Ringkasan Materi Kuliah

PERSAMAAN DIFERENSIAL LINEAR

1. Pendahuluan

Bentuk umum persamaan diferensial linear orde n adalah

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \qquad (1)$$

dengan koefisien-koefisien $a_n(x), a_{n-1}(x), ..., a_0(x)$ dan $f(x)$ merupakan fungsi-fungsi yang kontinu pada selang I dan $a_n(x) \neq 0$ untuk setiap $x \in I$. Selang I disebut *selang definisi* (selang asal) *dari persamaan diferensial* itu. Jika fungsi $f(x)$ = 0, maka (1) disebut persamaan *homogen* dan jika $f(x) \neq 0$, maka (1) disebut persamaan *tak homogen*. Jika $a_n(x), a_{n-1}(x), ..., a_0(x)$ fungsi konstan, maka (1) disebut persamaan diferensial linear dengan *koefisien konstanta*. Berikut ini adalah contoh-contoh persamaan diferensial linear :

$$xy' - 2y = x^3, \; x \neq 0 \qquad (2)$$

$$y'' + 2y' + 3y = \cos x \qquad (3)$$

$$y^{(4)} - y = 0 \qquad (4)$$

Dan yang berikut ini adalah persamaan-persamaan diferensial taklinear:

$$y'' + y^2 = \sin x$$

$$y''' + yy' = x$$

$$y'' + \sin y = 0.$$

2. Bebas Linear dan Wronski

Berapa banyak penyelesaian suatu persamaan diferensial linear ?

Definisi 1.

Himpunan fungsi-fungsi f_1, f_2, ..., f_m, masing-masing terdefinisi dan kontnu pada selang $a \le x \le b$, dikatakan tergantung linear pada $a \le x \le b$, jika ada konstanta-konstanta $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$, tidak semuanya bersama-sama dengan nol, sehingga

$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + ... + \alpha_m f_m = 0$$

untuk setiap x dalam selang $a \le x \le b$. *Dalam hal lain, fungsi-fungsi itu disebut bebas linear dalam selang itu.*

Definisi 2

Misalkan $f_1, f_2, ..., f_n$, *n buah fungsi-fungsi yang semuanya dan turunan-turunanya sampai dengan turunan ke n-1 kontinu pada selang* $a \le x \le b$. *Wronski dari* $f_1, f_2, ..., f_n$, *dihitung pada x, dinyatakan oleh* $W(f_1, f_2, ..., f_n; x)$ *dan ditentukan sebagai determinan*

$$W(f_1, f_2, \ldots, f_n; x) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ f_1'' & f_2'' & \cdots & f_n'' \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-2)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Tiap fungsi yang muncul dalam determinan ini dihitung pada x.

Contoh

Diketahui $f_1(x) = x^2,\ f_2(x) = \cos x$, cari $W(f_1, f_2; x)$

Penyelesaian Dari definisi 2 dan fungsi-fungsi yang diketahui, kita hitung

$$W(x^2, \cos x; x) = \begin{vmatrix} x^2 & \cos x \\ 2x & -\sin x \end{vmatrix} = -x^2 \sin x - 2x \cos x.$$

Teorema 1

Jika setiap fungsi $y_1, y_2, ..., y_m$ *merupakan penyelesaian-penyelesaian persamaan diferensial homogen yang sama,*

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0,$$

maka untuk setiap pilihan konstanta-konstanta $c_1, c_2, ..., c_m$,, *kombinasi linear*

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + ... + c_m y_m$$

merupakan suatu penyelesaian juga.

Teorema 2

$y_1, y_2, ..., y_n$ *merupakan n buah penyelesaian persamaan diferensial orde-n,*

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

yang didefinisika n pada selang $a \le x \le b$, *bebas linear jika dan hanya jika* $W(y_1, y_2, ..., y_n; x) \ne 0$ *untuk setiap x dalam selang* $a \le x \le b$.

Sebagai contoh y_1 (x) = cos x dan y_2 (x) =sin x merupakan penyelesaian persamaan diferensial $y'' + y = 0$ yang bebas linear, karena Wronskinya

$$\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

tidak pernah nol. Juga e^x dan e^{-x} merupakan penyelesaian persamaan diferensial $y'' - y = 0$ yang bebas linear, karena Wronskinya

$$\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -e^0 - e^0 = -2$$

tidak pernah nol.

