BAB 3
PRINSIP SANGKAR BURUNG MERPATI

3.1 Pengertian Prinsip Sangkar Burung Merpati

Sebagai ilustrasi, kita misalkan terdapat 3 ekor burung merpati dan 2 sangkar burung merpati. Terdapat beberapa kemungkinan bagaimana burung-burung itu menempati sangkarnya. Berikut ini disajikan peristiwa bagaimana burung merpati menempati sangkar-sangkar itu.

$\boxed{2}\boxed{1}\quad\boxed{1}\boxed{2}\quad\boxed{0}\boxed{3}\quad\boxed{3}\boxed{0}$

Gambar 3.1. Peristiwa 3 burung merpati dan 2 sangkar

Dari keempat peristiwa yang terjadi pada ilustrasi di atas, tampak bahwa di setiap peristiwa itu selalu ada satu sangkar burung atau lebih yang ditempati beberapa burung merpati. Lebih tepatnya kita katakan "**paling sedikit ada satu** sangkar burung yang ditempati oleh **paling sedikit dua** ekor burung merpati".

Kita perhatikan bagaimana yang terjadi jika terdapat 4 burung merpati yang menempati 3 sangkar burung. Peristiwa yang terjadi di antaranya dapat dilihat pada gambar berikut.

Pertama-tama kita perhatikan kemungkinan yang terjadi jika semua sangkar terisi. Karena banyaknya merpati melebihi banyaknya sangkar, maka peristiwa semua sangkar terisi ini dapat digambarkan sebagai berikut:

$\boxed{2}\boxed{1}\boxed{1}\quad\boxed{1}\boxed{2}\boxed{1}\quad\boxed{1}\boxed{1}\boxed{2}$

Gambar 3.2. Peristiwa 4 burung merpati dan 3 sangkar (kasus 1)

Jika terdapat satu sangkar yang tidak terisi, maka kemungkinan yang dapat terjadi adalah seperti di bawah ini:

$\boxed{0}\boxed{2}\boxed{2}\quad\boxed{2}\boxed{0}\boxed{2}\quad\boxed{2}\boxed{2}\boxed{0}$

$\boxed{0}\boxed{1}\boxed{3}\quad\boxed{0}\boxed{3}\boxed{1}\quad\boxed{1}\boxed{0}\boxed{3}$

$\boxed{3}\boxed{0}\boxed{1}\quad\boxed{1}\boxed{3}\boxed{0}\quad\boxed{3}\boxed{1}\boxed{0}$

Gambar 3.3. Peristiwa 4 burung merpati dan 3 sangkar (kasus 2)

Terakhir adalah peristiwa 2 sangkar yang tidak ditempati burung-burung itu, sehingga terdapat 4 ekor burung yang menempati salah satu di antara ketiga sangkar yang tersedia. Semua peristiwa yang mungkin tentang tidak terisinya dua sangkar ini dapat digambarkan sebagai berikut.

$\boxed{0}\boxed{0}\boxed{4}\quad\boxed{0}\boxed{4}\boxed{0}\quad\boxed{4}\boxed{0}\boxed{0}$

Gambar 3.3. Peristiwa 4 burung merpati dan 3 sangkar (kasus 3)

Dari gambar-gambar di atas yang memperlihatkan berbagai situasi yang berlainan, dapat disimpulkan bahwa manakala banyaknya burung melebihi banyaknya sangkar, maka akan selalu "terdapat paling sedikit satu sangkar burung yang ditempati oleh paling sedikit dua ekor burung merpati. Kita rumuskan hasil diskusi ini pada teorema berikut".

Teorema 3.1 (Prinsip Sangkar Burung Merpati)
Jika $k+1$ obyek atau lebih ditempatkan pada k kotak, maka terdapat paling sedikit satu kotak yang memuat dua obyek atau lebih.

Bukti:
Misalkan tidak terdapat satu kotak pun yang memuat lebih dari satu obyek. Maka ini menunjukkan bahwa banyaknya obyek secara keseluruhan tentulah paling banyak adalah k. Namun ini adalah sebuah kontradiksi, karena ini berarti paling sedikit hanyalah ada $k+1$ obyek.

