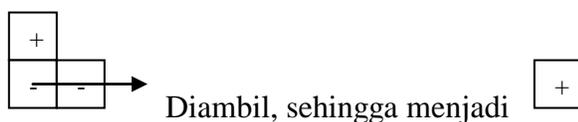
muatan positifnya, sehingga tersisa 1 muatan negatif. Peragaannya adalah sebagai berikut.



Dengan demikian,  $-1 - 2 = -3$ .

7.  $-1 - (-2) = \dots$ ,

Untuk menyelesaikan masalah ini, pertama kita harus menunjukkan  $-1$  dengan beberapa muatan yang dapat diambil dua buah muatan negatifnya. Untuk itu,  $-1$  dapat ditunjukkan dengan 2 muatan negatif dan 1 muatan positif. Selanjutnya diambil 2 muatan negatifnya, sehingga tersisa 1 muatan positif. Peragaannya adalah sebagai berikut.



Dengan demikian,  $-1 - (-2) = 1$ .

## 2.2 Perkalian Bilangan Bulat

Misalkan kita akan menyelesaikan bentuk-bentuk perkalian dua bilangan bulat berikut :

1.  $-5 \times 2 =$

2.  $3 \times (-9) =$

3.  $-6 \times (-5) =$

Untuk menyelesaikan masalah-masalah ini, kita dapat menggunakan banyak cara, diantaranya adalah menggunakan pola bilangan. Pola bilangan ini diturunkan dari perkalian bilangan cacah yang telah diketahui kita sebelumnya Sebagai ilustrasi, berikut ini beberapa LKS yang menyajikan hasil kali dua bilangan bulat. LKS 1 menyajikan hasil dari bilangan bulat negatif kali bilangan bulat positif; LKS 2 menyajikan hasil dari bilangan bulat positif kali bilangan bulat negatif; sedangkan LKS 3 menyajikan hasil dari bilangan bulat negatif kali bilangan bulat negatif.

**LKS 1**

Selesaikan soal-soal berikut!

1.  $5 \times 1 = \dots$
2.  $4 \times 1 = \dots$
3.  $3 \times 1 = \dots$
4.  $2 \times 1 = \dots$
5.  $1 \times 1 = \dots$
6.  $0 \times 1 = \dots$
7.  $-1 \times 1 = \dots$
8.  $(-) \times (+) = (\dots)$
9.  $-5 \times 2 = \dots$

Dari LKS 1 tampak bahwa jika bilangan yang dikalikan turun satu maka hasil kalinya juga turun satu, sehingga  $-1 \times 1 = -1$ . Dengan demikian  $(-) \times (+) = (-)$ . Akhirnya kita dapat menentukan bahwa  $-5 \times 2 = -10$ .

**LKS 2**

Selesaikan soal-soal berikut!

1.  $1 \times 5 = \dots$
2.  $1 \times 4 = \dots$
3.  $1 \times 3 = \dots$
4.  $1 \times 2 = \dots$
5.  $1 \times 1 = \dots$
6.  $1 \times 0 = \dots$
7.  $1 \times (-1) = \dots$
8.  $(+) \times (-) = (\dots)$
9.  $3 \times (-9) = \dots$

Dari LKS 2 tampak bahwa jika bilangan pengali turun satu maka hasil kalinya juga turun satu, sehingga  $1 \times (-1) = -1$ . Dengan demikian  $(+) \times (-) = (-)$ . Akhirnya kita dapat menentukan bahwa  $3 \times -9 = -27$ .

Dari pemahaman tentang  $(-) \times (+) = (-)$  atau  $(+) \times (-) = (-)$ , kita dapat melanjutkannya untuk memahami hasil kali antara dua buah bilangan bulat negatif. Untuk itu, perhatikan LKS 3 berikut ini.

1.  $-1 \times 5 = \dots$
2.  $-1 \times 4 = \dots$
3.  $-1 \times 3 = \dots$
4.  $-1 \times 2 = \dots$
5.  $-1 \times 1 = \dots$
6.  $-1 \times 0 = \dots$
7.  $-1 \times (-1) = \dots$
8.  $(-) \times (-) = (\dots)$
9.  $-6 \times (-5) = \dots$

Dari LKS 3 tampak bahwa jika bilangan pengali turun satu maka hasil kalinya naik satu, sehingga  $-1 \times (-1) = 1$ . Dengan demikian  $(-) \times (-) = (+)$ . Akhirnya kita dapat menentukan bahwa  $-6 \times (-5) = 30$ .

### 2.3 Pembagian Bilangan Bulat

Operasi pembagian pada dasarnya adalah suatu proses pencarian tentang bilangan yang belum diketahui pada perkalian, atau sering disebut pembagian adalah balikan dari perkalian. Dengan kata lain, bentuk pembagian dapat dipandang sebagai suatu bentuk operasi perkalian dengan salah satu faktornya yang belum diketahui.

Perhatikan contoh berikut!

$$1. \frac{12}{3} = \dots$$

$$\frac{12}{3} = \dots \text{artinya kita harus menyelesaikan } \dots \times 3 = 12.$$

$$\text{Karena } 4 \times 3 = 12, \text{ kita peroleh } \frac{12}{3} = 4$$

$$2. \frac{12}{-3} = \dots$$

$\frac{12}{-3} = \dots$  artinya kita harus menyelesaikan  $\dots \times (-3) = 12$ .

Karena  $-4 \times (-3) = 12$ , kita peroleh  $\frac{12}{-3} = -4$

$$3. \frac{-12}{3} = \dots$$

$\frac{-12}{3} = \dots$  artinya kita harus menyelesaikan  $\dots \times 3 = -12$ .

Karena  $-4 \times 3 = -12$ , kita peroleh  $\frac{-12}{3} = -4$

$$4. \frac{-12}{-3} = \dots$$

$\frac{-12}{-3} = \dots$  artinya kita harus menyelesaikan  $\dots \times (-3) = -12$ .

Karena  $4 \times (-3) = -12$ , kita peroleh  $\frac{-12}{-3} = 4$

Dari contoh-contoh di atas, dapat ditarik kesimpulan (sementara) bahwa:

$$1. \frac{(+)}{(+)} = (+)$$

$$2. \frac{(+)}{(-)} = (-)$$

$$3. \frac{(-)}{(+)} = (-)$$

$$4. \frac{(-)}{(-)} = (+)$$

## 2.4 Pembagian Yang Melibatkan Bilangan Nol

Sebagaimana telah dijelaskan pada bagian 2.3, pembagian adalah balikan dari perkalian. Pada bagian ini akan dibahas pembagian yang melibatkan bilangan nol. Perhatikan beberapa contoh berikut.

$$1. \frac{0}{5} = \dots$$

$$\frac{0}{5} = \dots \text{ artinya kita harus menyelesaikan } \dots \times 5 = 0.$$

Karena yang memenuhi hanya 0, atau ditulis  $0 \times 5 = 0$ , kita peroleh  $\frac{0}{5} = 0$

$$2. \frac{5}{0} = \dots$$

$$\frac{5}{0} = \dots \text{ artinya kita harus menyelesaikan } \dots \times 0 = 5.$$

Karena tidak ada satupun bilangan yang memenuhi, kita katakan bahwa

$$\frac{5}{0} \text{ tidak didefinisikan.}$$

$$3. \frac{0}{0} = \dots$$

$$\frac{0}{0} = \dots \text{ artinya kita harus menyelesaikan } \dots \times 0 = 0.$$

Karena banyak sekali bilangan yang memenuhi, kita katakan bahwa

$$\frac{0}{0} \text{ tidak didefinisikan.}$$

Dari contoh-contoh di atas, dapat ditarik kesimpulan (sementara) bahwa:

$$1. \frac{0}{n} = 0 \text{ untuk setiap } n \neq 0$$

$$2. \frac{n}{0} \text{ tidak didefinisikan}$$

## Rangkuman

1. Bilangan bulat terdiri dari bilangan bulat positif yang merupakan bilangan asli, bilangan nol dan bilangan-bilangan bulat negatif.
2. Bilangan bulat negatif merupakan lawan dari bilangan-bilangan bulat positif. Lawan dari suatu bilangan itu memiliki tanda yang berlawanan dengan bilangan yang dimaksud, contohnya -2 merupakan lawan dari 2 dan sebaliknya.
5. Dalam perkalian bilangan bulat berlaku :
  - a.  $(+) \times (+) = (+)$
  - b.  $(+) \times (-) = (-)$
  - c.  $(-) \times (+) = (-)$
  - d.  $(-) \times (-) = (+)$
6. Operasi pembagian pada dasarnya adalah proses pencarian tentang faktor yang belum diketahui dari suatu bentuk perkalian:
  - a.  $\frac{(+)}{(+)} = (+)$
  - b.  $\frac{(+)}{(-)} = (-)$
  - c.  $\frac{(-)}{(+)} = (-)$
  - d.  $\frac{(-)}{(-)} = (+)$
7. Pada operasi pembagian yang melibatkan bilangan 0 berlaku:
  - a.  $\frac{0}{n} = 0$  untuk setiap  $n \neq 0$
  - b.  $\frac{n}{0}$  tidak didefinisikan

## Latihan 2

1. Nyatakan operasi berikut dengan garis bilangan!

a.  $-2 + 3$

b.  $-2 - 3$

c.  $-2 + (-3)$

d.  $-2 - (-3)$

2. Nyatakan operasi berikut dengan muatan!

a.  $-3 + 1$

b.  $-3 - 1$

c.  $-3 + (-1)$

d.  $-3 - (-1)$

3. Selesaikan operasi berikut!

a.  $-3 \times 4 =$

b.  $-4 \times (-5) =$

c.  $5 \times (-3) =$

4. Selesaikan operasi berikut dan berikan alasannya!

a.  $30 : (-5) =$

b.  $-45 : 9 =$

c.  $-35 \times (-7) =$

## BAB III

### KETERBAGIAN BILANGAN BULAT

#### 3.1 Pengertian dan Sifat

Bab ini menyajikan pembahasan keterbagian bilangan bulat dan sifat-sifatnya serta uji keterbagian beberapa bilangan bulat. Di dalam operasi pembagian seperti  $12 : 3 = 4$ , semua pernyataan pada kolom kiri di bawah ini adalah benar. Setiap pernyataan pada kolom kiri tersebut dapat dituliskan sebagai  $3 \mid 12$ .

Contoh	Pernyataan Umum
12 dibagi oleh 3	a dibagi oleh b
3 adalah pembagi 12	b adalah pembagi 12
12 adalah kelipatan dari 3	a adalah kelipatan dari b
3 adalah faktor dari 12	b adalah faktor dari a
3 membagi 12	b membagi a

Secara umum, jika  $a : b = c$ , di mana a, b, dan c adalah bilangan-bilangan bulat maka pernyataan pada kolom kanan di atas adalah benar. Setiap pernyataan pada kolom kanan tersebut dapat ditulis sebagai  $b \mid a$  dan biasanya dibaca “b pembagi a”. Kemudian kita akan mendefinisikan keterbagian bilangan itu sebagai berikut.

#### Definisi

Misalkan a dan b bilangan-bilangan bulat sebarang; b pembagi a jika dan hanya jika ada bilangan bulat c sedemikian sehingga  $a = bc$ .

Jika  $b \mid a$  maka b adalah suatu faktor atau suatu pembagi a, dan a adalah suatu kelipatan dari b.

Jangan dikacaukan antara  $b \mid a$  dan  $b/a$  yang diterjemahkan sebagai  $b : a$ .  $b \mid a$  merupakan suatu relasi benar atau salah. Sedangkan  $b/a$  merupakan suatu operasi yang mempunyai suatu nilai bilangan tertentu. Untuk lebih memantapkan pengertian ini,

bandingkan antara  $0 : 0$  dan  $0 \mid 0$ . Kita tahu bahwa  $0 : 0$  tidak terdefinisi, tetapi  $0 \mid 0$  adalah pernyataan yang benar karena  $0 = 0 \cdot a$  untuk setiap bilangan bulat  $a$ .

Kita menulis  $5 \nmid 12$  untuk menyatakan bahwa 12 tidak dapat dibagi (tidak habis dibagi) oleh 5, atau 5 tidak membagi 12. Penulisan  $5 \nmid 12$  juga untuk menyatakan bahwa 12 adalah bukan kelipatan 5 dan 5 adalah bukan faktor dari 12.

Contoh 1.

Klasifikasikan apakah pernyataan-pernyataan yang berikut ini benar atau salah, dan berikan alasannya.

- $-3 \mid 12$
- $0 \mid 3$
- $3 \mid 0$
- Jika  $3 \mid a$  maka  $3 \mid na$ , di mana  $n$  adalah bilangan bulat sebarang
- $8 \nmid 2$
- Untuk setiap bilangan bulat  $a$  berlaku  $1 \mid a$
- Untuk setiap bilangan bulat  $a$  berlaku  $-1 \mid a$

Jawab.

- $-3 \mid 12$  benar karena  $12 = -4(-3)$
- $0 \mid 3$  salah karena tidak ada bilangan bulat  $c$  sedemikian sehingga  $3 = c \cdot 0$
- $3 \mid 0$  benar karena  $0 = 0 \cdot 3$
- $3 \mid na$  benar. Jika  $3 \mid a$  maka ada suatu bilangan bulat  $k$  sehingga  $a = 3k$ . Kalikan kedua sisi dari persamaan itu dengan  $n$ , kita peroleh  $an = (3k) \cdot n$ . Dengan menggunakan sifat-sifat komutatif, asosiatif, dan ketertutupan perkalian pada bilangan bulat, kita peroleh  $na = 3(nk)$ , di mana  $nk$  adalah suatu bilangan bulat. jadi  $3 \mid na$ .
- $8 \nmid 2$  benar karena tidak ada bilangan bulat  $c$  sedemikian sehingga  $2 = c \cdot 8$
- $1 \mid a$  benar untuk setiap bilangan bulat  $a$  karena  $a = a \cdot 1$
- $-1 \mid a$  benar untuk setiap bilangan bulat  $a$  karena  $a = (-a)(-1)$ .

