

Beberapa Uji Keterbagian Bilangan Bulat

Untuk menguji suatu bilangan bulat dapat dibagi (habis dibagi) atau tidak dapat dibagi oleh bilangan bulat lain kita dapat menggunakan kalkulator atau dengan metode pembagian cara panjang. Meskipun demikian, kita akan mengungkapkan cara lain untuk menguji keterbagian beberapa bilangan bulat. Sebagai contoh, kita akan menentukan apakah 1734 habis dibagi oleh 17. Untuk keperluan ini, perhatikan langkah-langkah berikut ini:

$$1734 = 1700 + 34$$

Karena $17 \mid 1700$ dan $17 \mid 34$, menurut sifat keterbagian, $17 \mid (1700 + 34)$, atau $17 \mid 1734$. Dengan cara yang sama, kita dapat menentukan bahwa $17 \nmid 1735$.

Untuk menentukan apakah suatu bilangan bulat n dapat dibagi (habis dibagi) oleh bilangan bulat lain d , kita pertimbangkan bahwa n sebagai jumlah atau selisih dua bilangan-bilangan bulat di mana d paling sedikit dapat membagi satu dari bilangan-bilangan bulat itu. Sebagai contoh, tentukan apakah 358 habis dibagi oleh 2. Jelas sekali bahwa 358 dapat dibagi oleh 2 karena 358 adalah bilangan genap. Hal ini karena digit satuannya 2. Selanjutnya perhatikan yang berikut ini:

$$\begin{aligned} 358 &= 350 + 8 \\ &= 35(10) + 8 \end{aligned}$$

Kita mengetahui bahwa $2 \mid 10$ sehingga $2 \mid 35(10)$, dan $2 \mid 8$ yang mengakibatkan $2 \mid (35(10) + 8)$. Karena 2 membagi sebarang bilangan berkelipatan 10, untuk menentukan apakah suatu bilangan dapat dibagi oleh 2 cukup dengan memperhatikan apakah digit satuannya dapat dibagi oleh 2. Jika digit satuannya tidak dapat dibagi oleh 2 maka bilangan itu tidak dapat dibagi oleh 2.

Kita dapat mengembangkan uji serupa ini untuk keterbagian oleh 5 dan 10. Secara umum, kita mempunyai aturan-aturan keterbagian sebagai berikut:

Uji keterbagian oleh 2.

Suatu bilangan bulat dapat dibagi oleh 2 jika dan hanya jika digit satuannya dapat dibagi oleh 2.

Uji keterbagian oleh 5.

Suatu bilangan bulat dapat dibagi oleh 5 jika dan hanya jika digit satuannya dapat dibagi oleh 5. Hal ini berarti bahwa digit satuannya adalah 0 atau 5.

Uji keterbagian oleh 10.

Suatu bilangan bulat dapat dibagi oleh 10 jika dan hanya jika digit satuannya dapat dibagi oleh 10. Hal ini berarti bahwa digit satuannya adalah 0.

Selanjutnya kita akan memperhatikan aturan keterbagian oleh 4 dan 8. Kita tahu bahwa $4 \nmid 10$ dan $8 \nmid 10$ sehingga tidak tepat jika kita digit satuan untuk keterbagian oleh 4 dan 8. Tetapi 4 atau 2^2 dapat membagi 10^2 , dan 8 atau 2^3 dapat membagi 10^3 .

Pertama kita akan mengembangkan suatu aturan keterbagian oleh 4. Perhatikan empat digit bilangan n sebarang, sedemikian sehingga $n = a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d$. Kita tahu bahwa $4 \mid 10^2$ karena $10^2 = 4 \cdot 25$ dan akibatnya $4 \mid 10^3$. Karena $4 \mid 10^2$, $4 \mid b \cdot 10^2$ dan $4 \mid a \cdot 10^3$. Akhirnya, $4 \mid b \cdot 10^2$ dan $4 \mid a \cdot 10^3$ memberikan implikasi $4 \mid (a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2)$. Sekarang, keterbagian $n = a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d$ oleh 4 tergantung pada keterbagian $(c \cdot 10 + d)$ oleh 4. $(c \cdot 10 + d)$ merupakan bilangan yang ditampilkan oleh dua digit terakhir pada bilangan bulat n yang diberikan. Kita rangkum hal ini di dalam uji berikut ini.