Teorema 3

Jika $y_1, y_2, ..., y_n$ *merupakan penyelesaian-penyelesaian persamaan diferensial*

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0,$$

dimana tiap $a_i(x)$ *didefinisikan dan kontinu pada* $a \le x \le b$ *dan* $a_n(x) \ne 0$ *pada* $a \le x \le b$, *maka baik* $W(y_1, y_2, ..., y_n; x)$ *identik nol pada* $a \le x \le b$ *atau* $W(y_1, y_2, ..., y_n; x)$ *tidak pernah nol pada* $a \le x \le b$.

Definisi 3

Misalkan bahwa $y_1, y_2, ..., y_n$ *merupakan n buah penyelesaian persamaan diferensial*

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0.$$

Misalkan juga bahwa fungsi-fungsi itu bebas linear pada selang definisi persamaan diferensial ini. Kita katakan bahwa fungsi-fungsi itu membentuk *himpunan fundamental (atau sistem fundamental) penyeledaian persamaan diferensial tersebut.*

Sebagai contoh, fungsi cos *x* dan sin *x* merupakan suatu himpunan fundamental penyelesaian persamaan diferensial $y'' + y = 0$. Juga fungsi e^{x} dan e^{-x} membentuk suatu himpunan fundamental penyelesaian persamaan diferensial $y'' - y = 0$.

Jika $y_1, y_2, ..., y_n$ membentuk himpunan fundamental penyelesaian persamaan diferensial linear homogen orde-*n*, maka

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + ... + c_n y_n,$$

dengan $c_1, c_2, ..., c_n$ konstanta-konstanta sebarang, merupakan penyelesaian persamaan diferensial tersebut.

Teorema 4

Jika f merupakan suatu fungsi bernilai real yang didefinisikan pada garis real R dan jika ada suatu bilangan bulat positif n sehingga f mempunyai 2n buah turunan-turunan yang kontinu pada R dan $W(f, f', ..., f^{(n)}) = 0$ *pada R, maka f merupakan suatu penyelesaian persamaan diferensial linear homogen orde-n dengan koefisien konstanta yang tidak semuanya nol.*

Teorema 5

Jika $y_1, y_2, ..., y_n$ *membentuk suatu himpunan fundamental penyelesaian-penyelesaian untuk Persamaan (3), dan diketahui y suatu penyelesaian lain, yang memenuhi syarat awal* $y(x_0) = \beta_0,\ y'(x_0) = \beta_1, ..., y^{(n-1)}(x_0) = \beta_{n-1}$, *maka ada konstanta* $c_1, c_2, ..., c_n$ *yang tunggal sehingga*

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + ... + c_n y_n.$$

4. Persamaan Diferensial Homogen dengan Koefisien Konstanta

Persamaan Karakteristik

Bentuk umum persamaan diferensial linear homogen dengan koefisien konstanta, adalah

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y = 0, \qquad (1)$$

Dengan koefisien a_i konstanta dan $a_n \neq 0$. Untuk mencari penyelesaian umum dari Persamaan (1), kita perlu mencari *n* buah penyelesaia yang bebas linear.

Definisi 1

Polinom $f(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_1\lambda + a_0$ *disebut polinom karakteristik untuk Persamaan (1) dan persamaan* $f(\lambda) = 0$ *disebut persamaan karakteristik untuk Persamaan (1). Akar-akar persamaan karakteristik itu disebut akar-akar karakteristik.*

.

Akibatnya, masalah penyelesaian persamaan diferensial linear homogen dengan koefisien konstanta, dapat diubah menjadi masalah pencarian akar persamaan karaketristik untuk persamaan diferensial itu. Polinom karakteristik tersebut berderajat *n* dan *teorema dasar dari aljabar mengatakan* bahwa setiap polinom berderajat $n(n \geq 1)$ mempunyai paling sedikit satu akar dan, karena itu, banyaknya akar-akar yang sama memberikan tepat *n* buah akar-akar. Tetapi, tentu saja jika *n* besar, yaitu bila $n \geq 5$, masalah pencarian akar-akar persamaan karaketristik bisa jadi sangat tidak mungkin. Beberapa metode dasar untuk mencari akar-akar persamaan polinom diberikan di Apendiks C.