Pada contoh 1 (d), kita lihat bahwa jika 3 membagi  $a$  maka 3 membagi setiap bilangan bulat kelipatan dari  $a$ . Hal ini dapat digeneralisasi sebagai suatu sifat berikut ini.

## Sifat 1

Misalkan  $a$ ,  $d$ , dan  $n$  bilangan-bilangan bulat sebarang. Jika  $d \mid a$  maka  $d \mid na$ .

Bukti.

Jika  $d \mid a$  maka ada suatu bilangan bulat  $k$  sehingga  $a = dk$ .

Dengan mengalikan kedua ruas pada persamaan di atas dengan  $n$ , kita peroleh  $a(n) = dk(n)$ . Dengan menggunakan sifat-sifat komutatif, asosiatif, dan ketertutupan perkalian pada bilangan bulat, kita peroleh  $n.a = d(nk)$ . Jadi  $d \mid na$ .

## Sifat 2

Misalkan  $a$ ,  $b$ , dan  $d$  bilangan bulat sebarang.

- Jika  $d \mid a$  dan  $d \mid b$  maka  $d \mid (a + b)$ .
- Jika  $d \mid a$  dan  $d \nmid b$  maka  $d \nmid (a + b)$ .
- Jika  $d \mid a$  dan  $d \mid b$  maka  $d \mid (a - b)$ .
- Jika  $d \mid a$  dan  $d \nmid b$  maka  $d \nmid (a - b)$ .

Akan dibuktikan sifat 2.a dan sisanya dapat digunakan untuk latihan.

Bukti:

$d \mid a$  mengakibatkan  $a = md$ ,  $m$  suatu bilangan bulat.

$d \mid b$  mengakibatkan  $b = nd$ ,  $n$  suatu bilangan bulat

$$\begin{aligned} a + b &= md + nd \\ &= (m + n)d \end{aligned}$$

Karena  $m$  dan  $n$  bilangan bulat,  $m + n$  juga bilangan bulat,  $d \mid (a + b)$ .

Dengan demikian,  $d$  membagi  $a + b$ , atau ditulis  $d \mid (a + b)$ .

Contoh 2.

Periksa apakah pernyataan berikut ini benar atau salah. Jika benar maka buktikanlah, dan jika salah maka berikan sebuah contoh penyangkalnya (*counterexample*).

- Jika  $3 \mid x$  dan  $3 \mid y$  maka  $3 \mid xy$ .
- Jika  $3 \mid (x + y)$  maka  $3 \mid x$  dan  $3 \mid y$ .
- Jika  $9 \nmid a$  maka  $3 \nmid a$ .

Jawab.

a. Benar.

Dengan menggunakan sifat 1, jika  $3 \mid x$  maka untuk setiap bilangan bulat  $k$  berlaku  $3 \mid kx$ . Jika  $k = y$  maka  $3 \mid xy$ .

b. Salah.

Contoh,  $3 \mid (7 + 2)$ , tetapi  $3 \nmid 7$  dan  $3 \nmid 2$ .

c. Salah.

Contoh,  $9 \nmid 21$ , tetapi  $3 \mid 21$ .

Soal Latihan

1. Periksa kebenaran pernyataan berikut:

- a.  $6 \mid 90$ .
- b.  $17 \mid 1734$ .
- c.  $17 \mid 34015$ .
- d.  $17 \mid 34051$ .
- e.  $19 \mid 19031$ .
- f.  $31 \mid 19031$ .
- g.  $2^{14} \mid (2^{64} + 1)$ .

2. Tentukan sisa pembagian dari bilangan berikut ini jika dibagi oleh 9:

- a. 10000
- b. 2000
- c. 700
- d. 123
- e. 1230
- f. 4311

3. Jika  $n$  adalah suatu bilangan bulat yang diketahui, lengkapilah tabel berikut ini:

$n$	Sisa jika $n$ dibagi oleh 9	Jumlah dari digit-digit $n$	Sisa jika jumlah digit-digit $n$ dibagi oleh 9
a. 31	4	4	4
b. 143			
c. 345			
d. 2987			
e. 7652			

4. Perhatikan jumlah  $193 + 24 + 786 = 1003$ . Jika 193, 24, dan 786 dibagi oleh 9 maka sisanya berturut-turut adalah 4, 6, dan 3. Jumlah dari sisa-sisa itu adalah 13, mempunyai sisa 4 jika dibagi 9, sebagaimana 1003 dibagi oleh 9. Dengan cara serupa, tentukan sisa bilangan-bilangan berikut ini jika dibagi oleh 9.
- $12343 + 4546 + 56$ .
  - $987 + 456 + 8765$ .
  - $10034 + 3004 + 400 + 20$ .
5. Dapatkah cara seperti no. 4 digunakan bila bilangan-bilangan yang diberikan berbentuk pengurangan atau perkalian berikut:
- $1003 - 46$ .
  - $345 \times 56$ .
6. Periksa kebenaran pernyataan-pernyataan berikut ini. Jika benar maka buktikan, dan jika salah maka berikan sebuah contoh penyangkalnya (*counterexample*).
- Jika  $d \mid (a + b)$  maka  $d \mid a$  dan  $d \mid b$ .
  - Jika  $d \mid (a - b)$  maka  $d \mid a$  atau  $d \mid b$ .
  - Jika  $d \mid a$  dan  $d \mid b$  maka  $d \mid b$ .
  - Jika  $d \mid ab$  maka  $d \mid a$  atau  $d \mid b$ .
  - Jika  $ab \mid c$ ,  $a \neq 0$  dan  $b \neq 0$  maka  $a \mid c$  dan  $b \mid c$ .
  - $d \mid 0$ .

### 3.2 Beberapa Uji Keterbagian Bilangan Bulat

Untuk menguji suatu bilangan bulat dapat dibagi (habis dibagi) atau tidak dapat dibagi oleh bilangan bulat lain kita dapat menggunakan kalkulator atau dengan metode pembagian cara panjang. Meskipun demikian, kita akan mengungkapkan cara lain untuk menguji keterbagian beberapa bilangan bulat. Sebagai contoh, kita akan menentukan apakah 1734 habis dibagi oleh 17. Untuk keperluan ini, perhatikan langkah-langkah berikut ini:

$$1734 = 1700 + 34$$

Karena  $17 \mid 1700$  dan  $17 \mid 34$ , menurut sifat keterbagian,  $17 \mid (1700 + 34)$ , atau  $17 \mid 1734$ . Dengan cara yang sama, kita dapat menentukan bahwa  $17 \nmid 1735$ .

Untuk menentukan apakah suatu bilangan bulat  $n$  dapat dibagi (habis dibagi) oleh bilangan bulat lain  $d$ , kita pertimbangkan bahwa  $n$  sebagai jumlah atau selisih dua bilangan-bilangan bulat di mana  $d$  paling sedikit dapat membagi satu dari bilangan-bilangan bulat itu. Sebagai contoh, tentukan apakah 358 habis dibagi oleh 2. Jelas sekali bahwa 358 dapat dibagi oleh 2 karena 358 adalah bilangan genap. Hal ini karena digit satuannya 2. Selanjutnya perhatikan yang berikut ini:

$$\begin{aligned} 358 &= 350 + 8 \\ &= 35(10) + 8 \end{aligned}$$

Kita mengetahui bahwa  $2 \mid 10$  sehingga  $2 \mid 35(10)$ , dan  $2 \mid 8$  yang mengakibatkan  $2 \mid (35(10) + 8)$ . Karena 2 membagi sebarang bilangan berkelipatan 10, untuk menentukan apakah suatu bilangan dapat dibagi oleh 2 cukup dengan memperhatikan apakah digit satuannya dapat dibagi oleh 2. Jika digit satuannya tidak dapat dibagi oleh 2 maka bilangan itu tidak dapat dibagi oleh 2.

Kita dapat mengembangkan uji serupa ini untuk keterbagian oleh 5 dan 10. Secara umum, kita mempunyai aturan-aturan keterbagian sebagai berikut:

Uji keterbagian oleh 2.

Suatu bilangan bulat dapat dibagi oleh 2 jika dan hanya jika digit satuannya dapat dibagi oleh 2.

Uji keterbagian oleh 5.

Suatu bilangan bulat dapat dibagi oleh 5 jika dan hanya jika digit satuannya dapat dibagi oleh 5. Hal ini berarti bahwa digit satuannya adalah 0 atau 5.

Uji keterbagian oleh 10.

Suatu bilangan bulat dapat dibagi oleh 10 jika dan hanya jika digit satuannya dapat dibagi oleh 10. Hal ini berarti bahwa digit satuannya adalah 0.

Selanjutnya kita akan memperhatikan aturan keterbagian oleh 4 dan 8. Kita tahu bahwa  $4 \nmid 10$  dan  $8 \nmid 10$  sehingga tidak tepat jika kita digit satuan untuk keterbagian oleh 4 dan 8. Tetapi 4 atau  $2^2$  dapat membagi  $10^2$ , dan 8 atau  $2^3$  dapat membagi  $10^3$ .

Pertama kita akan mengembangkan suatu aturan keterbagian oleh 4. Perhatikan empat digit bilangan  $n$  sebarang, sedemikian sehingga  $n = a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d$ . Kita tahu bahwa  $4 \mid 10^2$  karena  $10^2 = 4 \cdot 25$  dan akibatnya  $4 \mid 10^3$ . Karena  $4 \mid 10^2$ ,  $4 \mid b \cdot 10^2$  dan  $4 \mid a \cdot 10^3$ . Akhirnya,  $4 \mid b \cdot 10^2$  dan  $4 \mid a \cdot 10^3$  memberikan implikasi  $4 \mid (a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2)$ . Sekarang, keterbagian  $n = a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d$  oleh 4 tergantung pada keterbagian  $(c \cdot 10 + d)$  oleh 4.  $(c \cdot 10 + d)$  merupakan bilangan yang ditampilkan oleh dua digit terakhir pada bilangan bulat  $n$  yang diberikan. Kita rangkum hal ini di dalam uji berikut ini.

Uji keterbagian oleh 4

Suatu bilangan bulat dapat dibagi oleh 4 jika dan hanya jika dua digit terakhirnya menyatakan bilangan yang dapat dibagi oleh 4.

Untuk menyelidiki suatu bilangan bulat dapat dibagi oleh 8, kita telah mengetahui bahwa pangkat terkecil dari 10 yang dapat dibagi oleh 8 adalah 10. Karena  $10 = 8 \cdot 125$ . Akibatnya, untuk setiap bilangan bulat  $n$  dan  $n > 3$ ,  $10^n$  juga dapat dibagi oleh 8.

Uji keterbagian oleh 8

Suatu bilangan bulat dapat dibagi oleh 8 jika dan hanya jika tiga digit terakhirnya menyatakan bilangan yang dapat dibagi oleh 8.

Berikut ini adalah beberapa contoh penggunaan uji keterbagian oleh 2, uji keterbagian oleh 4, dan uji keterbagian oleh 8.

Contoh1.

- a. Tentukan apakah 97128 dapat dibagi oleh 2, 4, dan 8.
- b. Tentukan apakah 83026 dapat dibagi oleh 2, 4, dan 8.

Jawab.

- a.  $2 \mid 97128$  karena  $2 \mid 8$ .  
 $4 \mid 97128$  karena  $4 \mid 28$ .  
 $8 \mid 97128$  karena  $8 \mid 128$ .
- b.  $2 \mid 83026$  karena  $2 \mid 6$ .  
 $4 \mid 83026$  karena  $4 \mid 26$ .  
 $8 \nmid 83026$  karena  $4 \nmid 026$ .

Selanjutnya, kita perhatikan keterbagian suatu bilangan bulat oleh 3. Tidak ada pangkat dari 10 yang dapat dibagi oleh 3, tetapi bilangan-bilangan 9, 99, 999, dan yang sejenisnya adalah dekat dengan bilangan pangkat dari 10 dan dapat dibagi oleh 3. Kita tulis kembali bilangan-bilangan yang menggunakan 999, 99, dan 9 sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 5721 &= 5 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 1 \\
 &= 5(999 + 1) + 7(99 + 1) + 2(9 + 1) + 1 \\
 &= 5 \cdot 999 + 5 \cdot 1 + 7 \cdot 99 + 7 \cdot 1 + 2 \cdot 9 + 2 \cdot 1 + 1 \\
 &= (5 \cdot 999 + 7 \cdot 99 + 2 \cdot 9) + (5 + 7 + 2 + 1)
 \end{aligned}$$

Jumlah dari bilangan-bilangan yang ada dalam kurung pertama dapat dibagi oleh 3. Jadi keterbagian 5721 oleh 3 tergantung pada jumlah bilangan-bilangan yang ada di dalam kurung ke dua. Di dalam kasus ini,  $5 + 7 + 2 + 1 = 15$  dan  $3 \mid 15$ . Jadi  $3 \mid 5721$ . Dengan demikian, untuk memeriksa apakah 5721 dapat dibagi oleh 3, kita cukup memeriksa apakah  $5 + 7 + 2 + 1$  dapat dibagi oleh 3. Contoh ini membawa kita pada uji keterbagian oleh 3 sebagai berikut.

Uji keterbagian oleh 3

Suatu bilangan bulat dapat dibagi oleh 3 jika dan hanya jika jumlah digit-digitnya merupakan bilangan yang dapat dibagi oleh 3.

Kita dapat menggunakan argumen yang serupa untuk digunakan membuktikan keterbagian suatu bilangan bulat oleh 3, khususnya bilangan bulat bilangan bulat yang mempunyai 4 digit,  $n = a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d$ .

Karena  $a \cdot 999 + b \cdot 99 + c \cdot 9 + d$  dekat ke  $n$  dan dapat dibagi oleh 3, kita peroleh sebagai berikut:

$$\begin{aligned} a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d &= a \cdot 1000 + b \cdot 100 + c \cdot 10 + d \\ &= a(999 + 1) + b(99 + 1) + c(9 + 1) + d \\ &= (a \cdot 999 + b \cdot 99 + c \cdot 9) + (a \cdot 1 + b \cdot 1 + c \cdot 1) \\ &= (a \cdot 999 + b \cdot 99 + c \cdot 9) + (a + b + c) \end{aligned}$$

Karena  $3 \mid 999$ ,  $3 \mid 99$ , dan  $3 \mid 9$ ,  $3 \mid (a \cdot 999 + b \cdot 99 + c \cdot 9)$ .