Uji keterbagian oleh 4

Suatu bilangan bulat dapat dibagi oleh 4 jika dan hanya jika dua digit terakhirnya menyatakan bilangan yang dapat dibagi oleh 4.

Untuk menyelidiki suatu bilangan bulat dapat dibagi oleh 8, kita telah mengetahui bahwa pangkat terkecil dari 10 yang dapat dibagi oleh 8 adalah 10. Karena $10 = 8 \cdot 125$. Akibatnya, untuk setiap bilangan bulat n dan $n > 3$, 10^n juga dapat dibagi oleh 8. Berikut ini uji keterbagian oleh 8.

Uji keterbagian oleh 8

Suatu bilangan bulat dapat dibagi oleh 8 jika dan hanya jika tiga digit terakhirnya menyatakan bilangan yang dapat dibagi oleh 8.

Berikut ini adalah beberapa contoh penggunaan uji keterbagian oleh 2, uji keterbagian oleh 4, dan uji keterbagian oleh 8.

Contoh1.

- a. Tentukan apakah 97128 dapat dibagi oleh 2, 4, dan 8.
- b. Tentukan apakah 83026 dapat dibagi oleh 2, 4, dan 8.

Jawab.

- a. $2 \mid 97128$ karena $2 \mid 8$.
 $4 \mid 97128$ karena $4 \mid 28$.
 $8 \mid 97128$ karena $8 \mid 128$.
- b. $2 \mid 83026$ karena $2 \mid 6$.

$4 \mid 83026$ karena $4 \mid 26$.

$8 \nmid 83026$ karena $4 \nmid 026$.

Selanjutnya, kita perhatikan keterbagian suatu bilangan bulat oleh 3. Tidak ada pangkat dari 10 yang dapat dibagi oleh 3, tetapi bilangan-bilangan 9, 99, 999, dan yang sejenisnya adalah dekat dengan bilangan pangkat dari 10 dan dapat dibagi oleh 3. Kita tulis kembali bilangan-bilangan yang menggunakan 999, 99, dan 9 sebagai berikut:

$$\begin{aligned} 5721 &= 5 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 1 \\ &= 5(999 + 1) + 7(99 + 1) + 2(9 + 1) + 1 \\ &= 5 \cdot 999 + 5 \cdot 1 + 7 \cdot 99 + 7 \cdot 1 + 2 \cdot 9 + 2 \cdot 1 + 1 \\ &= (5 \cdot 999 + 7 \cdot 99 + 2 \cdot 9) + (5 + 7 + 2 + 1) \end{aligned}$$

Jumlah dari bilangan-bilangan yang ada dalam kurung pertama dapat dibagi oleh 3. Jadi keterbagian 5721 oleh 3 tergantung pada jumlah bilangan-bilangan yang ada di dalam kurung ke dua. Di dalam kasus ini, $5 + 7 + 2 + 1 = 15$ dan $3 \mid 15$. Jadi $3 \mid 5721$. Dengan demikian, untuk memeriksa apakah 5721 dapat dibagi oleh 3, kita cukup memeriksa apakah $5 + 7 + 2 + 1$ dapat dibagi oleh 3. Contoh ini membawa kita pada uji keterbagian oleh 3 sebagai berikut.

Uji keterbagian oleh 3

Suatu bilangan bulat dapat dibagi oleh 3 jika dan hanya jika jumlah digit-digitnya merupakan bilangan yang dapat dibagi oleh 3.

Kita dapat menggunakan argumen yang serupa untuk digunakan membuktikan keterbagian suatu bilangan bulat oleh 3, khususnya bilangan bulat bilangan bulat yang mempunyai 4 digit, $n = a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d$.