Contoh 1

Selesaikan persamaan diferensial $y'' - y = 0.$

Penyelesaian

Ambil $y = e^{\lambda x}$, maka (karena $a_2 = 1,\ a_1 = 0,\ a_0 = -1)\lambda$ harus memenuhi persamaan karakteristik

$$\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow (\lambda + 1)(\lambda - 1) = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1.$$

Kita mempunyai dua penyelesaian $y_1 = e^x$ dan $y_2 = e^{-x}$. Kedua penyelesaian ini adalah bebas linear, karena Wronskinya bernilai $-2 (\neq 0)$. Jadi, setiap penyelesaian y dari persamaan diferensial ini berbentuk

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x},$$

Dimana c_1 dan c_2 merupakan konstanta-konstanta sebarang.

5. Persamaan Diferensial Homogen dengan Koefisien Konstanta

Penyelesaian Umum

masalah dasarnya ialah mencari suatu himpunan fundamental penyelesaian-penyelesaian. Persamaan diferensial linear homogen dengan koefisien konstanta akan mempunyai penyelesaian berbentuk $e^{\lambda x}$ asalkan bahwa λ merupakan sebuah akar persamaan karakteristik yang berhubungan dengan persamaan diferensial itu.

Teorema 1

Jika semua akar-akar persamaan karakteristik berlainan, katakan $\lambda = \lambda_i, i = 1, 2, ..., n,$ *maka n buah fungsi-fungsi* $y_1 = e^{\lambda_i x}, i = 1, 2, ..., n,$ *membentuk sebuah himpunan penyelesaian.*

Teorema 2

Jika $\lambda = \lambda_i$ *sebuah akar berganda m dari persamaan karakteristik yang sesuai dengan persamaan diferensial* $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y = 0,$ *maka ada m buah penyelesaian yang bebas linear yang sesuai dengan* $\lambda = \lambda_i$. *Penyelesaian-penyelesaian ini adalah sebagai berikut :* $e^{\lambda_i x}, xe^{\lambda_i x}, x^2 e^{\lambda_i x}, ..., x^{m-1} e^{\lambda_i x}.$

Akibat 1

Perhatikan persamaan diferensial dengan koefisien riil

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0,\ a_2 \neq 0. \qquad (3)$$

Andaikan bahwa λ_1 *dan* λ_2 *adalah akar-akar persamaan karakteristik* $a_2\lambda^2 + a_1\lambda = a_0 = 0$. *Maka bentuk penyelesaian umum y(x)dari Persamaan (3) digambarkan oleh kasus berikut :*

KASUS 1 <u>*Akar-akar riil dan berlainan*</u> $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x},$$

Dengan c_1 *dan* c_2 *konstanta sebarang.*

KASUS 2 <u>*Akar-akar sama*</u> $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

$$y(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}$$

KASUS 3 <u>*Akar-akar kompleks sekawan*</u> $\lambda_{1,2} = k \pm il.$

$$y(x) = c_1 e^{kx} \cos \ell x + c_2 e^{kx} \sin \ell x.$$

6. Persamaan Diferensial Tak Homogen.

Bentuk umum persamaan diferensial linear tak homogen adalah

$$a_n(x) y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + ... + a_1(x) y' + a_0(x) y = f(x) \qquad (1)$$

atau, $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i(x) y^{(i)} = f(x).$ (2)

Fungsi *f* disebut *suku tak homogen* untuk persamaan diferensial (1).

Definisi 1

Dengan setiap persamaan diferensial tak homogen 92), ada satu pautan persamaan diferensial homogen yang ditentukan oleh

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(x) y^{(i)} = 0. \qquad (3)$$

Definisi 2

Jika n fungsi-fungsi $y_1, y_2, ..., y_n$ *membentuk sistem fundamental penyelesaian untuk persamaan diferensial homogen (3), maka fungsi* y_h *yang ditentukan oleh*

$$y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2 + ... + c_n y_n, \qquad (4)$$

di mana c_i *konstanta sebarang, disebut penyelesaian homogen untuk Persamaan 92). [*Ingat bahwa penyelesaian homogen bukan penyelesaian sebenarnya dari Persamaan (2). Ini adalah penyelesaian umum dari persamaan diferensials homogen pautan. Dalam beberapa buku penyelesaian homogen dikatakan sebagai *penyelesaian pelengkap*].