3.2 Prinsip Sangkar Burung Merpati yang Diperumum

Prinsip sangkar burung merpati menyatakan bahwa terdapat paling sedikit 2 obyek dalam kotak yang sama jika terdapat obyek yang lebih banyak dari kotaknya. Misalnya, di antara 31 angka desimal, pasti terdapat paling sedikit 4 angka yang sama. Ini karena jika ke 31 angka tadi didistribusikan pada 10 kotak, satu kotak tentu akan memiliki lebih dari 3 obyek. Secara umum situasi ini kita rumuskan sebagai berikut.

Teorema 3.2 (Prinsip Sangkar Burung Merpati yang Diperumum)
Jika N obyek ditempatkan pada k kotak, maka terdapat paling sedikit 1 kotak yang memuat $\lceil N/k \rceil$ obyek.

Bukti:
Misalkan bahwa tak ada kotak yang memuat lebih dari $\lceil N/k \rceil - 1$ obyek. Maka keseluruhan obyek paling banyak adalah

$k\left(\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil - 1\right) < k\left(\left(\frac{N}{k+1} + 1\right) - 1\right) = N$ dengan ketidaksamaan $\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil < \left(\frac{N}{k} + 1\right)$

telah digunakan. Namun ini merupakan sebuah kontradiksi, karena total banyaknya obyek adalah N.

Beberapa masalah yang sering muncul biasanya adalah tentang menentukan banyaknya obyek minimum demikian sehingga paling sedikit r obyek dari obyek-obyek ini harus terdapat dalam satu dari k kotak jika obyek-obyek ini didistribusikan di antara kotak-kotak itu. Jika kita memiliki N obyek, prinsip sangkar burung merpati yang diperumum menyatakan bahwa paling sedikit terdapat r obyek dalam 1 kotak asalkan $\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil \geq r$.

Bilangan bulat N terkecil dengan $\frac{N}{k} > r - 1$, yaitu $N = k(r\text{-}1) + 1$, merupakan bilangan bulat terkecil yang memenuhi ketidaksamaan $\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil \geq r$.

Mungkinkah ada nilai N yang lebih kecil? Tentu tidak, karena jika kita memiliki $k(r\text{-}1)$ obyek, kita menempatkan r-1 di antaranya pada tiap-tiap kotak dari k kotak yang tersedia dan tak ada 1 kotak pun yang ditempati oleh paling sedikit r obyek.

Teorema 3.3
Tiap-tiap barisan dari n^2+1 bilangan real yang berbeda memuat sebuah barisan bagian yang panjangnya $n+1$, dan barisan bagian ini merupakan barisan naik atau turun.

Aplikasi prinsip sangkar burung merpati memperlihatkan adanya (eksistensi) suatu **barisan bagian** (*subsequence*) yang naik atau turun dengan panjang tertentu dalam sebuah barisan bilangan bulat. Sebuah barisan bagian dari barisan $a_1, a_2, \cdots, a_N$ didefinisikan sebagai sebuah barisan dalam bentuk $a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_m}$, dengan $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_m \leq i_N$. Ini berarti, sebuah barisan bagian yang diperoleh dari suatu barisan tertentu diperoleh dengan mengambil beberapa suku dari barisan tersebut dalam urutan aslinya, dan mungkin tidak memuat suku-suku lainnya. Sebuah barisan dikatakan **naik** jika tiap-tiap sukunya selalu lebih besar daripada suku-suku sebelumnya, dan dikatakan **turun** jika tiap-tiap suku selalu lebih kecil daripada suku-suku sebelumnya.

