JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA
FPMIPA-UPI BANDUNG

HAND OUT
TURUNAN DAN DIFERENSIASI
OLEH: FIRDAUS-UPI 0716

1. GARIS SINGGUNG

1.1 Definisi

Misalkan fungsi f kontinu di c. Garis singgung (tangent line) pada kurva f di titik P(c,f(c)) adalah

(i). garis melalui P dengan kemiringan atau gradien m(c) yang diberikann oleh

m(c) = $\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$ jika limit ini ada.

(ii). garis x = c, jika

$\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$ = + ∞ atau $\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$ = - ∞

1.2 Contoh

Tentukan persamaan garis singgung pada kurva y = x^2 + 3 yang sejajar dengan garis 8x – y + 3 = 0

2. TURUNAN

2.1 Definisi

Turunan fungsi f adalah fungsi yang nilainya di setiap bilangan sebarang c di dalam D_f diberikan oleh

$$f'(c) = \lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

Bila peran c+h di ganti dengan x atau x = c + h, maka bentuk di atas dapat dituliskan

$$f'(c) = \lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

2.2 Notasi Turunan

(i). Lambang f’ untuk menyatakan turunan dikenalkan oleh matematikawan Perancis Joseph Louis Lagrange. f’(x) adalah nilai turunan fungsi disebarang titik x.

(ii). Bila (x,y) suatu titik pada kurva f, maka y = f(x) dan y’ = f’(x)

(iii). $\frac{dy}{dx}$ sebagai notasi turunan pertama dikenalkan oleh matematikawan Jerman Gottfried Wilhelm Leibniz dan bersamaan dengan Sir Isaac Newton.

2.3 Contoh

Tentukan f’(x) bila f(x) = $\frac{2x-3}{4-x}$

3. KETERDIFERENSIALAN DAN KEKONTINUAN

3.1 Teorema

Jika fungsi f terdiferensialkan di c, maka f kontinu di c

3.2 Pertanyaan

(i). Bila f tidak terdiferensialkan di c atau f'(c) tidak ada, apakah f kontinu di c ?

(ii). Bila f tak kontinu di c, apakah f'(c) ada ?

(iii). Bila f kontinu apakah f terdiferensialkan di c ?

3.3 Definisi (turunan kanan)

Jika fungsi f terdefinisi di c, maka turunan kanan dari f di c adalah

$$f'_{+}(c) = \lim_{x \to c^{+}} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \text{ , jika limit ini ada}$$

3.3 Definisi (turunan kiri)

Jika fungsi f terdefinisi di c, maka turunan kanan dari f di c adalah

$$f'_{-}(c) = \lim_{x \to c^{-}} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \text{ , jika limit ini ada}$$

3.4 Teorema

Fungsi f terdiferensialkan di c jika dan hanya jika $f'_{+} = f'_{-}$

3.5 CONTOH

Diketahui f(x) = $|4 - x^2|$

(i). Apakah f kontinu di 2 dan di -2

(ii). Apakah f terdiferensiakan di x = 2 dan di x = -2

4. TEOREMA DIFERENSIASI FUNGSI ALJABAR

4.1 Teorema

Jika k suatu konstanta dan f(x) = k untuk semua x, maka f'(x) = 0

4.2 Teorema

Jika n bilangan bulat dan $f(x) = x^n$, maka $f'(x) = nx^{n-1}$

4.3 Teorema

Jika k suatu konstanta dan f(x) = k.g(x) , maka f'(x) = k.g'(x)

4.4 Teorema

Jika f(x) = g(x) + h(x), maka f'(x) = g'(x) + h'(x)

4.5 Teorema

Jika f(x) = g(x) - h(x), maka f'(x) = g'(x) - h'(x)

4.6 Teorema

Jika f(x) = g(x) . h(x), maka f'(x) = g'(x)h(x) +g(x) h'(x)