Jika  $3 \mid (a + b + c)$  maka  $3 \mid ((a \cdot 999 + b \cdot 99 + c \cdot 9) + (a + b + c))$ . Hal ini berarti  $3 \mid n$ . Di lain pihak, jika  $3 \nmid (a + b + c)$  maka  $3 \nmid ((a \cdot 999 + b \cdot 99 + c \cdot 9) + (a + b + c))$ . Hal ini berarti  $3 \nmid n$ .

Karena  $9 \mid 9$ ,  $9 \mid 99$ ,  $9 \mid 999$ , dan seterusnya dengan uji yang serupa dengan uji keterbagian suatu bilangan bulat oleh 3, kita dapat menentukan keterbagian suatu bilangan bulat oleh 9

Uji keterbagian oleh 9

Suatu bilangan bulat dapat dibagi oleh 9 jika dan hanya jika jumlah dari digit-digitnya merupakan bilangan yang dapat dibagi oleh 9.

Contoh 2.

- Tentukan apakah 1002 dapat dibagi oleh 3 dan dapat dibagi oleh 9.
- Tentukan apakah 14238 dapat dibagi oleh 3 dan dapat dibagi oleh 9.

Jawab.

- Karena  $1 + 0 + 0 + 2 = 3$  dan  $3 \mid 3$ , akibatnya  $3 \mid 1002$ .  
Karena  $9 \nmid 3$ , akibatnya  $9 \nmid 1002$ .
- Karena  $1 + 4 + 2 + 3 + 8 = 18$  dan  $3 \mid 18$ , akibatnya  $3 \mid 14238$ .  
Karena  $9 \mid 18$ , akibatnya  $9 \mid 14238$ .

Selanjutnya akan kita perhatikan uji keterbagian suatu bilangan bulat oleh 7, oleh 11, dan oleh 6, yaitu sebagai berikut:

Uji keterbagian oleh 7

Suatu bilangan bulat dapat dibagi oleh 7 jika dan hanya jika bilangan yang dinyatakan tanpa digit satuannya dikurangi dua kali unit satuan asalnya, dapat dibagi oleh 7.

Uji keterbagian oleh 11

Suatu bilangan bulat dapat dibagi oleh 11 jika dan hanya jika jumlah digit-digit yang berada pada pangkat genap dari 10 dikurangi jumlah digit-digit yang berada pada pangkat ganjil dari 10, dapat dibagi oleh 11.

Uji keterbagian oleh 6

Suatu bilangan bulat dapat dibagi oleh 6 jika dan hanya jika bilangan itu dapat dibagi oleh 2 dan 3.

Contoh 3.

- Tentukan apakah 8471986 dapat dibagi oleh 11.
- Tentukan apakah 462 dapat dibagi oleh: (i) 7, (ii) 11, dan (iii) 6.
- Tentukan apakah 875 dapat dibagi oleh: (i) 7, (ii) 11, dan (iii) 6.

Jawab.

a.  $(6 + 9 + 7 + 8) - (8 + 1 + 4) = 17.$

Karena  $11 \nmid 17$ , kita simpulkan  $11 \nmid 8471986$ .

b.

(i)  $46 - 2 \cdot 2 = 42$  dan  $7 \mid 42.$

Jadi,  $7 \mid 462.$

(ii)  $(2 + 4) - 6 = 0$  dan  $11 \mid 0$

Jadi,  $11 \mid 462.$

(iii)  $2 \mid 462$  dan  $3 \mid 462.$

Jadi  $6 \mid 462.$

c.

(i)  $87 - 2 \cdot 5 = 77$  dan  $7 \mid 77$

Jadi  $7 \mid 875$

(ii)  $(5 + 8) - 7 = 6$  dan  $11 \nmid 6$

Jadi,  $11 \nmid 875$ .

(iii)  $2 \nmid 875$  karena 875 bilangan ganjil.

Jadi  $6 \nmid 875$ .

### Rangkuman

1. Misalkan  $a$  dan  $b$  bilangan-bilangan bulat sebarang;  $b \mid a$  jika dan hanya jika ada bilangan bulat  $c$  sedemikian sehingga  $a = bc$ .
2. Misalkan  $a$ ,  $d$ , dan  $n$  bilangan-bilangan bulat sebarang. Jika  $d \mid a$  maka  $d \mid na$ .
3. Misalkan  $a$ ,  $b$ , dan  $d$  bilangan bulat sebarang.
  - a. Jika  $d \mid a$  dan  $d \mid b$  maka  $d \mid (a + b)$ .
  - b. Jika  $d \mid a$  dan  $d \nmid b$  maka  $d \nmid (a + b)$ .
  - c. Jika  $d \mid a$  dan  $d \mid b$  maka  $d \mid (a - b)$ .
  - d. Jika  $d \mid a$  dan  $d \nmid b$  maka  $d \nmid (a - b)$ .
4. Suatu bilangan bulat dapat dibagi oleh 2 jika dan hanya jika digit satuannya dapat dibagi oleh 2.
5. Suatu bilangan bulat dapat dibagi oleh 5 jika dan hanya jika digit satuannya dapat dibagi oleh 5. Hal ini berarti bahwa digit satuannya adalah 0 atau 5.
6. Suatu bilangan bulat dapat dibagi oleh 10 jika dan hanya jika digit satuannya dapat dibagi oleh 10. Hal ini berarti bahwa digit satuannya adalah 0.
7. Suatu bilangan bulat dapat dibagi oleh 4 jika dan hanya jika dua digit terakhirnya menyatakan bilangan yang dapat dibagi oleh 4.
8. Suatu bilangan bulat dapat dibagi oleh 8 jika dan hanya jika tiga digit terakhirnya menyatakan bilangan yang dapat dibagi oleh 8.
9. Suatu bilangan bulat dapat dibagi oleh 3 jika dan hanya jika jumlah digit-digitnya merupakan bilangan yang dapat dibagi oleh 3.
10. Suatu bilangan bulat dapat dibagi oleh 9 jika dan hanya jika jumlah dari digit-digitnya merupakan bilangan yang dapat dibagi oleh 9.

11. Suatu bilangan bulat dapat dibagi oleh 7 jika dan hanya jika bilangan yang dinyatakan tanpa digit satuannya dikurangi dua kali unit satuan asalnya, dapat dibagi oleh 7.

### Latihan 3

Selesaikan soal-soal berikut!

1. Periksa kebenarannya!
  - a.  $3 \mid 8$
  - b.  $23 \mid 46000043$
  - c. Jika  $5 \mid (a + b)$  maka  $5 \mid a$  dan  $5 \mid b$ .
  - d. Jika  $5 \mid a$  atau  $5 \mid b$  maka  $5 \mid (a + b)$ .
  
2. Periksa kebenarannya!
  - a. Jika  $4 \mid a$  maka  $8 \mid a$ .
  - b. Jika  $d \mid a$  maka  $d^2 \mid a$ .
  - c. Jika  $3 \mid (x + y)$  maka  $3 \mid x$  dan  $3 \mid y$ .
  - d. Jika  $3 \mid p$  maka  $3 \mid 2p$ .
  
3. Tentukan sisa pembagian  $(8 \times 10^{12})$  oleh 9.
  
4. Jika  $9 \mid 85mn1$ , tentukan m dan n.
  
5. Jika  $3 \mid 74n$ , tentukan n.

## **BAB IV**

### **PEMBELAJARAN BILANGAN PECAHAN**

Bab ini menyajikan pembelajaran pengenalan bilangan pecahan dan kegiatan pembelajaran operasi pada bilangan pecahan. Karena materi ini diajarkan di tingkat sekolah dasar dan agar anda (guru dan calon guru SD) dapat menyelenggarakan pembelajarannya dengan baik, anda mutlak harus menguasai materi ini dan mampu memilih pendekatan yang tepat dalam menyelenggarakan pembelajarannya. Disamping itu, agar pembelajaran lebih bermakna, usahakan kaitkan materi ini dengan kejadian-kejadian dalam kehidupan sehari-hari. Pada bab ini, bilangan pecahan yang dimaksud dibatasi pada bilangan pecahan positif.

#### **4.1 Pengertian Bilangan Pecahan.**

Dalam kehidupan sehari-hari, kita sering membagi-bagikan makanan kepada orang lain. Misalkan kita membagi 10 buah jeruk kepada 5 orang dan setiap orang itu mendapat bagian yang sama. Berapa buah jeruk diterima oleh setiap orang itu? Masalah ini sangat mudah diselesaikan oleh siswa yang sudah menguasai operasi pembagian bilangan asli, yaitu  $10 : 2 = 5$ . Bagaimana jika masalahnya kita ubah menjadi sebagai berikut: Misalkan kita membagi 2 buah mangga untuk 5 orang dengan setiap orang memperoleh bagian yang sama. Berapa buah mangga yang diterima oleh setiap orang itu? Mungkin siswa akan menjawab “tidak bisa”. Jika hal seperti ini terjadi berarti siswa tersebut belum belajar atau belum memahami pengertian bilangan pecahan.

Untuk menanamkan pemahaman siswa tentang pengertian bilangan pecahan, guru harus menyediakan beberapa benda kongrit dan beberapa gambar yang diharapkan dapat membantu membangun pemahaman siswa terhadap pengertian pecahan. Misalkan kegiatannya adalah sebagai berikut: Guru menunjukkan satu buah mangga kepada siswa kemudian memotong buah mangga itu menjadi dua bagian sama besar. Guru bertanya kepada siswa, ada berapa potongan buah mangga seluruhnya sekarang? Siswa akan menjawab dua potong. Guru menunjukkan satu potongan buah mangga itu kepada siswa dan bertanya, ada berapa potongan buah mangga di tangan bapak / ibu guru? Siswa

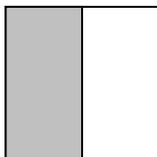
menjawab 1 potong. Selanjutnya guru mengatakan kepada siswa bahwa bagian mangga yang ditunjukkan oleh bapak / ibu guru adalah 1 dari keseluruhan atau 1 dari 2, dan ditulis dengan  $\frac{1}{2}$ . Untuk menguatkan pemahaman siswa tentang pengertian pecahan, guru perlu memberikan beberapa kegiatan seperti di atas untuk bilangan pecahan selain  $\frac{1}{2}$  yang dilakukan langsung oleh siswa secara berkelompok.

Memilih benda-benda yang ada di sekitar siswa untuk digunakan sebagai alat peraga dalam menanamkan konsep bilangan pecahan harus hati-hati. Jika pemilihan benda itu tidak tepat, besar kemungkinan konsep bilangan pecahan yang ingin anda tanamkan tidak akan ditangkap siswa secara baik. Usahakan benda-benda kongrit yang digunakan untuk menanamkan konsep bilangan pecahan mempunyai bentuk teratur dan mudah potong menjadi beberapa bagian sama besar. Perlu diingat bahwa suatu alat peraga itu baik jika alat peraga tersebut dapat digunakan membantu menanamkan suatu konsep matematika, alat peraga itu harus dapat meningkatkan minat siswa terhadap matematika, dan alat peraga itu harus aman bagi siswa.

Kegiatan pembelajaran seperti contoh di muka merupakan kegiatan pembelajaran yang melibatkan benda-benda kongrit. Setelah kegiatan pembelajaran yang melibatkan benda-benda kongrit, kegiatan pembelajaran selanjutnya melibatkan benda-benda semi kongrit, seperti menggunakan gambar. Untuk kegiatan pembelajaran yang menggunakan gambar, kita dapat memanfaatkan pengalaman siswa tentang luas daerah. Perhatikan contoh berikut ini. Guru memperlihatkan gambar yang mewakili bilangan 1 dan gambar yang mewakili bilangan  $\frac{1}{2}$ .

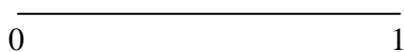


Luas daerah keseluruhan mewakili bilangan 1

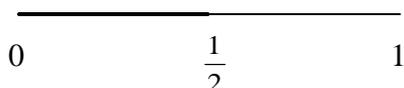


Luas daerah yang gelap mewakili bilangan  $\frac{1}{2}$

Untuk kegiatan pembelajaran yang menggunakan gambar, kita juga dapat memanfaatkan pengalaman siswa tentang panjang ruas garis. Perhatikan contoh berikut ini. Guru dapat memperlihatkan ruas garis yang mewakili bilangan 1 dan ruas garis yang mewakili bilangan  $\frac{1}{2}$ .

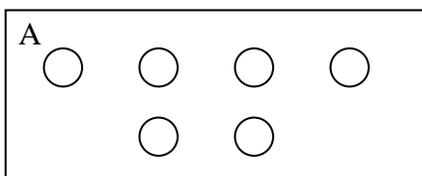


Satu satuan panjang yang mewakili bilangan 1

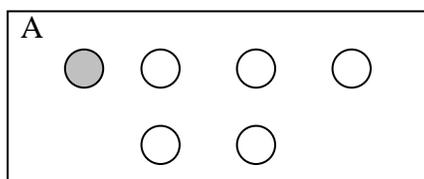


Lambang untuk panjang bagian yang ditebalkan adalah  $\frac{1}{2}$  dan dibaca satu per dua. 1 adalah pembilangnya dan 2 adalah penyebutnya. Tanda garis antara 1 dan 2 dinamakan garis pecahan.