Contoh 1

Cari penyelesaian homogen dari persamaan diferensial

$$y'' - 3y' + 2y = \cos x. \qquad (5)$$

Penyelesaian

Persamaan diferensial homogen yang berpautan dengan persamaan diferensial (5) ialah

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

Dengan menggunakan metode dari Bagian 2.5, penyelesaian umum dari persamaan ini adalah $c_1 e^x + c_2 e^{2x}$. Jadi, penyelesaian homogen dari persamaan diferensial (5) adalah

$$y_h = c_1 e^x + c_2 e^{2x}.$$

Contoh 2 Cari penyelesaian homogen dari persamaan diferensial

$$2x^2 y'' - 3xy' - 3y = e^x, \; x > 0. \qquad (6)$$

Penyelesaian Persamaan homogen yang berpautan dengan persamaan diferensial (6) adalah

$$2x^2 y'' - 3xy' - 3y = 0.$$

Persamaan diferensial terakhir ini adalah persamaan diferensial Euler, dan penyelesaiannya (diberikan dalam Contoh 2 dari Bagian 2.7) berbentuk $c_1 x^{-1/2} + c_2 x^3$. Jadi,

$$y_h = c_1 x^{-1/2} + c_2 x^3.$$

Jika, dengan cara apapun, kita mendapatkan suatu fungsi yang memenuhi Persamaan (2), kita katakan fungsi itu sebagai *fungsi khusus* dari Persamaan (2) dan dinyatakan oleh *yp*.

Teorema 1

Jika $y_1, y_2, ..., y_n$ *membentuk sistem fundamental penyelesaian untuk Persamaan 93), dan jika yp suatu penyelesaian khusus dari Persamaan (2), maka penyelesaian umum dari Persamaan (2) dapat ditulis dalam bentuk*

$$y = y_h + y_p = c_1 y_1 + c_2 y_2 + ... + c_n y_n + y_p. \qquad (7)$$

7. Metode Koefisien Taktertentu

Metode koefisien taktertentu digunakan jika kita ingin menghitung suatu penyelesaian khusus dari persamaan diferensial takhomogen.

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y = f(x) \qquad (1)$$

di mana koefisien-koefisien $a_0, a_1, ... a_n$ merupakan konstanta-konstanra dan $f(x)$ adalah kombinasi linear dari fungsi-fungsi dengan tipe berikut :

1. x^α dengan α bilangan bulat positif atau nol
2. $e^{\beta x}$, dimana β merupakan konstanta taknol
3. $\cos \gamma x$, dengan γ konstanta taknol
4. $\sin \delta x$, dengan δ konstanta taknol
5. Suatu (berhingga) perkalian antara dua fungsi atau lebih dari tipe 1-4.

Sebagai contoh, fungsi

$$f(x) = 3x^2 - 2 + 5e^{3x} - x(\sin x)e^{2x} + 5\cos 2x + xe^x$$

Merupakan kombinasi linear dari fungsi-fungsi dari tipe 1 – 5.

Contoh 1

Cari penyelesaian khusus persamaan diferensial

$$y'' - y = -2x^2 + 5 + 2e^x. \qquad (2)$$

Penyelesaian

Metode koefisien tak tertentu dapat diterapkan pada contoh ini, karena persamaan diferensial (2) termasuk bentuk Persamaan (1), dan $f(x) = -2x^2 + 5 + 2e^x$ merupakan kombinasi linear dari fungsi-fungsi x^2, 1, dan e^x (yang masing-masing termasuk tipe 1, 1, dan 2). Mula-mula kita cari fungsi-fungsi yang merentang turunan dari tiap-tiap suku dari fungsi f itu. Dari catatan kita terdahulu, kita punyai