4.7 Teorema

Jika f(x) = $\frac{g(x)}{h(x)}$, maka f'(x) = $\frac{g'(x).h(x)-g(x).h'(x)}{[h(x)]^2}$

4.8 Contoh

Tentukan turunan pertama dari fungsi berikut;

(i). f(x) = $5x^3 - 3x^2 + x + 4 - 7x^{-3}$

(ii). f(x) = $(4x^2-3x)(5x+4)$

(iii). f(x) = $\frac{4-7x}{3x+9}$

5. GERAK LURUS DAN LAJU PERUBAHAN

5.1 Definisi

Jika f suatu fungsi yang diberikan oleh persamaan s = f(t) dan suatu partikel bergerak sepanjang suatu garis lurus, sehingga s adalah jarak berarah dari suatu titik tetap pada garis pada t satuan waktu, maka kecepatan sesaat partikle pada t satuan waktu adalah v satuan kecepatan, di mana

v = f'(t) **atau** **v =** $\frac{ds}{dt}$ **,** jika ada

5.2 Definisi

Jika y = f(x), maka laju perubahan sesaat dari y tiap satuan perubahan dalam x di c adalah f'(c), atau yang ekuivalen dengan turunan dari y terhadap x di c, jika nilai turunan itu ada di sana.

5.3 Contoh

Sebuah bola dilemparkan vertikal ke atas dengan kecepatan awal 64 km/detik. Jika arah positif jarak dari titik awal dipilih keatas, persamaan gerak adalah s = $-16t^2 + 64$ t. Tentukan

(i). Kecepatan sesaat pada akhir 1 detik

(ii). Laju bola pada akhir 1 detik dan pada akhir 3 detik.

6. TURUNAN FUNGSI TRIGONOMETRI

6.1 Teorema

f(x) = sin x $\Longrightarrow$ f'(x) = cos x

6.2 Teorema

$f(x) = \cos x \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = -\sin x$

6.3 Teorema

$f(x) = \tan x \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = \sec^2 x$

6.4 Teorema

$f(x) = \cot x \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = -\csc^2 x$

6.5 Teorema

$f(x) = \sec x \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = \sec x \tan x$

6.6 Teorema

$f(x) = \csc x \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = -\csc x \cot x$

7. TURUNAN FUNGSI KOMPOSISI

7.1 Teorema (Aturan rantai)

Jika g adalah fungsi yang terdiferensialkan di x dan f terdiferensialkan di g(x), maka fungsi komposisi f o g terdiferensialkan di x dan $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$.

8. TURUNAN FUNGSI PANGKAT UNTUK EKSPONEN RASIONAL

8.1 Teorema

Bila $f(x) = x^r$, di mana r adalah bilangan rasional, maka $f'(x) = rx^{r-1}$

9. DIFERENSIASI IMPLISIT

9.1 Ilustrasi

(i).Tentukan $y' = dy/dx$ dari $x \sin y + y \cos x = 1$

(ii). Tentukan dy/dx dari $x^2y^3 = x^4 - y^4$

10. TURUNAN TINGKAT TINGGI

Turunan tingkat adalah turunan kedua, ketiga dst

Turunan kedua adalah turunan pertama dari turunan pertama.

Turunan ketiga adalah turunan pertama dari turunan kedua

Contoh:

Tunjukkan $d^2y/dx^2 = -2x/y^5$, bila $x^3 + y^3 = 1$

11. DIFERENSIAL

11.1 Definisi

Jika $y = f(x)$, maka diferensial dari y adalah $dy = f'(x)\, \Delta x$, dengan x di dalam daerah definisi f' sedangkan Δx adalah pertambahan sebarang dari x.

11.2 Definisi

Jika $y = f(x)$, maka diferensial dari x adalah $dx = \Delta x$, dengan x di dalam daerah definisi f' sedangkan Δx adalah pertambahan sebarang dari x.

11.3 Teorema

Jika $y = f(x)$, maka $dy = f'(x)\, dx$, bila $f'(x)$ ada