Kegiatan lain yang dapat kita laksanakan untuk membangun pemahaman siswa terhadap bilangan pecahan adalah memanfaatkan pengalaman siswa tentang himpunan dan unsur-unsurnya. Bilangan pecahan dapat diilustrasikan sebagai perbandingan himpunan bagian yang sama dari suatu himpunan terhadap keseluruhan himpunan semula. Maksudnya dari pernyataan itu adalah apabila suatu himpunan dibagi atas himpunan bagian yang sama, maka perbandingan setiap himpunan bagian yang sama itu terhadap keseluruhan himpunan semula akan mengilustrasikan suatu bilangan pecahan. Guru memperlihatkan himpunan bulatan-bulatan sebagai berikut:



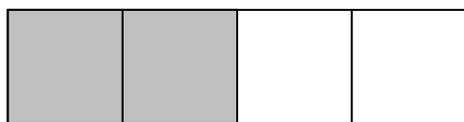
Banyak anggota himpunan A adalah 5



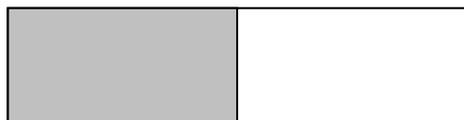
Jika himpunan A dibagi menjadi himpunan-himpunan bagian yang sama, maka setiap himpunan bagian mempunyai satu anggota dan dibandingkan dengan himpunan A adalah  $\frac{1}{5}$ .

## 4.2 Bilangan Pecahan yang Senilai.

Mintalah siswa memperhatikan gambar berikut ini.



Gambar a



Gambar a

Ajukan beberapa pertanyaan kepada siswa, yaitu:

1. Persegipanjang pada gambar a dibagi menjadi beberapa bagian yang sama besar. Berapa banyak bagian itu? Diharapkan siswa menjawab 4 bagian.
2. Berapa banyak bagian yang gelap pada gambar a itu? Diharapkan siswa menjawab 2 bagian.
3. Jika dibandingkan seluruh bagian pada gambar a, bagaimana menuliskan bagian yang gelap pada gambar a menggunakan bilangan pecahan? Diharapkan siswa menjawab  $\frac{2}{4}$ .
4. Persegipanjang pada gambar b dibagi menjadi beberapa bagian yang sama besar. Berapa banyak bagian itu? Diharapkan siswa menjawab 2 bagian.
5. Berapa banyak bagian yang gelap pada gambar b itu? Diharapkan siswa menjawab 1 bagian.

6. Jika dibandingkan seluruh bagian pada gambar a, bagaimana menuliskan bagian yang gelap pada gambar b menggunakan bilangan pecahan? Diharapkan siswa menjawab  $\frac{1}{2}$ .
7. Bandingkan bagian yang gelap pada gambar a dan bagian yang gelap pada gambar b, mana yang lebih besar? Bagaimana kesimpulan kalian? Dengan bimbingan guru diharapkan siswa menjawab sama besar dan menyimpulkan bahwa  $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ .
8. Mintalah siswa menunjukkan dengan gambar beberapa pasang bilangan pecahan yang senilai. Bimbinglah siswa jika mereka kesulitan menunjukkan gambar bilangan-bilangan pecahan yang senilai itu.

Cara lain menunjukkan satu pasang bilangan pecahan senilai adalah menggunakan dua garis bilangan. Coba anda tunjukkan dengan garis-garis bilangan bahwa  $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ .

Bilangan-bilangan pecahan senilai adalah bilangan-bilangan pecahan yang cara penulisannya berbeda tetapi mempunyai hasil bagi yang sama, atau bilangan-bilangan itu mewakili daerah yang sama, atau mewakili bagian yang sama.

### 4.3 Bilangan Pecahan Murni, Senama, dan Campuran

#### 1. Bilangan Pecahan Murni

Perhatikan bilangan-bilangan pecahan berikut:  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{2}{5}$ ,  $\frac{5}{7}$ ,  $\frac{2}{6}$ ,  $\frac{4}{10}$ , dan  $\frac{12}{5}$ .

Beberapa bilangan pecahan tersebut dapat dikelompokkan menjadi 2 buah kelompok, yaitu kelompok pertama dan kelompok kedua. Kelompok pertama terdiri dari bilangan-bilangan pecahan yang kurang dari 1, yaitu  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{2}{5}$ ,  $\frac{5}{7}$ ,  $\frac{2}{6}$ , dan  $\frac{4}{10}$ . Kelompok kedua

terdiri dari bilangan yang lebih besar dari 1, yaitu  $\frac{12}{5}$ . Kita dapat lagi membagi

kelompok pertama menjadi dua sub kelompok, yaitu sub kelompok A dan sub kelompok B. Sub kelompok A terdiri dari bilangan pecahan yang FPB dari pembilang dan penyebutnya adalah bilangan 1. Sub kelompok A ini adalah  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{2}{5}$ , dan  $\frac{5}{7}$ . Sedangkan sub

kelompok B terdiri dari bilangan pecahan yang FPB dari pembilang dan penyebutnya bukan bilangan 1. Sub kelompok B ini adalah  $\frac{2}{6}$ , dan  $\frac{4}{10}$ .

Kita pusatkan perhatian kita pada kelompok 1 sub kelompok A, yaitu bilangan pecahan yang kurang dari 1 dan FPB dari pembilang dan penyebutnya adalah bilangan 1. Bilangan-bilangan itu adalah  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{2}{5}$ , dan  $\frac{5}{7}$ . Suatu bilangan pecahan yang mempunyai ciri-ciri seperti ini dinamakan bilangan pecahan murni atau bilangan pecahan sejati atau bilangan pecahan paling sederhana.

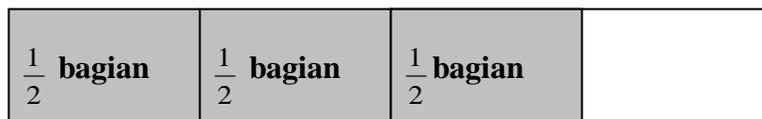
## 2. Bilangan Pecahan Senama

Perhatikan bilangan-bilangan pecahan berikut:  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{2}{5}$ ,  $\frac{5}{7}$ ,  $\frac{1}{6}$ ,  $\frac{3}{6}$ , dan  $\frac{4}{6}$ .

Beberapa bilangan pecahan tersebut dapat dikelompokkan menjadi 2 buah kelompok, yaitu kelompok pertama dan kelompok kedua. Kelompok pertama terdiri dari bilangan-bilangan pecahan yang mempunyai penyebut bilangan 6 dan kelompok kedua terdiri dari bilangan-bilangan pecahan yang mempunyai penyebut bukan bilangan 6. Kita perhatikan kelompok pertama, yaitu bilangan pecahan yang mempunyai ciri penyebutnya adalah bilangan yang sama. Bilangan-bilangan pecahan yang mempunyai penyebut adalah bilangan yang sama dinamakan bilangan pecahan senama.

## 3. Bilangan Pecahan Campuran.

Perhatikan gambar berikut:



Gambar a

Bagian yang diarsir dari seluruh gambar di atas adalah  $\frac{3}{2}$  bagian.



**1 bagian**                       $\frac{1}{2}$  bagian

Gambar b.

Bagian yang diarsir dari seluruh gambar di atas adalah 1 bagian ditambah  $\frac{1}{2}$  bagian atau  $1\frac{1}{2}$  bagian. Gambar a dan gambar b adalah dua gambar yang sama. Bagian yang gelap pada gambar a dan bagian yang gelap pada gambar b menunjukkan luas daerah yang sama. Dengan demikian  $\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$ .

Perhatikan bilangan-bilangan pecahan berikut:  $1\frac{1}{4}$ ,  $\frac{8}{5}$ ,  $\frac{4}{6}$ ,  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{2}{5}$ , dan  $\frac{5}{7}$ .

Beberapa bilangan pecahan tersebut dapat dikelompokkan menjadi 2 buah kelompok, yaitu kelompok pertama dan kelompok kedua. Kelompok pertama terdiri dari bilangan-bilangan pecahan lebih dari 1, yaitu  $1\frac{1}{4}$  dan  $\frac{8}{5}$ ; dan kelompok kedua terdiri dari bilangan-bilangan pecahan yang kurang dari 1, yaitu  $\frac{4}{6}$ ,  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{2}{5}$ , dan  $\frac{5}{7}$ . Kita perhatikan kelompok pertama, yaitu bilangan pecahan yang mempunyai ciri nilainya lebih dari 1. Bilangan-bilangan pecahan yang mempunyai pembilangnya lebih besar dari penyebutnya, atau bilangan yang lebih besar dari 1 dinamakan bilangan pecahan campuran.

Bagaimana cara anda mengenalkan bilangan pecahan murni, bilangan pecahan senama, dan bilangan pecahan campuran kepada siswa? Silahkan anda coba memikirkannya. Jika anda sulit menyelesaikannya, pelajarilah masalah ini melalui buku acuan utama atau rujukan tambahan.

#### 4.4 Penjumlahan dan Pengurangan Bilangan Pecahan.

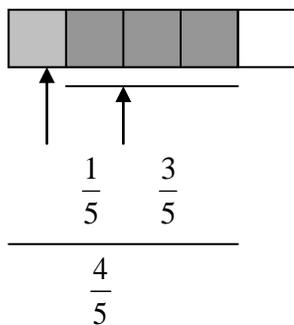
Pada kegiatan belajar ini, akan dibahas beberapa operasi pada bilangan pecahan. Operasi-operasi itu adalah operasi penjumlahan, operasi pengurangan, operasi perkalian, dan operasi pembagian. Pada operasi pembagian dan operasi pengurangan, khususnya yang berkenaan dengan bilangan-bilangan pecahan tidak senama banyak siswa yang tampak kesulitan memahaminya. Hal ini karena siswa tersebut belum mempunyai

pemahaman yang baik tentang kelipatan persekutuan terbesar (KPK) dari dua buah bilangan asli. Untuk itu, disarankan agar guru memeriksa kembali kesiapan siswa tentang KPK sebelum melaksanakan pembelajaran penjumlahan dan pengurangan pecahan tidak senama.

Bilangan pecahan tidak dapat digunakan untuk menyatakan banyak anggota suatu himpunan. Namun demikian, penjumlahan dan pengurangan bilangan pecahan dapat diperagakan dengan benda-benda kongrit, bangun-bangun datar, atau garis bilangan. Penjumlahan dan pengurangan bilangan pecahan dapat dikelompokkan dalam dua jenis. Jenis pertama, penjumlahan dan pengurangan bilangan pecahan senama; dan penjumlahan dan pengurangan bilangan pecahan tidak senama.

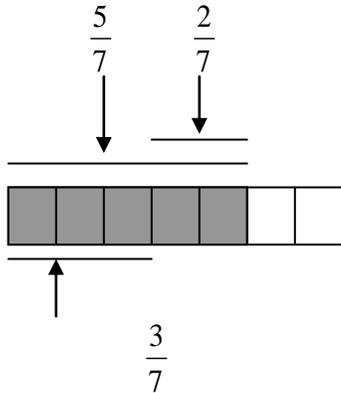
#### 1. Penjumlahan dan Pengurangan Bilangan Pecahan Senama.

Perhatikan penjumlahan  $\frac{1}{5} + \frac{3}{5} = ?$  Untuk mencari hasil penjumlahan itu, kita dapat menggunakan bangun yang tampak seperti gambar berikut:



Dari gambar di atas, tampak bahwa  $\frac{1}{5} + \frac{3}{5} = \frac{4}{5}$ .

Perhatikan pengurangan  $\frac{5}{7} - \frac{2}{7} = ?$  Untuk mencari hasil pengurangan itu, kita dapat menggunakan bangun yang tampak seperti berikut:



Dari gambar di atas, tampak bahwa  $\frac{5}{7} - \frac{2}{7} = \frac{3}{7}$

Penyelesaian dengan algoritma, masalah di atas dapat diselesaikan sebagai berikut:

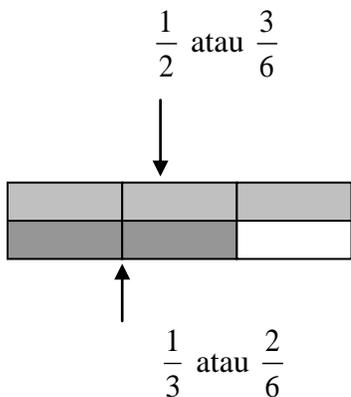
$$\frac{1}{5} + \frac{3}{5} = \frac{(1+3)}{5} = \frac{4}{5}, \text{ dan}$$

$$\frac{5}{7} - \frac{2}{7} = \frac{(5-2)}{7} = \frac{3}{7}.$$

## 2. Penjumlahan dan Pengurangan Bilangan Pecahan Tidak Senama.

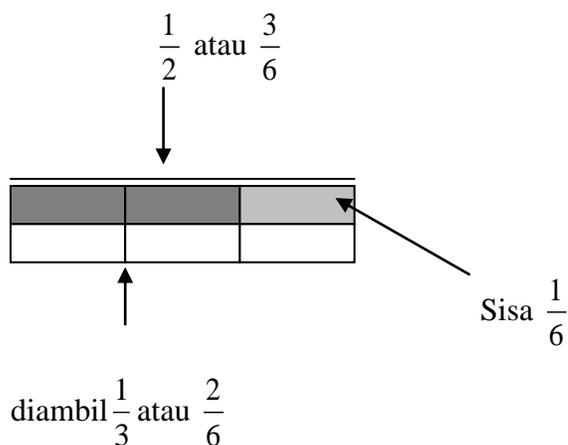
Perhatikan penjumlahan  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = ?$  Untuk mencari hasil penjumlahan itu, kita dapat

menggunakan bangun yang tampak seperti gambar berikut:



Dari gambar di atas, tampak bahwa  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$

Perhatikan pengurangan  $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = ?$  Untuk mencari hasil pengurangan itu, kita dapat menggunakan bangun yang tampak seperti berikut:



Dari gambar di atas, tampak bahwa  $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$

Dengan menggunakan algoritma, masalah di atas dapat diselesaikan sebagai berikut:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{(3+2)}{6} = \frac{5}{6}, \text{ dan}$$

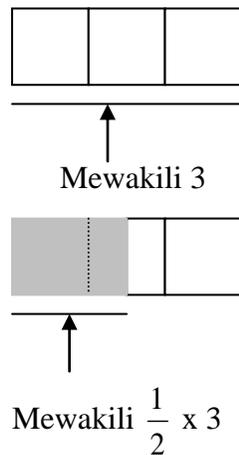
$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{(3-2)}{6} = \frac{1}{6}$$

## 5 Pembelajaran Perkalian dan Pembagian Bilangan Pecahan.

Pada saat membahas perkalian dan pembagian bilangan asli, perkalian dua bilangan diartikan sebagai penjumlahan berulang; sedangkan pembagian dapat diartikan sebagai pengurangan berulang. Sebagai contoh: (1)  $2 \times 3$  diartikan sebagai  $3 + 3$ , sedangkan  $3 \times 2$  diartikan sebagai  $2 + 2 + 2$ ; dengan demikian  $3 \times \frac{1}{2}$  dapat diartikan sebagai  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ . (2)  $6 : 2$  diartikan sebagai  $6 - 2 - 2 - 2 = 0$ ; jadi  $6 : 2 = 3$ .