$$-2x^2 \to \{x^2, x, 1\} \qquad (3)$$

$$5 \to \{1\} \qquad (4)$$

$$2e^x \to \{e^x\}. \qquad (5)$$

Karena itu, turunan dari f direntangkan oleh fungsi anggota himpunan $\{x^2, x, 1\}$ dan $\{e^x\}$. Himpunan [1] dan [4] diabaikan karena sudah termasuk di dalam himpunan (3) yang lebih besar. Sekarang jika *tak satupun* dari anggota himpunan $\{x^2, x, 1\}$ dan $\{e^x\}$ merupakan penyelesaian dari pautan persamaan diferensial (2), yaitu, $y'' - y = 0$, maka penyelesaian khusus Persamaan (2) berbentuk

$$y_p = Ax^2 + Bx + C + De^x,$$

di mana A, B, C dan D koefisien-koefisien yang taktertentu. Sebaliknya, jika *salah satu* fungsi dalam salah satu himpunan $\{x^2, x, 1\}$ dan $\{e^x\}$ merupakan penyelesaian dari pautan persamaan homogen, maka semua unsur himpunan itu harus dilakilan oleh x dengan pangkat bilangan bulat positif terkecil, demikian pautan persamaan homogen. Jelaslah, tidak ada fungsi anggota himpunan $\{x^2, x, 1\}$ merupakan suatu penyelesaian dari $y'' - y = 0,$ dan karena itu kita biarkan himpunan itu seperti apa adanya. Sebaliknya, e^x anggota himpunan $\{e^x\}$ adalah sebuah penyelesaian dari $y'' - y = 0,$ dan karena itu, kita harus mengalikan fungsi di dalam himpunan ini oleh x berpangkat bilangan bulat positif terkecil, sehingga hasil perkalian itu bukan fungsi yang merupakan penyelesaian $y'' - y = 0$. Karena e^x penyelesaian, tetapi xe^x bukan penyelesaian dari $y'' - y = 0,$ kita harus mengalikan e^x oleh x, *untuk memperoleh* $\{xe^x\}$. Jadi, suatu penyelesaian khusus dari Persamaan (2) merupakan kombinasi linear dari fungsi-fungsi anggota himpunan $\{x^2, x, 1\}$ dan $\{e^x\}$. Jadi

$$y_p = Ax^2 + Bx + C + Dxe^x. \tag{6}$$

Untuk memperoleh koefisien tak tertentu *A, B, C,* dan *D,* kita hitung

$$y'_p = 2Ax + B + De^x + Dxe^x$$
$$y''_p = 2A + 2De^x + Dxe^x$$

dan substitusikan hasil-hasil ini ke dalam persamaan diferensial (2), menghasilkan

$$\left(2A + 2De^x + Dxe^x\right) - \left(Ax^2 + Bx + C + Dxe^x\right) = -2x^2 + 5 + 2e^x.$$

Dengan menyamakan suku yang serupa, kita peroleh sistem persamaan berikut :

$$2A - C = 5$$
$$2D = 2$$
$$-B = 0$$
$$-A = -2.$$

Jadi, A = 2, B = 0, C = -1, D = -1, dan penyelesaian khusus Persamaan (2) berbentuk

$$y_p = 2x^2 - 1 + xe^x.$$

Segi yang terpenting dari metode koefisien tak tertentu adalah bahwa kita memisalkan bentuk yang layak untuk suatu penyelesaian khusus (seperti xe^x sebagai pengganti e^x dalam Contoh 1). Seandainya kita memisalkan bentuk yang tak layak untuk suatu penyelesaian khusus, akan timbul pertentangan dalam hasil sistem persamaan, pada waktu kita berusaha menghitung koefisien tak tertentu. Kemungkinan lain, bisa terjadi bahwa koefisien dari suku yang tak berguna akan didapat sama dengan nol.