Latihan Soal-soal:

3.1 Di antara 367 orang yang menghadiri sebuah seminar matematika, pasti ada 2 orang yang berulang tahun pada hari yang sama. Mengapa?
3.2 Di antara 11 angka yang ditulis, pasti ada paling sedikit 1 angka yang berulang. Jelaskan.
3.3 Jika seseorang diminta menuliskan 28 kata yang disusun berdasarkan huruf-huruf dalam abjad, maka pasti paling sedikit ada dua kata yang diawali dengan huruf yang sama. Mengapa?
3.4 Dalam ujian akhir semester matematika kombinatorik mahasiswa mendapat skor minimal 0 dan maksimal 100. Jika kita ingin agar terdapat paling sedikit 2 mahasiswa yang mendapat nilai ujian dengan skor yang sama, berapa banyaknya mahasiswa yang harus mengikuti ujian itu?
3.5 Di antara 40 siswa dalam sebuah kelas, berapa orang yang lahir pada hari yang sama?
3.6 Di antara 110 mahasiswa yang mengontrak mata kuliah persamaan diferensial, berapa orangkah di antaranya yang lahir pada bulan yang sama?
3.7 Berapakah banyaknya mahasiswa paling sedikit yang harus menghadiri perkuliahan matematika kombinatorik agar terdapat paling sedikit 6 mahasiswa yang memiliki nilai huruf yang sama (dari nilai-nilai A, B, C, D, dan E) di akhir perkuliahan?
3.8 Dari 52 kartu bridge, berapa kartu harus dipilih agar terdapat paling sedikit 3 kartu dari (a) jenis yang sama terpilih? (b) jenis "hati" terpilih?
3.9 Dalam sebuah provinsi maju, di antara penduduknya terdapat 25 juta keluarga yang masing-masing memiliki 1 unit telepon kabel yang nomornya terdiri atas 10 angka. Diketahui bahwa nomor telepon tersebut dinyatakan dalam bentuk AXX-AXX-XXXX, A merupakan angka 2 hingga 9, tiga angka pertama menyatakan kode kabupaten, sedangkan yang lainnya merupakan angka sembarang mulai dari 0 hingga 9. Berapa paling sedikit kode daerah yang perlu disediakan agar semua penduduk memiliki nomor telepon yang berlainan?
3.10 Dalam satu bulan tertentu yang terdiri atas 30 hari, sebuah tim olah raga memainkan paling sedikit 1 pertandingan setiap harinya, tapi tak lebih dari 45 pertandingan. Perlihatkan bahwa diperlukan adanya satu periode tertentu yang terdiri atas beberapa hari yang berturut-turut dan pada periode ini tim olah raga tersebut harus memainkan tepat 14 pertandingan.
3.11 Perlihatkan bahwa di antara $n+1$ bilangan bulat positif yang tidak lebih dari $2n$, terdapat sebuah bilangan bulat yang membagi habis salah satu bilangan asli lainnya.
3.12 Barisan 8, 11, 9, 1, 4, 6, 12, 10, 5, 7 memiliki 10 suku. Perhatikan bahwa $10 = 3^2 + 1$. Terdapat 4 barisan bagian naik dengan panjang 4, yaitu 1,4,6,12; 1,4,6,7; 1,4,6,10; dan 1,4,5,7. Terdapat pula sebuah barisan bagian turun dengan panjang 4, yaitu 11, 9, 6, 5.
3.13 Misalkan dalam sebuah pesta yang dihadiri 6 orang, tiap-tiap sepasang orang yang hadir saling merupakan teman atau saling merupakan musuh. Buktikan bahwa terdapat tiga orang yang hadir saling merupakan teman atau tiga orang yang hadir saling merupakan musuh.

Soal-soal Latihan:

1. Buktikan bahwa dalam tiap kumpulan 6 mata pelajaran pasti ada dua mata pelajaran yang terjadwal pada hari yang sama, jika tak ada pelajaran yang diselenggarakan di hari Sabtu.
2. Misalkan di sebuah pertemuan terdapat 28 orang. Maka paling sedikit terdapat 2 orang yang namanya diawali dengan huruf yang sama.
3. Sebuah laci lemari diisi selusin kaus kaki berwarna biru dan selusin kaus kaki berwarna coklat yang bercampur tidak berpasangan. Seorang anak mengambil beberapa kaus kaki tersebut dalam kegelapan malam.
   a. Berapa kaus kaki harus diambil agar dia yakin bahwa paling sedikit dia memperoleh dua kaus kaki yang berwarna sama?
   b. Berapa kaus kaki harus dia ambil agar paling sedikit diperoleh dua kaus kaki berwarna biru?