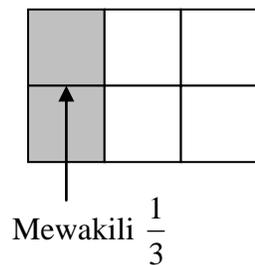
#### 4.5 Perkalian Bilangan Pecahan.

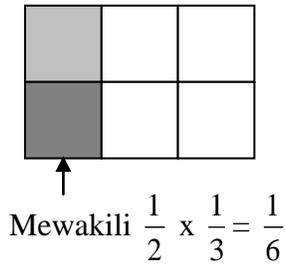
Sekarang masalahnya adalah bagaimana mengartikan  $\frac{1}{2} \times 3$ ? Untuk mengalikan dua buah bilangan dengan pengalinya bilangan pecahan, kita tidak dapat lagi menggunakan definisi perkalian dengan pengalinya bilangan asli. Untuk itu kita butuh definisi baru untuk mengartikan  $\frac{1}{2} \times 3$ .  $\frac{1}{2} \times 3$  dapat diartikan sebagai  $\frac{1}{2}$  dari 3, atau  $\frac{1}{2}$ -nya 3. Untuk lebih jelasnya perhatikan ambar berikut ini.



Dari gambar di atas tampak bahwa  $\frac{1}{2} \times 3 = 1\frac{1}{2}$  atau  $\frac{3}{2}$ .

Bagaimana menyajikan  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$  dengan gambar? Untuk itu perhatikan gambar berikut ini.





Dengan menggunakan algoritma, masalah perkalian di atas dapat diselesaikan sebagai berikut:

$$\frac{1}{2} \times 3 = \frac{1}{2} \times \frac{3}{1} = \frac{1 \times 3}{2 \times 1} = \frac{3}{2} = \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} = 1 \frac{1}{2}, \text{ dan}$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1 \times 1}{2 \times 3} = \frac{1}{6}.$$

#### 4.6 Pembagian Bilangan Pecahan.

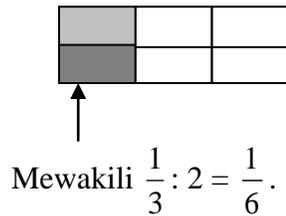
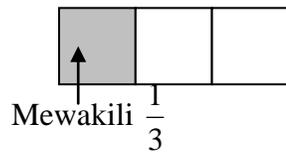
Pembahasan pembagian ini diawali dengan mengajukan beberapa masalah, yaitu:

Tanpa menggunakan algoritma pembagian, selesaikan masalah-masalah berikut:

- $6 : 3 =$
- $\frac{1}{3} : 2 =$
- $1 : \frac{1}{3} =$
- $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} =$

Masalah a dapat kita selesaikan dengan menggunakan pemahaman terhadap bilangan asli, yaitu  $6 : 2 = 3$  karena  $6 - 2 - 2 - 2 = 0$ .

Masalah b, yaitu  $\frac{1}{3} : 2$  tidak dapat kita selesaikan menggunakan definisi di atas. Kita harus mencoba menggunakan pendekatan luas daerah bangun datar. Untuk itu perhatikan gambar berikut ini.



Dengan demikian,  $\frac{1}{3} : 3 = \frac{1}{6}$ .

Masalah c, yaitu  $1 : \frac{1}{3}$  tidak dapat kita selesaikan dengan cara seperti masalah a dan juga tidak dapat kita selesaikan dengan cara seperti masalah b. Untuk itu, kita perlu definisi baru untuk menyelesaikan masalah seperti masalah c ini. Definisi itu adalah sebagai berikut:

$$a : b = n \text{ jika dan hanya jika } n \times b = a$$

Dengan definisi itu, akan kita coba menyelesaikan masalah c, yaitu:

$1 : \frac{1}{3} = \dots$ , artinya  $\dots \times \frac{1}{3} = 1$ . Dengan kalimat biasa kita dapat mengatakan

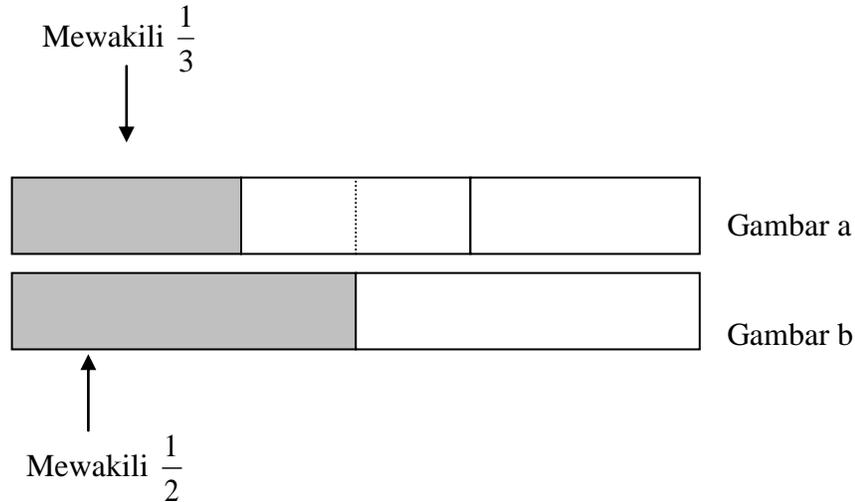
bahwa  $1 : \frac{1}{3}$  sama dengan berapa, sama dengan kalimat berapa kali  $\frac{1}{3}$  agar sama

dengan 1. Akhirnya, kita dapat menemukan bahwa  $1 : \frac{1}{3} = 3$  karena  $3 \times \frac{1}{3} = 1$ .

Masalah d, yaitu  $\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$  tidak dapat secara langsung kita selesaikan dengan cara seperti menyelesaikan masalah a maupun masalah b; tetapi sebagai langkah awal kita dapat menggunakan definisi baru ini seperti menyelesaikan masalah c.

$\frac{1}{2} : \frac{1}{3} = \dots$ , artinya  $\dots \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$ . Langkah berikutnya, perhatikan gambar

berikut ini.



Dari gambar di atas tampak bahwa kita memerlukan  $1\frac{1}{2}$  kali bidang gelap gambar a agar dapat tepat menutup bidang gelap gambar b.

Dengan kata lain,  $1\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$ , atau  $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} = 1\frac{1}{2}$ .

Dengan menggunakan algoritma, masalah pembagian di atas dapat diselesaikan sebagai berikut:

a.  $6 : 2 = \frac{6}{2} = 3.$

b.  $\frac{1}{3} : 2 = \frac{1}{3} : \frac{2}{1} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6} = \frac{1}{6}.$

c.  $1 : \frac{1}{3} = \frac{1}{1} : \frac{1}{3} = \frac{1}{1} \times \frac{3}{1} = \frac{3}{1} = 3.$

d.  $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} = \frac{1}{2} : \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{1} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}.$

## 4.7 Pecahan Desimal.

### 1. Pengertian Bilangan Pecahan Desimal.

Untuk mempelajari bilangan pecahan desimal, kita perlu memahami nilai tempat dan arti dari penulisan bilangan pecahan desimal. Untuk itu, perhatikan bilangan-bilangan pecahan yang penyebutnya kelipatan 10 seperti berikut ini.

$1/10$ ,  $1/100$ ,  $1/1000$ , dan  $1/10000$ . Jika bilangan-bilangan pecahan itu ditulis dalam bentuk pecahan desimal, maka penulisannya adalah sebagai berikut:

$1/10$  ditulis 0,1

$1/100$  ditulis 0,01

$1/1000$  ditulis 0,001

$1/10000$  ditulis 0,0001

Dengan memperhatikan sistem nilai tempat, kita dapat menyatakan bentuk panjang dari bilangan pecahan desimal seperti 12,034, yaitu

$$12,034 = (1 \times 10) + (2 \times 1) + (0 \times \frac{1}{10}) + (3 \times \frac{1}{100}) + (4 \times \frac{1}{1000}).$$

### 2. Mengubah Bilangan Pecahan dari Bentuk Biasa ke Desimal dan Sebaliknya.

#### a. Mengubah Bilangan Pecahan dari Bentuk Biasa ke Pecahan Desimal.

Mengubah penulisan bilangan pecahan dari bentuk pecahan biasa ke bentuk pecahan desimal dapat dilakukan dengan dua cara, yaitu: (1) menggunakan bilangan pecahan senama dengan penyebut kelipatan 10, dan (2) menggunakan cara pembagian panjang. Untuk mengubah penulisan bilangan pecahan dari bentuk pecahan biasa ke bentuk pecahan desimal menggunakan cara (1), perhatikan contoh berikut ini.

- a. Tulislah bilangan  $\frac{3}{8}$  ke dalam bentuk pecahan desimal.

Jawab:

$$\begin{aligned} \frac{3}{8} &= \frac{3}{8} \times \frac{125}{125} \\ &= \frac{375}{1000} \\ &= 0,375. \end{aligned}$$

- b. Tulislah bilangan  $\frac{2}{5}$  ke dalam bentuk pecahan desimal.

Jawab:

$$\frac{2}{5} = \frac{2}{5} \times \frac{2}{2}$$

$$= \frac{4}{10}$$

$$= 0,4$$

- c. Tulislah bilangan  $6\frac{3}{25}$  ke dalam bentuk pecahan desimal.

Jawab:

$$6\frac{3}{25} = 6 + \frac{3}{25}$$

$$= 6 + \frac{3}{25} \times \frac{4}{4}$$

$$= 6 + \frac{12}{100}$$

$$= 6 + 0,12$$

$$= 6,12.$$

Untuk mengubah penulisan bilangan pecahan dari bentuk pecahan biasa ke bentuk pecahan desimal menggunakan cara (1), perhatikan contoh berikut ini.

- a. Tulislah bilangan  $\frac{2}{5}$  ke dalam bentuk pecahan desimal.

Jawab:

$$\begin{array}{r} 0,4 \\ 5 \overline{) 2} \\ \underline{0} \\ 20 \\ \underline{20} \\ 0 \end{array}$$

$$\text{Jadi, } \frac{2}{5} = 0,4$$

- b. Tulis lah pecahan  $\frac{9}{4}$  ke dalam bentuk pecahan desimal.

Jawab:

$$\begin{array}{r}
 2,25 \\
 \overline{4 \ 9} \\
 \underline{8} \\
 10 \\
 \underline{8} \\
 20 \\
 \underline{20} \\
 0
 \end{array}$$

Jadi,  $\frac{9}{4} = 2,25$

- c. Tulis lah pecahan  $\frac{1}{3}$  ke dalam bentuk pecahan desimal.

Jawab:

$$\begin{array}{r}
 0,333 \\
 \overline{3 \ 1} \\
 \underline{0} \\
 10 \\
 \underline{9} \\
 10 \\
 \underline{9} \\
 1
 \end{array}$$

Jadi,  $\frac{1}{3} = 0,333\dots\dots$

- b. Mengubah Bilangan Pecahan dari Bentuk Desimal ke Pecahan Biasa.

Mengubah penulisan bilangan pecahan dari bentuk pecahan desimal ke bentuk pecahan biasa dapat dilakukan dengan memperhatikan bilangannya. Jika bilangan yang ditulis sebagai pecahan desimal itu memuat sejumlah bilangan yang berhingga,

maka kita dapat memanfaatkan sistem nilai tempat; sedangkan jika bilangan yang ditulis sebagai pecahan desimal itu memuat sejumlah bilangan yang tidak berhingga tetapi berulang, maka kita harus memanipulasi bilangan itu sehingga bentuk pecahan desimalnya diperoleh. Perhatikan contoh berikut ini.

Ubahlah bilangan-bilangan berikut ke dalam bentuk bilangan pecahan desimal!

- 0,954
- 5,06
- 1,121212....

Jawab:

$$\begin{aligned} \text{a. } 0,954 &= 0 + \frac{9}{10} + \frac{5}{100} + \frac{4}{1000} \\ &= \frac{900}{1000} + \frac{50}{1000} + \frac{4}{1000} \\ &= \frac{954}{1000}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } 5,06 &= 5 + \frac{0}{10} + \frac{6}{100} \\ &= \frac{500}{100} + \frac{0}{100} + \frac{6}{100} \\ &= \frac{506}{100}. \end{aligned}$$

- 1,121212...

Misal,  $n = 1,121212\dots$

$$100n = 112,121212\dots$$

$$n = 1,121212\dots$$

---

$$99n = 111$$

$$n = \frac{111}{99}$$

Dengan demikian,  $1,121212\dots = \frac{111}{99}$ , atau

$$\begin{aligned} 1,121212\dots &= \frac{99+2}{99} \\ &= \frac{99}{99} + \frac{2}{99} \\ &= 1 + \frac{2}{99} \\ &= 1\frac{2}{99}. \end{aligned}$$

#### 4.8 Operasi Pada Bilangan Pecahan Desimal.

Kita telah mempelajari operasi pada bilangan pecahan biasa dan kita juga telah memahami konsep bilangan pecahan desimal. Pemahaman kita tentang operasi pada bilangan cacah dan konsep bilangan pecahan desimal sangat membantu dalam menjalankan operasi pada bilangan pecahan desimal. Ada beberapa operasi pada bilangan pecahan desimal yang akan dibahas di sisni, yaitu penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian.

##### 1. Operasi Penjumlahan dan Pengurangan.

Pada operasi penjumlahan dan pengurangan dua buah bilangan pecahan desimal, kita harus memanfaatkan sistem nilai tempat. Untuk lebih jelasnya, perhatikan contoh berikut ini.