Untuk menghemat tempat, kita anjurkan agar penjelasan yang menuntun kita ke bentuk (6) untuk suatu penyelesaian khusus dari Persamaan (2) disingkat sesuai dengan susunan sebagai berikut :

$$
\begin{aligned}
&-2x^2 \rightarrow \{x^2, x, 1\} \\
&5 \rightarrow \{1\} \\
&2e^x \rightarrow \{e^x\} \rightarrow \{xe^x\}
\end{aligned}
$$

(e^x adalah penyelesaian dari pautan persamaan homogen dan xe^x bukan penyelesaian). Jadi,

$$y_p = Ax^2 + Bx + C + Dxe^x$$

Merupakan bentuk penyelesaian yang tepat dari penyelesaian khusus Persamaan (2).

8. Variasi Parameter

Seperti metode koefisien taktertentu, metode variasi parameter, digunakan untuk mencari penyelesaian khusus persamaan diferensial takhomogen

$$a_n(x)\, y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = f(x). \qquad (1)$$

Dengan fungsi *f(x)* brbentuk x^{α} , $e^{\beta x}$, $\cos \gamma x$, $\sin \delta x$, atau kombinasinya.

Teorema 1

Jika $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *membentuk himpunan penyelesaian fundamental untuk Persamaan (2), dan jika fungsi-fungsi* $u_1, u_2, \ldots, u_n$ *memenuhi sistem persamaan*

$$
\begin{aligned}
&y_1 u_1' + y_2 u_2' + \ldots + y_n u_n' = 0, \\
&y_1' u_1' + y_2' u_2' + \ldots + y_n' u_n' = 0, \\
&y_1'' u_1' + y_2'' u_2' + \ldots + y_n'' u_n' = 0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad\qquad\qquad (3) \\
&y_1^{(n-2)} u_1' + y_2^{(n-2)} u_2' + \ldots + y_n^{(n-2)} u_n' = 0, \\
&y_1^{(n-1)} u_1' + y_2^{(n-1)} u_2' + \ldots + y_n^{(n-1)} u_n' = \frac{f(x)}{a_n(x)},
\end{aligned}
$$

Maka $y = u_1 y_1 + u_2 y_2 + \ldots + u_n y_n$ *merupakan penyelesaian khusus Persamaan (1).*

Contoh 1

Selesaikan persamaan diferensial

$$y'' + y = \csc x.$$

Penyelesaian

Penyelesaian homogen berbentuk $y_h = c_1 \sin x + c_2 \cos x$. Fungsi-fungsi u_1 dan u_2 ditentkan dari sistem persamaan [lihat Persamaan (4)].

$$\begin{aligned} &\sin x u_1' + \cos x u_2' = 0 \\ &\cos x u_1' - \sin x u_2' = \csc x. \end{aligned}$$

Jadi,

$$\begin{aligned} &u_1' = \cos x \csc x \Rightarrow u_1 = \ln|\sin x| \\ &u_2' = -1 \qquad\quad \Rightarrow u_2 = -x. \end{aligned}$$

Maka diperolehlah $y_p = [\ln|\sin x|]\sin x + (-x)\cos x$, dan bentuk penyelesaian umumnya

$$y = y_h + y_p = [c_1 + \ln|\sin x|]\sin x + (c_2 - x)\cos x.$$

Teorema 2

Misalkan bahwa $y_1, y_2, ..., y_n$ *membentuk sebuah himpunan fundamental penyelesaian untuk persamaan*

$$a_n(x) y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + ... + a_1(x) y' + a_0(x) y = 0$$

Maka suatu penyelesaian khusus persamaan

$$a_n(x) y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + ... + a_1(x) y' + a_0(x) y = f(x)$$

Diberikan oleh

$$y_p(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k(x) \int_{x_0}^{x} \frac{W_k(y_1,..., y_n; s) f(s)}{W(y_1,..., y_n; s) a_n(s)} ds$$

Dimana $W(y_1,..., y_n; s)$ adalah Wronski dari $y_1,..., y_n$ dihitung pada s dan $W_k(y_1,..., y_n; s)$ adalah determinan yang diperoleh dari $W(y_1,..., y_n; s)$ dengan mengganti kolom k oleh (0, 0, ..., 0, 1). Selanjutnya $y_p(x_0) = y_p'(x_0) = 0$.

Sumber Bacaan:

Santoso, Widiarti. (1998). *Persamaan Diferensial Biasa Dengan Penerapan Modern edisi 2*. Jakarta: Erlangga