4. Misalkan terdapat sebuah himpunan bilangan bulat. Maka terdapat dua bilangan bulat yang sama memiliki sisa yang sama jika keduanya dibagi 4.
5. Misalkan a adalah bilangan asli. Tunjukkan bahwa di antara senbarang grup dari a+1 bilangan asli (tak perlu berurutan) terdapat 2 bilangan asli yang memiliki sisa yang sama jika keduanya dibagi bilangan a.
6. Misalkan p adalah sebuah bilangan bulat positif. Perlihatkan bahwa dalam tiap sembarang himpunan n bilangan bulat positif berurutan terdapat tepat 1 bilangan bulat yang habis dibagi p.
7. Di awal tahun terdapat calon mahasiswa dari 40 provinsi yang mendaftar ke perguruan tinggi. Jika kita ingin agar paling sedikit terdapat 60 calon mahasiswa berasal dari provinsi yang sama, berapa banyaknya calon paling sedikit yang harus mendaftar?
8. Tunjukkan bahwa jika 5 bilangan asli dipilih dari 8 bilangan asli pertama, maka pasti terdapat sepasang bilangan asli yang jumlahnya adalah 9.
9. Misalkan dari 8 bilangan bulat positif pertama diambil 4 bilangan. Apakah pasti terdapat sepasang bilangan bulat positif yang jumlahnya 9?
10. Perlihatkan bahwa jika 7 bilangan dipilih dari 10 bilangan asli pertama, maka pasti terdapat paling sedikit dua pasang bilangan yang jumlahnya 11.
11. Misalkan 6 bilangan dipilih dari 10 bilangan asli pertama. Apakah pasti terdapat paling sedikit dua pasang bilangan yang jumlahnya 11?
12. Berapa banyaknya bilangan yang harus dipilih dari himpunan {1,2,3,4,5} untuk memastikan bahwa paling sedikit sepasang bilangan dari bilangan-bilangan dalam himpunan ini jumlahnya 6.
13. Berapa banyaknya bilangan yang harus dipilih dari himpunan {1,2,3,4,5,6} untuk memastikan bahwa paling sedikit sepasang bilangan dari bilangan-bilangan dalam himpunan ini jumlahnya 7.
14. Berapa banyaknya bilangan yang harus dipilih dari himpunan {2,4,6,8,10,12,14} untuk memastikan bahwa paling sedikit sepasang bilangan dari bilangan-bilangan dalam himpunan ini jumlahnya 18.
15. Di sebuah perkuliahan matematika kombinatorik terdapat sembilan mahasiswa. Perlihatkan bahwa di perkuliahan tersebut paling sedikit terdapat paling sedikit lima mahasiswa pria atau paling sedikit lima mahasiswa wanita. Tunjukkan pula bahwa di perkuliahan tersebut terdapat paling sedikit tiga mahasiswa pria atau paling sedikit tujuh mahasiswa wanita.
16. Misalkan bahwa tiap-tiap mahasiswa yang mengontrak mata kuliah persamaan diferensial yang jumlahnya mencapai dua puluh lima orang adalah mahasiswa asal Pulau Jawa, Pulau Sumatra, atau Pulau Kalimantan. Perlihatkan bahwa terdapat paling sedikit sembilan mahasiswa asal Pulau Jawa, paling sedikit sembilan mahasiswa asal Pulau Sumatra, atau paling sedikit sembilan mahasiswa asal Pulau Kalimantan. Tunjukkan pula bahwa terdapat paling sedikit tiga mahasiswa asal Pulau Jawa, paling sedikit sembilan belas mahasiswa asal Pulau Sumatra, atau paling sedikit lima mahasiswa asal Pulau Kalimantan.
17. Susunlah sebuah barisan yang terdiri atas enam belas bilangan asli yang mengandung barisan bagian dengan lima suku, demikian sehingga barisan bagian tersebut termasuk barisan naik atau barisan turun.
18. Perlihatkan bahwa di antara 101 peserta seminar yang tinggi badannya semuanya berbeda, terdapat sebelas orang yang dapat diminta berdiri dalam satu barisan dengan tinggi badan dari terkecil ke terbesar atau sebaliknya.