Isilah titik-titik berikut ini dengan bilangan yang tepat sehingga menjadi kalimat yang benar!

a.  $0,412 + 0,543 =$

b.  $1,378 + 0,123 =$

c.  $0,786 - 0,564 =$

d.  $3,762 - 2,547 =$

Jawab.

a.  $0,412 = 0 + 0,4 + 0,01 + 0,002$

$$\begin{array}{r} 0,543 = 0 + 0,5 + 0,04 + 0,003 \\ \hline \end{array} +$$

$$= 0 + 0,9 + 0,05 + 0,005$$



## 2. Operasi Perkalian dan Pembagian Bilangan Pecahan Desimal.

Pada bagian ini kita membahas penyelesaian operasi perkalian dan pembagian bilangan pecahan desimal secara algoritmik. Kita mempunyai paling sedikit dua buah cara menyelesaikan operasi perkalian dan pembagian bilangan pecahan desimal. Cara pertama, kita melakukan pembagian cara panjang dan cara kedua kita merubah dahulu bilangan-bilangan pecahan desimal itu ke dalam bentuk pecahan biasa. Pada kesempatan ini hanya akan ditunjukkan cara kedua. Sebagai ilustrasi perhatikan contoh berikut.

$$\begin{aligned} \text{a. } 12,5 \times 0,8 &= \frac{125}{10} \times \frac{8}{10} \\ &= \frac{1000}{10} \\ &= 100. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } 0,75 \times 0,8 &= \frac{75}{100} \times \frac{8}{10} \\ &= \frac{600}{1000} \\ &= \frac{6}{10} \\ &= 0,6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c. } 2,4 : 0,05 &= \frac{24}{10} : \frac{5}{100} \\ &= \frac{24}{10} \times \frac{100}{5} \\ &= \frac{2400}{50} \\ &= 48. \end{aligned}$$

## Rangkuman

1. Secara algoritmik, penjumlahan atau pengurangan bilangan pecahan senama dapat diselesaikan dengan menjumlahkan atau mengurangkan pembilang-pembilangnya dan penyebutnya tetap. Untuk bilangan pecahan tidak senama, operasi itu harus didahului dengan menyamakan penyebutnya.
2. Perkalian bilangan pecahan tidak dapat dapat menggunakan definisi penjumlahan berulang.  $\frac{1}{3} \times 4$  diartikan sebagai  $\frac{1}{3}$  dari 4 atau  $\frac{1}{3}$  nya 4.
3. Secara algoritmik, perkalian bilangan pecahan dapat diselesaikan dengan mengalikan pembilang-pembilangnya dan mengalikan penyebut-penyebutnya. Jika bilangan itu berbentuk pecahan campuran, maka perlu diubah dahulu ke dalam bentuk pecahan biasa.
4. Pembagian bilangan pecahan diartikan sebagai pengurangan berulang, tetapi diartikan sebagai balikan dari perkalian.

Contoh,

$$\frac{1}{2} : \frac{1}{3} = n \text{ diartikan sebagai } n \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2} .$$

5. Secara algoritmik, pembagian bilangan pecahan dapat diselesaikan dengan mengubah tanda bagi menjadi kali dan membalikkan bilangan pembaginya.

Contoh,

$$\frac{1}{2} : \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{1} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$$

6. Mengubah bilangan berbentuk pecahan desimal ke dalam bentuk pecahan biasa dapat dilakukan dengan lebih dahulu merubah setiap digitnya menjadi pecahan berpenyebut kelipatan sepuluh sesuai dengan nilai tempatnya.

Contoh,

$$0,25 = 0 + \frac{2}{10} + \frac{5}{100} = \frac{20}{100} + \frac{5}{100} = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

7. Mengubah bilangan berbentuk pecahan biasa ke dalam bentuk pecahan desimal dapat dilakukan dengan lebih dahulu membuat penyebutnya berkelipatan 10 dilanjutkan dengan menuliskannya dalam bentuk pecahan desimal dengan memperhatikan nilai

tempat setiap digitnya. Cara lainnya adalah melakukan pembagian cara panjang.

Contoh,

$$\frac{4}{25} = \frac{16}{100} = 0,16.$$

8. Penjumlahan dan pengurangan bilangan pecahan desimal dilakukan dengan menjumlahkan atau mengurangkan digit-digit yang mempunyai posisi nilai tempat sama. Pada penjumlahan, jika diperlukan, lakukan pengelompokan kembali hasil yang diperoleh. Pada pengurangan yang tidak dapat langsung jalankan, lakukan dahulu pengelompokan kembali pada bilangan yang diperlukan.

Contoh:

(i)  $0,312 + 0,179 = 0,48(11) = 0,491$

(ii) (ii)  $0,772 - 0,428 = 0,76(12) - 0,428 = 0,344.$

#### Latihan 4

Selesaikan soal-soal berikut ini!

1. Jelaskan, bagaimana anda mengenalkan perbandingan dua buah pecahan,

misalnya  $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$ ?

2. Tunjukkan dengan gambar alat peraga (model iconic) untuk operasi-operasi berikut:

a.  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} =$

b.  $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} =$

c.  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} =$

3. Buktikan bahwa  $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{1}$

4. Buatlah sebuah soal cerita yang penyelesaiannya menggunakan:

a.  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$

b.  $\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$

## BAB V

### BILANGAN PRIMA DAN BILANGAN BERPANGKAT

#### 5.1 Bilangan Prima

Jika kita menulis  $a|b$  maka kita katakan bahwa  $a$  adalah pembagi  $b$ . Salah satu metode yang biasa digunakan di sekolah dasar untuk menentukan pembagi suatu bilangan adalah menggunakan kertas berpetak dan menampilkan bilangan itu sebagai suatu persegi-persegi panjang. Sebagai contoh, 12 dapat disajikan dengan menampilkan persegi-persegi panjang dengan susunan 1 baris 12 kolom, atau 2 baris 6 kolom, atau 3 baris 4 kolom. Dengan demikian 12 mempunyai 6 buah pembagi yang berbeda, yaitu 1, 2, 3, 4, 6, dan 12. Bagaimana dengan 7? Untuk 7, kita hanya dapat menampilkan persegi-persegi panjang dengan susunan 1 baris 7 kolom atau 7 baris 1 kolom. Dengan demikian 7 hanya mempunyai 2 pembagi yang berbeda, yaitu 1 dan 7.

Tabel 1  
Banyak Faktor Suatu Bilangan

1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	4	6	16	12		24
	3	9	8		18		30
	5	25	10		20		
	7		14		28		
	11		15		32		
	13		21				
	17		22				
	19		26				
	23		27				
	29		33				
	31		34				
	37		35				

Dari tabel 1 tampak bahwa 12 berada pada kolom ke enam karena 12 mempunyai 6 pembagi, dan 7 berada pada kolom ke dua karena 7 mempunyai 2 pembagi. Apakah anda melihat suatu pola yang terbentuk pada tabel di atas? Bilangan apa berikutnya pada kolom ke tiga? Bilangan itu adalah 49. Sekarang, bilangan-bilangan pada kolom ke dua

akan menjadi pusat perhatian kita saat ini. Perlu diingat bahwa bilangan-bilangan itu mempunyai tepat dua pembagi, yaitu bilangan itu sendiri dan 1. Sebarang bilangan bulat positif yang mempunyai tepat dua pembagi positif berbeda disebut bilangan **prima**. Sebarang bilangan bulat lebih besar dari 1 yang mempunyai suatu faktor positif selain 1 dan dirinya sendiri disebut bilangan **komposit**. Sebagai contoh, 4, 6, dan 16 adalah bilangan komposit karena bilangan-bilangan itu mempunyai suatu faktor selain 1 dan dirinya sendiri. Bilangan 1 hanya mempunyai satu faktor. Dengan demikian, 1 bukan bilangan prima maupun bilangan komposit. Dari kolom 2 tabel 1 di atas, kita lihat bahwa dua belas bilangan prima pertama adalah 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, dan 37.

Contoh 1.

Tunjukkan bahwa bilangan-bilangan berikut adalah bilangan komposit.

- a. 1564
- b. 2781
- c. 1001

Jawab.

- a. Karena  $2 \mid 4$ , 1564 dapat dibagi oleh 2.
- b. Karena  $3 \mid (2 + 7 + 8 + 1)$ , 2781 dapat dibagi oleh 3.
- c. Karena  $11 \mid ((1 + 0) - (0 + 1))$ , 1001 dapat dibagi oleh 11.

Bilangan-bilangan komposit dapat dinyatakan sebagai hasil kali dua atau lebih bilangan-bilangan cacah lebih besar dari 1. Sebagai contoh,  $18 = 2 \cdot 9$ ,  $18 = 3 \cdot 6$ , atau  $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$ . Setiap pernyataan 18 sebagai suatu hasil kali faktor-faktornya disebut faktorisasi.

Masalah 1

Ketika para siswa bertanya kepada Pak Faktor tentang usia-anak-anaknya, Pak Faktor menjawab, “Saya mempunyai tiga orang anak. Hasil kali usia-usia mereka adalah 72 dan jumlah usia-usia mereka adalah bilangan yang ada di atas pintu ruangan ini”. Seorang siswa, Ani, mengatakan bahwa nomor ruangan ini adalah 14, tetapi ia masih meminta kepada Pak Faktor untuk memberi informasi tambahan sehingga masalah ini dapat ia dipecahkan. Pak Faktor kemudian menyatakan bahwa anak tertuanya adalah seorang pemain catur yang baik. Selanjutnya Ani menyampaikan secara tepat usia ketiga anak Pak Faktor. Berapa usia ketiga anak pak Faktor yang disampaikan oleh Ani itu?

### Pemahaman Masalah.

Pak Faktor mempunyai tiga orang anak, dan hasil kali usia-usia mereka 72. Ketika Ani diberi tahu jumlah usia mereka, ia menyimpulkan bahwa Pak Faktor tidak menyediakan informasi cukup untuk menentukan usia-usia anaknya. Setelah Pak Faktor mengatakan bahwa anak tertuanya adalah seorang pemain catur yang baik, Ani dapat menemukan usia-usia mereka. Kita akan menentukan usia-usia mereka. Dari informasi yang diberikan tampaknya anak tertua, seorang pemain catur yang baik merupakan informasi yang penting

### Perencanaan Strategi.

Untuk menentukan usia-usia yang mungkin, kita memerlukan tiga buah bilangan bulat positif yang mempunyai hasil kali 72. Kita dapat menyelesaikan hal ini secara sistematis dengan membuat daftar usia-usia yang mungkin. Jika ada anaknya yang berusia 1 tahun, kemudian buat daftar kemungkinan-kemungkinan usia lainnya; jika ada anaknya yang berusia 2 tahun maka buat daftar usia-usia lainnya yang mungkin; dan seterusnya. Karena  $1 \cdot 2 \cdot 36 = 72$ , kombinasi (1, 2, 36) adalah sebuah kemungkinan. Mengetahui bahwa  $72 = 2^3 \cdot 3^2$  dapat membantu kita untuk mendaftar semua kombinasi yang mungkin dengan memperhatikan pula jumlah dari usia-usia mereka, dalam sebuah tabel. Setelah melakukan pengujian tabel itu, diharapkan kita dapat mengetahui perlunya informasi tambahan itu dan menyelesaikan masalah ini.

### Penerapan Strategi.

Tabel 2 berikut ini memperlihatkan semua kemungkinan usia yang hasil kalinya 72 dan jumlahnya 14. Perlu diketahui bahwa seluruh jumlah di luar 14 hanya satu kali muncul pada tabel itu. Ani mengetahui jumlah usia-usia itu tetapi tidak dapat menentukan usia-usia itu. Hanya dengan penalaran logik untuk masalah ini bahwa jumlah usia-usia itu harus 14.

Tabel 2

Usia	Usia	Usia	Jumlah
1	1	72	74
1	2	36	39
1	3	24	28
1	4	18	23
1	6	12	19
2	2	18	22
2	3	12	17
2	4	9	15
2	6	6	14
1	8	9	18
3	4	6	13
3	3	8	14

Ada dua kemungkinan kombinasi yang memberikan jumlah 14, yaitu (2, 6, 6) dan (3, 3, 8). Ketika Ani diberi tahu bahwa yang tertua adalah seorang pecatur yang baik, ia tahu bahwa (2, 6, 6) bukan suatu kemungkinan kombinasi yang mungkin, karena jika usia mereka 2 tahun, 6 tahun, dan 6 tahun maka tidak ada yang tertua diantara mereka. Dengan demikian dia menyimpulkan bahwa usia-usia mereka adalah 3 tahun, 3 tahun, dan 8 tahun.

#### Tinjau Ulang.

Tripel bilangan (3, 3, 8) memenuhi kondisi-kondisi yang diberikan, yaitu: pertama, hasil kalinya harus 72, jumlahnya harus 14, dan yang tertua adalah pecatur baik. Misalkan informasi yang diberikan adalah “hasil kali usia-usia itu adalah 12”, dengan demikian, kombinasi-kombinasi bilangan yang mungkin adalah (1, 1, 12), (1, 2, 6), (1, 3, 4), dan (2, 2, 3) yang secara berturut-turut mempunyai jumlah 14, 9, 8, dan 7. Jika informasi tambahannya adalah “anak terkecil suka makan bayam” maka kombinasi-kombinasi yang masih mungkin adalah (1, 2, 6) dan (1, 3, 4). Jika ada informasi tambahan lagi, yaitu “selisih usia antara anak ke dua dan ke tiga adalah 1 tahun” maka tripel bilangan yang kita pilih adalah (1, 2, 6) dan kesimpulannya adalah mereka berusia 1 tahun, 2 tahun, dan 6 tahun.