Karena $a \cdot 999 + b \cdot 99 + c \cdot 9 + d$ dekat ke n dan dapat dibagi oleh 3, kita peroleh sebagai berikut:

$$\begin{aligned} a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d &= a \cdot 1000 + b \cdot 100 + c \cdot 10 + d \\ &= a(999 + 1) + b(99 + 1) + c(9 + 1) + d \\ &= (a \cdot 999 + b \cdot 99 + c \cdot 9) + (a \cdot 1 + b \cdot 1 + c \cdot 1) \\ &= (a \cdot 999 + b \cdot 99 + c \cdot 9) + (a + b + c) \end{aligned}$$

Karena $3 \mid 999$, $3 \mid 99$, dan $3 \mid 9$, $3 \mid (a \cdot 999 + b \cdot 99 + c \cdot 9)$.

Jika $3 \mid (a + b + c)$ maka $3 \mid ((a \cdot 999 + b \cdot 99 + c \cdot 9) + (a + b + c))$. Hal ini berarti $3 \mid n$. Di lain pihak, jika $3 \nmid (a + b + c)$ maka $3 \nmid ((a \cdot 999 + b \cdot 99 + c \cdot 9) + (a + b + c))$. Hal ini berarti $3 \nmid n$.

Karena $9 \mid 9$, $9 \mid 99$, $9 \mid 999$, dan seterusnya dengan uji yang serupa dengan uji keterbagian suatu bilangan bulat oleh 3, kita dapat menentukan keterbagian suatu bilangan bulat oleh 9

Uji keterbagian oleh 9

Suatu bilangan bulat dapat dibagi oleh 9 jika dan hanya jika jumlah dari digit-digitnya merupakan bilangan yang dapat dibagi oleh 9.

Contoh 2.

- Tentukan apakah 1002 dapat dibagi oleh 3 dan dapat dibagi oleh 9.
- Tentukan apakah 14238 dapat dibagi oleh 3 dan dapat dibagi oleh 9.

Jawab.

- Karena $1 + 0 + 0 + 2 = 3$ dan $3 \mid 3$, akibatnya $3 \mid 1002$.
Karena $9 \nmid 3$, akibatnya $9 \nmid 1002$.
- Karena $1 + 4 + 2 + 3 + 8 = 18$ dan $3 \mid 18$, akibatnya $3 \mid 14238$.
Karena $9 \mid 18$, akibatnya $9 \mid 14238$.

Selanjutnya akan kita perhatikan uji keterbagian suatu bilangan bulat oleh 7, oleh 11, dan oleh 6, yaitu sebagai berikut:

Uji keterbagian oleh 7

Suatu bilangan bulat dapat dibagi oleh 7 jika dan hanya jika bilangan yang dinyatakan tanpa digit satuannya dikurangi dua kali unit satuan asalnya, dapat dibagi oleh 7.

Uji keterbagian oleh 11

Suatu bilangan bulat dapat dibagi oleh 11 jika dan hanya jika jumlah digit-digit yang berada pada pangkat genap dari 10 dikurangi jumlah digit-digit yang berada pada pangkat ganjil dari 10, dapat dibagi oleh 11.

Uji keterbagian oleh 6

Suatu bilangan bulat dapat dibagi oleh 6 jika dan hanya jika bilangan itu dapat dibagi oleh 2 dan 3.

Contoh 3.

- Tentukan apakah 8471986 dapat dibagi oleh 11.
- Tentukan apakah 462 dapat dibagi oleh: (i) 7, (ii) 11, dan (iii) 6.
- Tentukan apakah 875 dapat dibagi oleh: (i) 7, (ii) 11, dan (iii) 6.

Jawab.

- $(6 + 9 + 7 + 8) - (8 + 1 + 4) = 17$.
Karena $11 \nmid 17$, kita simpulkan $11 \nmid 8471986$.
- $46 - 2 \cdot 2 = 42$ dan $7 \mid 42$.

Jadi, $7 \mid 462$.

(ii) $(2 + 4) - 6 = 0$ dan $11 \mid 0$

Jadi, $11 \mid 462$.

(iii) $2 \mid 462$ dan $3 \mid 462$.