19. Dalam sebuah kelompok yang terdiri atas 5 orang, di antara dua orang dalam kelompok tersebut saling merupakan teman atau saling merupakan musuh. Perlihatkan bahwa tidaklah mungkin terdapat tiga orang dalam kelompok tersebut yang saling merupakan musuh satu sama lain, atau saling merupakan teman satu sama lain.
20. Dalam sebuah kelompok yang terdiri atas 10 orang, di antara dua orang dalam kelompok tersebut saling merupakan teman atau saling merupakan musuh. Perlihatkan bahwa pasti terdapat tiga orang dalam kelompok tersebut yang saling merupakan musuh satu sama lain, atau empat orang yang saling merupakan teman satu sama lain, dan tiga orang yang saling merupakan musuh satu sama lain atau empat orang yang satu sama lainnya merupakan teman.
21. Dalam sebuah kelompok yang terdiri atas 20 orang, di antara dua orang dalam kelompok tersebut saling merupakan teman atau saling merupakan musuh. Perlihatkan bahwa pasti terdapat empat orang dalam kelompok tersebut yang saling merupakan musuh satu sama lain, atau empat orang yang saling merupakan teman satu sama lain.
22. Misalkan $a_1, a_2, \cdots, a_n$ merupakan bilangan asli. Buktikan bahwa jika sebanyak $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) - (n-1)$ merpati ditempatkan ke dalam *n* sangkar, maka sangkar yang ke-*i* dengan $i = 1,2, \ldots, n$, ditempati oleh paling sedikit a_i burung merpati.
23. Di tepi sebelah kiri sepanjang jalan raya sebuah kota terdapat 23 rumah. Tiap-tiap rumah mempunyai nomor mulai dari 100 hingga 143. Perlihatkan bahwa ada paling sedikit 2 rumah yang mempunyai nomor berurutan.
24. Misalkan $m_i \leq n$ untuk $i = 1, 2, \cdots, n^2 + 1$. Dengan prinsip sangkar burung merpati yang diperumum, tunjukkan bahwa terdapat $n+1$ suku $a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_{n+1}}$ dengan $m_{i_1} = m_{i_2} = \cdots = m_{i_{n+1}}$ dan $i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_{n+1}$.

Contoh 3.1
Di antara 367 orang yang menghadiri sebuah seminar matematika, pasti ada 2 orang yang berulang tahun pada hari yang sama, karena hanya ada 366 hari ulang tahun yang mungkin dalam setiap tahunnya.

Contoh 3.2
Di antara 11 angka yang ditulis, pasti ada paling sedikit 1 angka yang berulang karena hanya ada 10 angka, yakni mulai dari 0 hingga 9.

Contoh 3.3
Jika seseorang diminta menuliskan 28 kata yang disusun berdasarkan huruf-huruf dalam abjad, maka pasti paling sedikit ada dua kata yang diawali dengan huruf yang sama, karena abjad hanya memuat 26 huruf saja.

Contoh 3.4
Dalam ujian akhir semester matematika kombinatorik mahasiswa mendapat skor minimal 0 dan maksimal 100. Jika kita ingin agar terdapat paling sedikit 2 mahasiswa yang mendapat nilai ujian dengan skor yang sama, berapa banyaknya mahasiswa yang harus mengikuti ujian itu?
Penyelesaian:

Dalam hal ini skor yang ada adalah dari 0 hingga 100. Ini artinya terdapat 101 skor yang berlainan yang dapat diperoleh mahasiswa peserta ujian tersebut. Sesuai dengan prinsip sangkar burung merpati, di antara 102 mahasiswa yang mengikuti ujian akhir semester, terdapat paling sedikit 2 mahasiswa mendapat skor yang sama.