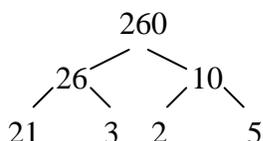
Suatu faktorisasi yang memuat hanya bilangan-bilangan prima disebut **faktorisasi prima**. Untuk menentukan suatu faktorisasi prima dari suatu bilangan komposit yang diberikan, pertama-tama kita tulis kembali bilangan itu sebagai suatu hasil kali dua bilangan-bilangan yang lebih kecil. Selanjutnya, pemfaktoran bilangan-bilangan yang

lebih kecil sampai seluruh faktor-faktor adalah bilangan-bilangan prima. Sebagai contoh, perhatikan 260.

$$260 = 26 \cdot 10 = 2 \cdot 13 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 13 = 2^2 \cdot 5 \cdot 13.$$

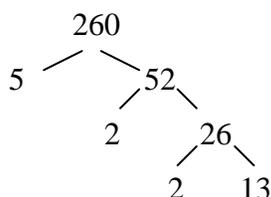
Prosedur untuk mencari faktorisasi prima dari suatu bilangan juga dapat menggunakan pohon faktor, sebagaimana yang ditampilkan pada gambar 1.

Gambar 1



Cara kedua untuk faktor 260 ditampilkan pada gambar 2. Dua pohon faktor ini menghasilkan faktorisasi prima yang sama.

Gambar 2.



#### Sifat 1.

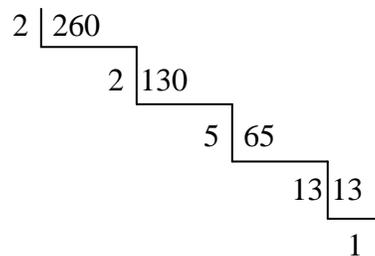
Setiap bilangan komposit dapat ditulis sebagai hasil kali bilangan-bilangan prima dalam satu dan hanya satu cara.

Sifat 1 di atas dikenal pula sebagai teorema dasar aritmatika. Teorema ini merupakan dasar (pendekatan algoritmik) untuk menemukan faktorisasi prima dari suatu bilangan. Sebagai contoh, Perhatikan bilangan 260. Kita mulai dari bilangan prima terkecil, 2, dan kita periksa apakah 2 adalah pembagi itu, jika tidak maka kita coba dengan bilangan prima yang lebih besar berikutnya dan periksa keterbagiannya oleh bilangan prima ini. Sekali kita dapat menemukan bilangan prima yang dapat membagi suatu bilangan bulat yang diberikan, kita harus menemukan hasil bagi bilangan bulat yang diberikan oleh suatu bilangan prima itu. Selanjutnya kita periksa apakah bilangan prima itu dapat membagi bilangan yang merupakan hasil bagi itu. Jika demikian, kita ulang proses itu; jika tidak kita coba dengan bilangan prima yang lebih besar berikutnya, 3, dan periksa apakah 3 membagi hasil bagi itu. Kita tahu bahwa 260 dibagi oleh 2

hasilnya 130. Kita lanjutkan prosedur ini, 130 dibagi oleh 2 hasilnya 65. Dengan bilangan prima berikutnya yang lebih besar dari 2 yang dapat membagi 65, yaitu 5, diperoleh 65 dibagi oleh 5 hasilnya 13. Langkah lengkap untuk faktorisasi prima 260 ini dapat dilihat pada gambar 3.

Bilangan-bilangan prima di dalam faktorisasi prima suatu bilangan disajikan dalam daftar dengan urutan naik dari kiri ke kanan dan jika suatu bilangan prima muncul dalam suatu hasil kali lebih dari satu kali maka digunakan notasi pangkat. Dengan demikian, faktorisasi prima dari 260 ditulis sebagai  $2^2 \cdot 5 \cdot 13$ .

### Gambar 3



Perhatikan bilangan 8. Bilangan 8 mempunyai pembagi 1, 2, 4, dan 8. Faktorisasi prima dari 8 adalah  $2^3$ . Pembagi-pembagi ini dapat ditulis dalam bentuk bilangan pangkat dari 2:  $2^0$ ,  $2^1$ ,  $2^2$ , dan  $2^3$ . Kita dapat menggeneralisasi untuk sebarang bilangan prima  $p$  mempunyai pembagi-pembagi dalam bentuk bilangan berpangkat sebagai berikut:

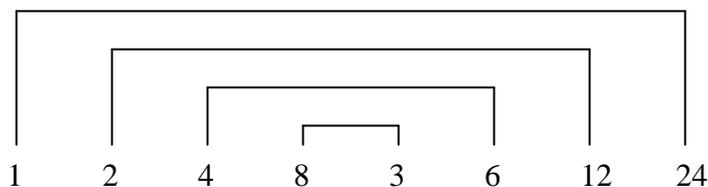
Pembagi-pembagi  $p^n$  adalah  $p^0, p^1, p^2, \dots, p^n$ .

Sebagaimana kita lihat, ada  $n + 1$  pembagi dari  $p^n$ .

Untuk bilangan seperti 24 yang mempunyai faktorisasi prima  $2^3 \cdot 3^1$ , kita tahu bahwa  $2^3$  dan  $3^1$  adalah pembagi-pembagi 24. Kita juga tahu bahwa  $4 \cdot 2$  atau 8 adalah pembagi 24. Untuk memeriksa masalah ini, kita buat daftar pembagi-pembagi 24 sebagai berikut:

Pembagi $2^3$	$2^0$	$2^1$	$2^2$	$2^3$
Pembagi $3^1$	$3^0$	$3^1$		
Pembagi $2^3 \times$ pembagi $3^1$ (Pembagi 24)	$3^0 \times 2^0 = 1$ $3^1 \times 2^0 = 3$	$3^0 \times 2^1 = 2$ $3^1 \times 2^1 = 6$	$3^0 \times 2^2 = 4$ $3^1 \times 2^2 = 12$	$3^0 \times 2^3 = 8$ $3^1 \times 2^3 = 24$

Pembagi-pembagi 24 itu dapat dikelompokkan secara berpasangan sebagai berikut:



Proses menentukan banyaknya pembagi 12 di atas dapat digeneralisasikan dalam sifat berikut.

Sifat 2.

Jika faktorisasi prima suatu bilangan  $n$  adalah  $n = p_1^{q_1} \cdot p_2^{q_2} \cdot p_3^{q_3} \cdot \dots \cdot p_m^{q_m}$ , maka banyaknya pembagi  $n$  adalah  $(q_1 + 1)(q_2 + 1)(q_3 + 1) \cdot \dots \cdot (q_m + 1)$ .

Contoh 1.

- Tentukan semua pembagi 912.
- Tentukan semua pembagi 324.

Jawab.

- Faktorisasi prima dari 912 adalah  $2^4 \cdot 3 \cdot 19$ . Ada  $5 \cdot 2 \cdot 2$  atau 20 pembagi. Pembagi-pembagi  $2^4$  adalah 1, 2, 4, 8, dan 16. Pembagi-pembagi 3 adalah 1 dan 3. Pembagi-pembagi 19 adalah 1 dan 19. Dengan demikian, pembagi-pembagi 912 adalah 1, 2, 4, 8, 16, 3, 6, 12, 24, 48, 19, 38, 76, 152, 304, 57, 114, 228, 456, dan 912.
- Faktorisasi prima dari 324 adalah  $2^2 \cdot 3^4$ ; dan ada 15 pembagi. Pembagi-pembagi  $2^2$  adalah 1, 2, dan 4. Pembagi-pembagi  $3^4$  adalah 1, 3, 9, 27, dan 81. Dengan demikian, pembagi-pembagi 324 adalah 1, 2, 4, 3, 6, 12, 9, 18, 36, 27, 54, 108, 81, 162, dan 324.

Dalam menentukan faktorisasi dari suatu bilangan seperti 8127, amati bahwa  $9 \mid 8127$ , atau  $8127 = 9k$ , di mana  $k$  adalah suatu bilangan bulat. Karena  $8127 = 9k$ ,  $k$  adalah suatu faktor dari 8127 dan  $k = 8127 / 9$ . Masalah ini secara umum dituangkan dalam sifat berikut ini.

Sifat 3.

Misalkan  $d \neq 0$  dan  $n \neq 0$ . Jika  $d$  adalah faktor dari  $n$  maka  $n/d$  adalah faktor dari  $n$ .

Misalkan  $p$  adalah faktor prima terkecil dari bilangan  $n$ . Dengan menggunakan sifat 3,  $n/p$  adalah suatu faktor dari  $n$ , dan karena  $p$  adalah faktor terkecil dari  $n$ , kita peroleh  $p \leq n/p$ . Jika  $p \leq n/p$  maka  $p^2 \leq n$ . Gagasan ini selanjutnya dirangkum menjadi sifat berikut ini.

Sifat 4.

Jika  $n$  adalah suatu bilangan komposit maka  $n$  mempunyai suatu faktor prima  $p$  sedemikian sehingga  $p^2 \leq n$ .

Sifat 4 ini dapat digunakan untuk membantu menentukan apakah suatu bilangan yang diberikan itu termasuk bilangan prima atau bilangan komposit. Sebagai contoh, perhatikan bilangan 109. Jika 109 adalah bilangan komposit maka 109 harus mempunyai suatu faktor prima  $p$  sedemikian sehingga  $p^2 \leq 109$ . Bilangan-bilangan prima yang dikuadratkan tidak melewati 109 adalah 2, 3, 5, dan 7. Kita tahu bahwa 2, 3, 5, dan 7 masing-masing bukan merupakan faktor dari 109. Dengan demikian 109 adalah bilangan prima. Argumen ini membawa kita pada sifat berikut.

Sifat 5.

Jika  $n$  adalah suatu bilangan bulat lebih besar dari 1 dan tidak dapat dibagi oleh sebarang bilangan prima  $p$  maka  $n$  adalah bilangan prima.

Contoh 2.

Periksa apakah 397 adalah bilangan prima atau komposit.

Jawab.

Bilangan-bilangan prima  $p$  yang mengakibatkan  $p^2 \leq 397$  adalah 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, dan 19. Karena 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, dan 19 masing-masing bukan merupakan faktor dari 397 (silahkan periksa !), disimpulkan bahwa 397 adalah bilangan prima.

Suatu cara untuk menemukan seluruh bilangan prima yang lebih kecil dari suatu bilangan bulat yang diberikan adalah menggunakan saringan *Eratosthenes*. Jika semua bilangan asli lebih besar 1 ditempatkan pada suatu “saringan” maka bilangan yang bukan

bilangan prima diberi tanda silang (artinya jatuh melalui lobang saringan). Bilangan-bilangan yang tersisa adalah bilangan-bilangan prima. Prosedur berikut mengilustrasikan proses penyaringan ini.

1. Pada tabel di bawah, kita beri tanda silang bilangan 1 karena 1 bukan bilangan prima.
2. Lingkari bilangan 2 karena 2 bilangan prima.
3. Silang bilangan-bilangan kelipatan 2 karena bilangan-bilangan itu bukan bilangan prima.
4. Lingkari bilangan 3 karena 3 bilangan prima.
5. Silang bilangan-bilangan kelipatan 3 karena bilangan-bilangan itu bukan bilangan prima.
6. Lingkari bilangan 5 dan 7; silang bilangan-bilangan kelipatannya.
7. Pada tabel tersebut, kita berhenti pada langkah ke-6 karena 7 adalah bilangan prima terbesar yang kuadratnya kurang dari 100. Semua bilangan tersisa yang didaftar dan tidak disilang adalah bilangan-bilangan prima.

Tabel 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Ada beberapa masalah menarik berkenaan dengan bilangan prima. Sebagai contoh, Chrintian Goldbach (1890 – 1764) menyatakan bahwa setiap bilangan bulat genap lebih besar dari 2 merupakan jumlah dari dua buah bilangan prima. Pernyataan ini

dikenal dengan conjecture Goldbach. Sebagai contoh,  $4 = 2 + 2$ ,  $6 = 3 + 3$ ,  $8 = 3 + 5$ ,  $10 = 3 + 7$ ,  $12 = 5 + 7$ , dan  $14 = 3 + 11$ .

Masalah 2.

Seorang wanita mengemukakan bahwa jika ia mengambil telur dari keranjang itu 2, 3, 4, 5, atau 6 selalu ada 1 yang tersisa. Tetapi jika ia mengambil 7 telur maka tidak ada yang tersisa. Jika keranjang itu dapat memuat sampai dengan 500 butir telur, berapa butir telur yang ia punya?

Pemahaman Masalah

Jika wanita itu mengambil telur dari dalam keranjang 2, 3, 4, 5, atau 6 maka 1 tersisa. Maksudnya adalah bahwa jika banyaknya telur dibagi oleh 2, 3, 4, 5, atau 6, sisanya 1. Kita juga mengetahui bahwa jika ia mengambil 7 maka tidak ada sisa. Hal ini berarti banyaknya telur adalah kelipatan 7. Akhirnya kita mengetahui bahwa keranjang itu dapat memuat sampai 500 butir telur. Kita harus menemukan banyaknya telur di dalam keranjang.

Perencanaan Strategi.

Suatu cara untuk menyelesaikan masalah ini adalah mendaftar semua kelipatan 7 antara 7 dan 500 kemudian memeriksa mana dari bilangan-bilangan itu yang mempunyai sisa 1 jika dibagi oleh 2, 3, 4, 5, atau 6. Cara lain adalah kita menggunakan “pendekatan sisa”. Misalkan banyaknya telur adalah  $n$ . Jika  $n$  dibagi oleh 2 sisanya adalah 1. Hal ini berakibat  $(n - 1)$  akan dapat dibagi oleh 2. Begitu pula 3, 4, 5, dan 6 juga dapat dibagi oleh  $(n - 1)$ .