Jadi $6 \mid 462$.

c.

(i) $87 - 2 \cdot 5 = 77$ dan $7 \mid 77$

Jadi $7 \mid 875$

(ii) $(5 + 8) - 7 = 6$ dan $11 \nmid 6$

Jadi, $11 \nmid 875$.

(iii) $2 \nmid 875$ karena 875 bilangan ganjil.

Jadi $6 \nmid 875$.

Rangkuman

1. Suatu bilangan bulat dapat dibagi oleh 2 jika dan hanya jika digit satuannya dapat dibagi oleh 2.
2. Suatu bilangan bulat dapat dibagi oleh 5 jika dan hanya jika digit satuannya dapat dibagi oleh 5. Hal ini berarti bahwa digit satuannya adalah 0 atau 5.
3. Suatu bilangan bulat dapat dibagi oleh 10 jika dan hanya jika digit satuannya dapat dibagi oleh 10. Hal ini berarti bahwa digit satuannya adalah 0.
4. Suatu bilangan bulat dapat dibagi oleh 4 jika dan hanya jika dua digit terakhirnya menyatakan bilangan yang dapat dibagi oleh 4.
5. Suatu bilangan bulat dapat dibagi oleh 8 jika dan hanya jika tiga digit terakhirnya menyatakan bilangan yang dapat dibagi oleh 8.
6. Suatu bilangan bulat dapat dibagi oleh 3 jika dan hanya jika jumlah digit-digitnya merupakan bilangan yang dapat dibagi oleh 3.
7. Suatu bilangan bulat dapat dibagi oleh 9 jika dan hanya jika jumlah dari digit-digitnya merupakan bilangan yang dapat dibagi oleh 9.
8. Suatu bilangan bulat dapat dibagi oleh 7 jika dan hanya jika bilangan yang dinyatakan tanpa digit satuannya dikurangi dua kali unit satuan asalnya, dapat dibagi oleh 7.

9. Suatu bilangan bulat dapat dibagi oleh 11 jika dan hanya jika jumlah digit-digit yang berada pada pangkat genap dari 10 dikurangi jumlah digit-digit yang berada pada pangkat ganjil dari 10, dapat dibagi oleh 11.
10. Suatu bilangan bulat dapat dibagi oleh 6 jika dan hanya jika bilangan itu dapat dibagi oleh 2 dan 3.

Uji Kompetensi

Lingkarilah salah satu jawaban yang menurut anda benar.

1. Pernyataan yang benar adalah
 - a. $3 \mid 746988$
 - b. $9 \mid 746988$
 - c. $5 \mid 746988$
 - d. $7 \mid 746988$
2. Pernyataan yang benar adalah
 - a. $11 \mid 183320$
 - b. $9 \mid 183320$
 - c. $7 \mid 183320$
 - d. $5 \mid 183320$
3. Pernyataan yang benar adalah
 - a. $11 \mid 17171$
 - b. $9 \mid 17171$
 - c. $7 \mid 17171$
 - d. $5 \mid 17171$
4. Pernyataan yang benar adalah
 - a. $3 \mid 100011$
 - b. $5 \mid 100011$
 - c. $7 \mid 100011$
 - d. $9 \mid 100011$
5. Pernyataan yang benar adalah
 - a. $11 \mid 9339$

b. $11 \mid 9393$

c. $11 \mid 3939$

d. $11 \mid 9333$

6. Pernyataan yang benar adalah

a. $11 \mid 12321$

b. $11 \mid 12345$

c. $11 \mid 54321$

d. $11 \mid 12312$

7. Jika $9 \mid 85mn1$ maka m dan n berturut-turut adalah

a. 1 dan 6

b. 1 dan 5

c. 1 dan 4

d. 1 dan 3

8. Jika $3 \mid 74n$ maka n adalah

a. 1

b. 3

c. 5

d. 9

9. Jika $9 \mid 83n45$ maka n adalah

a. 4

b. 5

c. 6

d. 7

10. Jika $11 \mid 6n55$ maka n adalah

a. 6

b. 7

c. 8

d. 9