Contoh 3.5
Di antara 40 siswa dalam sebuah kelas, berapa orang yang lahir pada hari yang sama?
Penyelesaian:
Di antara 40 mahasiswa terdapat paling sedikit $\lceil 40/7 \rceil = 6$ mahasiswa yang memiliki hari ulang tahun yang sama.

Contoh 3.6
Di antara 110 mahasiswa yang mengontrak mata kuliah persamaan diferensial, berapa orangkah di antaranya yang lahir pada bulan yang sama?
Penyelesaian:
Di antara 110 mahasiswa terdapat paling sedikit $\lceil 110/12 \rceil = 9$ mahasiswa yang lahir pada bulan yang sama.

Contoh 3.7
Berapakah banyaknya mahasiswa paling sedikit yang harus menghadiri perkuliahan matematika kombinatorik agar terdapat paling sedikit 6 mahasiswa yang memiliki nilai huruf yang sama (dari nilai-nilai A, B, C, D, dan E) di akhir perkuliahan?
Penyelesaian:
Untuk memastikan bahwa paling sedikit terdapat 6 mahasiswa memperoleh nilai yang sama, maka banyaknya mahasiswa yang diperlukan paling sedikit dapat dinyatakan dengan bilangan bulat terkecil demikian sehingga $\lceil N/5 \rceil = 5$. Bilangan terkecil ini adalah N = 5.5 + 1 = 26. Jika kita hanya mempunyai 25 mahasiswa, maka bisa terjadi adanya 5 mahasiswa yang masing-masing memperoleh nilai demikian sehingga di antara keenam mahasiswa tak ada yang memperoleh nilai yang sama. Ini berarti, diperlukan paling sedikit 26 mahasiswa agar paling sedikit terdapat 6 mahasiswa memperoleh nilai yang sama.

Contoh 3.8
Dari 52 kartu bridge, berapa kartu harus dipilih agar terdapat paling sedikit 3 kartu dari jenis yang sama terpilih?
Penyelesaian:
Misalkan terdapat 4 kotak, dan di saat kartu dipilih, kartu-kartu itu ditempatkan pada kotak yang telah dikhususkan untuk ditempati kartu dari jenis itu. Dengan menggunakan prinsip sangkar burung merpati, tampak bahwa jika N kartu dipilih, maka paling sedikit terdapat 1 kotak yang memuat paling sedikit $\lceil N/4 \rceil$ kartu. Akibatnya, terdapat paling sedikit 3 kartu dari jenis yang sama terpilih jika $\lceil N/4 \rceil \geq 3$. Bilangan bulat terkecil demikian sehingga $\lceil N/4 \rceil \geq 3$ adalah N = 2.4 + 1 = 9, sehingga 9 kartu diperlukan. Andaikan 9 kartu dipilih, maka bisa diperoleh 2 kartu dari jenis yang sama, demikian sehingga lebih dari 9 kartu yang diperlukan. Implikasinya adalah bahwa 9 kartu harus dipilih untuk menjamin agar paling sedikit 3 kartu dari jenis yang sama terpilih. Perlu dicatat bahwa setelah kartu ke-8 dipilih, kita tak akan mampu menghindari terjadinya kartu ketiga dari jenis lainnya.

Contoh 3.9
Dari 52 kartu bridge, berapa kartu harus dipilih agar terdapat paling sedikit 3 kartu dari jenis "hati" terpilih?
Penyelesaian:
Dalam masalah ini kita hanya ingin memastikan bahwa ketiga kartu itu berasal dari jenis "hati", dan bukan berasal dari jenis yang sama semata. Kita tentu saja dapat memilih seluruh kartu dari jenis "bata", "daun", atau "keriting", yakni 39 kartu semuanya, sebelum akhirnya kita memilih sebuah kartu "hati". Tiga kartu berikutnya semuanya berupa kartu "hati". Ini menunjukkan bahwa kita perlu memilih 42 kartu untuk memperoleh 3 kartu "hati".