Karena 2 dan 3 membagi  $n - 1$ , bilangan 2 dan 3 muncul di dalam faktorisasi prima dari  $(n - 1)$ . Kita tahu bahwa  $4 \mid (n - 1)$  mengakibatkan  $2 \mid (n - 1)$ . Dari informasi  $4 \mid (n - 1)$  dan  $2 \mid (n - 1)$ , kita dapat menyimpulkan bahwa  $2^2$  muncul di dalam faktorisasi prima  $(n - 1)$ . Karena  $5 \mid (n - 1)$ , 5 muncul di dalam faktorisasi prima  $(n - 1)$ .  $6 \mid (n - 1)$  tidak menyediakan informasi baru karena 2 dan 3 adalah faktor-faktor prima dari  $(n - 1)$  telah kita ketahui. Sekarang,  $(n - 1)$  dapat juga mempunyai faktor-faktor prima lain. Lambangkan hasil kali faktor-faktor prima lain ini dengan  $k$ , kita mempunyai  $n - 1$

$= 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot k = 60k$ , di mana  $k$  adalah suatu bilangan asli, dan demikian  $n = 60k + 1$ . Sekarang kita menemukan semua kemungkinan nilai untuk  $n$  di dalam bentuk  $60k + 1$  lebih kecil dari 500 dan menentukan bilangan yang mana yang dapat dibagi oleh 7.

Penerapan Strategi.

Karena  $n = 60k + 1$  dan  $k$  adalah bilangan asli sebarang, kita substitusikan  $k = 1, 2, 3, \dots$  ke dalam  $n = 60k + 1$ . Dari substitusi itu kita peroleh nilai-nilai  $n$  yang lebih kecil dari 500, yaitu

$$61, 121, 181, 241, 301, 361, 421, 481.$$

Diantara nilai-nilai ini, hanya 301 yang dapat dibagi oleh 7. Dengan demikian 301 adalah jawaban atas masalah di atas.

Tinjau Ulang

Kita mengetahui bahwa  $n = 60k + 1$  dan nilai-nilai  $k$  yang mungkin adalah  $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ . Kita juga mengetahui bahwa  $7 \mid n$ ; yang berarti  $7 \mid (60k + 1)$ . Masalahnya adalah menemukan nilai  $k$  di atas, sehingga  $7 \mid (60k + 1)$ . Pertanyaannya akan tampak lebih mudah dijawab jika, sebagai pengganti  $60k + 1$ , kita mempunyai bilangan yang lebih kecil. Kita tahu bahwa kelipatan terkecil dari  $k$  yang paling dekat dengan  $60k$  yang dapat dibagi oleh 7 adalah  $56k$ . Karena  $7 \mid (60k + 1)$  dan  $7 \mid 56k$ , kita simpulkan bahwa  $7 \mid (60k + 1 - 56k)$ ; yang berarti  $7 \mid (4k + 1)$ . Sekarang kita mengetahui bahwa  $7 \mid (60k + 1)$  jika dan hanya jika  $7 \mid (4k + 1)$ . Nilai  $k$  antara 1 dan 8 yang membuat  $(4k + 1)$  dapat dibagi oleh 7 adalah 5. Akibatnya,  $7 \mid (60 \cdot 5 + 1)$ , dan 301 adalah penyelesaian untuk masalah ini.

## 5.2 Bilangan Berpangkat

Kita ingat kembali bahwa untuk bilangan-bilangan cacah  $a$ ,  $m$ , dan  $n$  dengan  $a \neq 0$ , berlaku:

1.  $a^m = a \cdot a \cdot a \dots a$  (sebanyak  $m$  faktor)
2.  $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
3.  $a^0 = 1$ , di mana  $a \neq 0$

Notasi-notasi di atas dapat diperluas untuk nilai-nilai  $a$  bilangan rasional. Sebagai contoh, perhatikan bilangan-bilangan berikut:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^{2+3} = \left(\frac{2}{3}\right)^5$$

Demikian juga dengan

$$\left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1$$

Secara umum, untuk setiap bilangan rasional tak nol, kita mempunyai

$$\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1$$

Pangkat (eksponen) dari suatu bilangan rasional tak nol dapat juga diperluas dengan bilangan bulat negatif. Perlu diingat bahwa setiap eksponen turun 1 maka bilangan pada ruas kanan dibagi oleh 10. Dengan demikian, kita dapat membuat pola sebagai berikut:

$$10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10$$

$$10^2 = 10 \cdot 10$$

$$10^1 = 10$$

$$10^0 = 1$$

$$10^{-1} = 1/10 = 1/10^1$$

$$10^{-2} = (1/10) \cdot (1/10) = 1/10^2$$

$$10^{-3} = (1/10^2) \cdot (1/10) = 1/10^3$$

Jika pola ini diperluas maka kita dapat memprediksikan bahwa  $10^{-n} = 1/10^n$

Secara umum, untuk sebarang bilangan  $a$  tak nol berlaku  $a^{-n} = 1/a^n$

Penjelasan lain untuk definisi  $a^{-n}$  adalah sebagai berikut:

Jika sifat  $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$  maka  $a^{-n} \cdot a^n = a^0 = 1$ . Dengan demikian,  $a^{-n}$  adalah invers kali dari  $a^n$ , dan akibatnya  $a^{-n} = 1/a^n$

Perhatikan apakah  $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$  dapat diperluas untuk semua pangkat dari  $a$  di mana pangkatnya adalah bilangan bulat. Sebagai contoh, apakah benar  $2^4 \cdot 2^{-3} = 2^{4+(-3)} = 2^1$ ? Definisi  $2^{-3}$  dan sifat-sifat pangkat tak negatif menjamin bahwa hal ini benar sebagaimana tampak dari yang berikut ini.

$$2^4 \cdot 2^{-3} = (2^4)(1/2^3) = 2^4/2^3 = 2^1$$

Begitu juga dengan

$$2^{-4} \cdot 2^{-3} = 2^{-4+(-3)} = 2^{-7} \text{ benar, karena}$$

$$2^{-4} \cdot 2^{-3} = (1/2^4)(1/2^3) = 1/(2^4 \cdot 2^3) = 1/2^7 = 2^{-7}$$

Secara umum, dengan pangkat bilangan bulat, kita mempunyai sifat sebagai berikut.

### ***Sifat 1***

Untuk sebarang bilangan rasional  $a$  tak nol dan sebarang bilangan bulat  $m$  dan  $n$ , berlaku

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Sifat-sifat lain dari perpangkatan dapat dikembangkan dengan menggunakan sifat-sifat bilangan rasional. Sebagai contoh,

$$2^5 / 2^3 = (2^3 \cdot 2^2) / 2^3 = 2^2 = 2^{5-3}$$

$$2^5 / 2^8 = 2^5 / (2^5 \cdot 2^3) = 1 / 2^3 = 2^{-3} = 2^{5-8}$$

Dengan pangkat bilangan bulat, kita mempunyai sifat berikut.

### ***Sifat 2***

Untuk sebarang bilangan rasional  $a$  tak nol dan untuk sebarang bilangan bulat  $m$  dan  $n$ , berlaku

$$a^m / a^n = a^{m-n}$$

Misalkan  $a$  bilangan rasional tak nol,  $m$  dan  $n$  bilangan bulat positif.

$$(a^m)^n = a^m \cdot a^m \cdot a^m \dots a^m \text{ (sebanyak } n \text{ faktor)}$$

$$= a^{m+m+m+\dots+m} \text{ (sebanyak } n \text{ suku)}$$

$$= a^{nm}$$

$$= a^{mn}$$

Dengan demikian,

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

Sebagai contoh,

$$\begin{aligned}(2^3)^4 &= 2^{3 \cdot 4} \\ &= 2^{12}\end{aligned}$$

Apakah sifat ini berlaku pula untuk pangkat yang berbentuk bilangan bulat negatif?

Sebagai contoh,

$$\begin{aligned}\text{a. } (2^3)^{-4} &= 2^{(3)(-4)} \\ &= 2^{-12}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{b. } (2^{-3})^4 &= (1/2^3)^4 \\ &= (1/2^3) (1/2^3) (1/2^3) (1/2^3) \\ &= 1^4 / (2^3)^4 \\ &= 1/2^{12} \\ &= 2^{-12}\end{aligned}$$

Sifat 3

Untuk sebarang bilangan rasional  $a$  tak nol dan sebarang bilangan bulat  $m$  dan  $n$  berlaku

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

Menggunakan definisi dan sifat-sifat yang dikembangkan, kita dapat menurunkan sifat selanjutnya.

Sebagai contoh,

$$\begin{aligned}(2/3)^4 &= 2/3 \cdot 2/3 \cdot 2/3 \cdot 2/3 \\ &= (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) / (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) \\ &= 2^4/3^4\end{aligned}$$

Contoh di atas dapat diperumumkan menjadi sifat berikut:

Sifat 4

Untuk sebarang bilangan rasional  $a/b$  tak nol dan sebarang bilangan bulat  $m$ , berlaku

$$(a/b)^m = a^m / b^m$$

Dari definisi pangkat negatif, sifat di atas, dan pembagian bilangan pecahan, kita memperoleh

$$\begin{aligned}
 (a/b)^{-m} &= 1/(a/b)^m \\
 &= 1/(a^m/b^m) \\
 &= b^m/a^m \\
 &= (b/a)^m
 \end{aligned}$$

Akibatnya,

$$(a/b)^{-m} = (b/a)^m$$

Sifat yang sama berlaku pula untuk perkalian. Sebagai contoh,

$$\begin{aligned}
 (2 \cdot 3)^{-3} &= 1/(2 \cdot 3)^3 \\
 &= 1/(2^3 \cdot 3^3) \\
 &= (1/2^3) (1/3^3) \\
 &= 2^{-3} \cdot 3^{-3}
 \end{aligned}$$

Dan secara umum, jika a, b bilangan rasional dan m bilangan bulat maka

$$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m.$$

Soal Latihan.

Tuliskan soal-soal berikut ini dalam bentuk yang paling sederhana, menggunakan pangkat positif pada akhir jawaban.

1.  $16^2 \cdot 8^{-3}$
2.  $20^2 : 2^4$
3.  $(3x)^3 + 2y^2 x^0 + 5y^2 + x^2 \cdot x$ , di mana  $x \neq 0$ .
4.  $(a^{-3} + b^{-3})^{-1}$

Jawab

$$\begin{aligned}
 1. \quad 16^2 \cdot 8^{-3} &= (2^4)^2 \cdot (2^3)^{-3} \\
 &= 2^8 \cdot 2^{-9} \\
 &= 2^{-1} \\
 &= \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad 20^2/2^4 &= (2^2 \cdot 5)^2 / 2^4 \\
 &= (2^4 \cdot 5^2) / 2^4 \\
 &= 5^2
 \end{aligned}$$

$$3. \quad (3x)^3 + 2y^2 x^0 + 5y^2 + x^2 \cdot x = 27x^3 + 2y^2 + 5y^2 + x^3$$

$$\begin{aligned}
 &= (27x^3 + x^3) + (2y^2 + 5y^2) \\
 &= 28x^3 + 7y^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4. (a^{-3} + b^{-3})^{-1} &= (1/a^3 + 1/b^3)^{-1} \\
 &= ((b^3 + a^3) / a^3 b^3)^{-1} \\
 &= 1/((a^3 + b^3) / a^3 b^3) \\
 &= a^3 b^3 / (a^3 + b^3)
 \end{aligned}$$

### Rangkuman

1. Bilangan bulat positif yang mempunyai tepat dua pembagi positif disebut bilangan prima. Bilangan bulat lebih besar dari satu dan bukan bilangan prima disebut bilangan komposit.
2. Sifat (teorema dasar aritmatika): Setiap bilangan komposit mempunyai satu dan hanya satu faktorisasi prima.
3. Kriteria untuk menentukan suatu bilangan  $n$  adalah bilangan prima: Jika  $n$  tidak dapat dibagi oleh sebarang bilangan prima  $p$  sedemikian sehingga  $p^2 \leq n$  maka  $n$  adalah bilangan prima.
4. Jika  $m$  bilangan bulat positif maka berlaku,  $a^m = a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a$  (sebanyak  $m$  faktor)
5.  $a^0 = 1$ , di mana  $a \neq 0$ .
6.  $a^{-m} = 1/a^m$ , di mana  $a \neq 0$ .
7.  $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
8.  $a^m/a^n = a^{m-n}$ , di mana  $a \neq 0$ .
9.  $(a^m)^n = a^{mn}$
10.  $(a/b)^m = a^m \cdot b^{-m}$ , di mana  $b \neq 0$ .
11.  $(ab)^m = a^m \cdot b^m$
12.  $(a/b)^{-m} = (b/a)^m$ , di mana  $a \neq 0$  dan  $b \neq 0$ .

## Latihan 5

1. Tentukan semua factor prima dari 504.
2. Tentukan bilangan prima terbesar untuk menguji apakah 5669 merupakan bilangan prima atau bukan prima.
3. Misalkan 435 orang anggota DPR dimasukkan dalam beberapa panitia. Setiap panitia terdiri dari lebih dari 2 orang tetapi kurang dari 30 orang. Banyak orang pada setiap panitia harus sama, dan setiap orang hanya boleh menjadi anggota satu panitia. Berapa banyak orang untuk setiap panitia?
4. Misalkan kita mempunyai 48 keping logam berukuran sama. Logam-logam itu kita susun membentuk persegi panjang dengan ukuran  $6 \times 8$ . Tentukan ukuran persegi panjang lain yang dapat kita bentuk dengan 48 keping logam.
5. Pak Budi akan menanam 36 tanaman jeruk. Tanaman-tanaman itu akan disusun sehingga membentuk persegi panjang. Jika setiap baris mempunyai tanaman sama banyak, tentukan semua kemungkinan banyak tanaman setiap baris.
6. Carilah bilangan asli terkecil yang dapat dibagi oleh setiap bilangan asli kurang dari atau sama dengan 12.
7. Tentukan faktorisasi prima dari 172.
8. Misalkan faktor-faktor dari suatu bilangan  $n$  adalah 2, 5, dan 9. Jika tepat ada 9 faktor lainnya, tentukan  $n$ .
9. 7827 adalah bilangan komposit. Mengapa?
10. Berapa banyaknya factor dari 45?

## Daftar Pustaka

Troutman, Andra P; dan Lichtenberg, Betty K (1977), *Mathematics A Good Beginning Strategies for Teaching Children*, Pacific Grove: Brooks/Cole Publishing Company

Billstein, Rick (1993), *A Problem Solving Approach to Mathematics for Elementary School Teachers*. New York: Addison Wesley Publishing Company, Inc.

Karim, Muchtar, 1998, *Pendidikan Matematika II*. Jakarta: Universitas Terbuka.