Contoh 3.10
Dalam sebuah provinsi maju, di antara penduduknya terdapat 25 juta keluarga yang masing-masing memiliki 1 unit telepon kabel yang nomornya terdiri atas 10 angka. Diketahui bahwa nomor telepon tersebut dinyatakan dalam bentuk AXX-AXX-XXXX, A merupakan angka 2 hingga 9, tiga angka pertama menyatakan kode kabupaten, sedangkan yang lainnya merupakan angka sembarang mulai dari 0 hingga 9. Berapa paling sedikit kode daerah yang perlu disediakan agar semua penduduk memiliki nomor telepon yang berlainan?
Penyelesaian:
Terdapat 8 juta nomor yang berlainan dalam bentuk tersebut, karena kode daerah dalam bentuk AXX terdiri atas $8\times10\times10=800$ kode. Terdapat beberapa nomor telepon yang kode daerahnya sama, sehingga perbedaan antara nomor telepon yang satu dengan yang lainnya tentu saja sangat tergantung pada 7 angka berikutnya, yakni yang dibentuk oleh AXX-XXXX. Konfigurasi ini memberikan

$$8\times10\times10\times10\times10\times10\times10 = 8.000.000$$

nomor yang berlainan. Dengan demikian, berdasarkan Prinsip Sangkar Burung Merpati, dari 25 juta pemilik telepon tersebut, terdapat $\left\lceil \frac{25000000}{8000000} \right\rceil$ di antaranya yang memiliki nomor telepon yang sama. Dengan demikian, paling sedikit terdapat 4 kode wilayah yang diperlukan agar kesepuluh angka tersebut berlainan.

Banyak sekali penerapan prinsip sangkar burung merpati yang amat menarik. Di antara penerapan itu misalnya bagaimana obyek-obyek yang kita pilih kita tempatkan ke dalam kotak-kotak secara cerdik. Contoh-contoh berikut memberi ilustrasi penerapan seperti itu.

Contoh 3.11

Dalam satu bulan tertentu yang terdiri atas 30 hari, sebuah tim olah raga memainkan paling sedikit 1 pertandingan setiap harinya, tapi tak lebih dari 45 pertandingan. Perlihatkan bahwa diperlukan adanya satu periode tertentu yang terdiri atas beberapa hari yang berturut-turut dan pada periode ini tim olah raga tersebut harus memainkan tepat 14 pertandingan.

Penyelesaian:

Misalkan a_j menyatakan banyaknya pertandingan yang dimainkan pada hari ke-j atau hari sebelumnya dalam bulan tertentu. Maka $a_1, a_2, \cdots, a_{30}$ merupakan sebuah barisan naik dari bilangan bulat positif yang berlainan, dengan $1 \le a_j \le 45$. Selain itu,

$$a_1 + 14, a_2 + 14, \cdots, a_{30} + 14$$

juga merupakan barisan naik dari bilangan bulat positif berlainan, dengan $15 \le a_j + 14 \le 59$. Terdapat enam puluh bilangan bulat positif, yaitu

$$a_1, a_2, \cdots, 30, a_1 + 14, a_2 + 14, \cdots, a_{30} + 14,$$

yang semuanya tidak melebihi 59. Ini berarti, sesuai dengan prinsip sangkar burung merpati, dari bilangan-bilangan bulat ini dua bilangan di antaranya adalah sama. Karena bilangan bulat a_j, j = 1, 2, ... , 30, semuanya berlainan dan a_j + 14, j=1, 2, ..., 30 semuanya berlainan pula, maka terdapat indeks i dan j dengan $a_i = a_j + 14$. Dengan demikian, terdapat tepat 14 pertandingan yang dilaksanakan mulai dari hari j+1 hingga hari i.

Contoh 3.12

Perlihatkan bahwa di antara n+1 bilangan bulat positif yang tidak lebih dari 2n, terdapat sebuah bilangan bulat yang membagi habis salah satu bilangan asli lainnya.

Penyelesaian:

Kita tulis n+1 bilangan bulat $a_1, a_2, \cdots, a_{N+1}$ sebagai pangkat dari hasil kali antara2 dan sebuah bilangan asli ganjil. Dengan kata lain, misalkan bahwa $a_j = 2^{k_j} q_j$ untuk j=1,2, ... , n+1, dengan k_j sebagai bilangan bulat tak negatif dan q_j merupakan sebuah bilangan ganjil. Bilangan bulat $q_1, q_2, \cdots, q_{N+1}$ merupakan bilangan bulat positif ganjil yang kurang dari 2n. Karena terdapat hanya n bilangan bulat positif ganjil yang kurang dari 2n, maka berdasarkan prinsip sangkar burung merpati, dua bilangan dari bilangan-bilangan $q_1, q_2, \cdots, q_{N+1}$ tentulah bernilai sama. Dengan demikian, terdapat bilangan bulat i dan j demikian sehingga $q_i = q_j$. Misalkan q merupakan nilai persekutuan dari q_i dan q_j. Maka, $a_j = 2^{k_j} q$. Ini berarti jika $k_i < k_j$, maka a_i membagi habis a_j; sedangkan jika $k_i > k_j$, maka a_j membagi habis a_i.

Aplikasi prinsip sangkar burung merpati memperlihatkan adanya (eksistensi) suatu **barisan bagian** (*subsequence*) yang naik atau turun dengan panjang tertentu dalam sebuah barisan bilangan bulat. Sebuah barisan bagian dari barisan $a_1, a_2, \cdots, a_N$ didefinisikan sebagai sebuah barisan dalam bentuk $a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_m}$, dengan $1 \le i_1 \le i_2 \le \cdots \le i_m \le i_N$. Ini berarti, sebuah barisan bagian yang diperoleh dari suatu barisan tertentu diperoleh dengan mengambil beberapa suku dari barisan tersebut dalam urutan aslinya, dan mungkin tidak memuat suku-suku lainnya. Sebuah barisan dikatakan **naik** jika tiap-tiap sukunya selalu lebih besar daripada suku-suku sebelumnya, dan dikatakan **turun** jika tiap-tiap suku selalu lebih kecil daripada suku-suku sebelumnya.

Contoh 3.13

Barisan 8, 11, 9, 1, 4, 6, 12, 10, 5, 7 memiliki 10 suku. Perhatikan bahwa $10 = 3^2 + 1$. Terdapat 4 barisan bagian naik dengan panjang 4, yaitu 1,4,6,12; 1,4,6,7; 1,4,6,10; dan 1,4,5,7. Terdapat pula sebuah barisan bagian turun dengan panjang 4, yaitu 11, 9, 6, 5.

Contoh 3.14

Misalkan dalam sebuah pesta yang dihadiri 6 orang, tiap-tiap sepasang orang yang hadir saling merupakan teman atau saling merupakan musuh. Buktikan bahwa terdapat tiga orang yang hadir saling merupakan teman atau tiga orang yang hadir saling merupakan musuh.

Penyelesaian:

Misalkan O_1 adalah salah seorang di antara yang hadir di pesta itu. Di antara lima orang lainnya, yaitu O_2, O_3, O_4, O_5, dan O_6, terdapat tiga orang atau lebih yang merupakan teman O_1, atau tiga orang atau lebih merupakan musuh. Ini berdasarkan prinsip sangkar burung merpati yang diperumum, karena jika 5 obyek dibagi menjadi dua himpunan, maka salah satu himpunan memiliki paling sedikit $\lceil 5/2 \rceil = 3$ anggota. Dalam kasus yang pertama, misalkan O_2, O_3, dan O_4 adalah teman dari O_1. Jika dua orang di antara yang tiga orang ini saling merupakan teman satu sama lain, maka kedua orang ini bersama-sama dengan O_1 membentuk sebuah kelompok yang terdiri atas tiga orang yang saling merupakan teman satu sama lain. Jika tidak demikian halnya, maka O_2, O_3, dan O_4 membentuk sebuah kelompok yang saling merupakan musuh satu sama lain. Pembuktian kasus kedua dapat dibuktikan dengan cara yang serupa.