# HAND OUT PERKULIAHAN

# MATEMATIKA DASAR

3 SKS

SEMESTER GANJIL

PROGRAM STUDI

BIOLOGI ( DIK DAN NON DIK )

OLEH

DRS. H. FIRDAUS. M.Pd

UPI 0716

JURUSAN PENDIDIKAN BIOLOGI – FPMIPA

UNIVERSITAS PENDIDIKAN INDONESIA

2009

**DESKRIPSI MATA KULIAH**

Materi Mata Kuliah Matematika Dasar merupakan penajaman dari materi matematika di SMA/MA pada umumnya, sehingga penalaran mahasiswa peserta perkuliahan ini lebih baik dan mampu berpikir logis. Selama satu semester 14 sesi pertemuan 3 sks mahasiswa memperoleh layanan pembelajaran dari dosen dengan sajian materi; Aljabar Himpunan yang terdiri dari sifat operasi himpunan, prinsip dualitas dan partisi; Fungsi aljabar yang terdiri dari relasi dan fungsi, fungsi kmoposisi , fungsi invers; Logika Matematika terdiri dari pernyataan dan ingkaran pernyataan, pernyataan majemuk, pernyataan ekuivalen, konvers, invers dan kontraposisi, penarikan kesimpulan, pernyataan berkuantor dan ingkarannya.

**KOMPETENSI PERKULIAHAN**

Menggunakan operasi dan sifat serta manipulasi dalam pemecahan masalah yang berkaitan dengan bentuk aljabar himpunan; Menggunakan operasi dan sifat serta manipulasi dalam pemecahan masalah yang berkaitan dengan bentuk logika matematika; Menggunakan nilai kebenaran pernyataan majemuk dan implikasi dalam pemecahan masalah; Menggunakan sifat dan prinsip logika untuk penarikan kesimpulan dan pembuktian sifat matematika: Menggunakan oprasi dan manipulasi aljabar dalam pemecahan masalah yang berkaitan dengan fungsi komposisi dan fungsi invers; Menggunakan konsep, sifat dan aturan fungsi komposisi dalampemecahan masalah; Menggunakan konsep, sifat dan aturan fungsi invers dalam pemecahan masalah.

# HIMPUNAN

**PENGERTIAN**

Himpunan adalah kumpulan obyek yang terdefinisi dengan jelas.
Himpunan tumbuhan dikotil
Himpunan ikan bernafas dengan paru-paru
Himpunan tumbuhan monokotil berakar tunggang
Himpunan kucing bermata indah ???

**ANGGOTA HIMPUNAN**

Obyek pembentuk himpunan disebut anggota atau elemen himpunan.
Rambutan adalah anggota himpunan tumbuhan dikotil.
Pepaya bukan anggota himpuan tumbuhan dikotil.

**NOTASI DAN LAMBANG**

Himpunan dinyatakan dengan huruf kapital, misalnya A, B dsb, dan dinyatakan diantara kurung kurawal.
A = {1,3,5,7,...} = { bilangan bulat negatif positif } = { x/x adalah bilangan bulat negatif positif }.
B = { duku, rambutan, mangga,...} = { buah-buahan berbiji belah } = .....
1 anggota dari A ditulis $1 \in A$
2 bukan anggota dari A ditulis $2 \notin A$
Kacang tanah $\notin B$

**JENIS-JENIS HIMPUNAN**

**Himpunan Semesta** adalah adalah mengandung semua anggota himpunan yang dibicarakan dan dinotasikan dengan S.

**Himpunan Kosong** adalah himpunan yang tidak mempunyai anggota dinotasikan { } = ∅
Himpunan Bilangan genap yang tidak habis dibagi 2.

**Himpunan Terhingga** adalah himpunan yang banyak anggotanya terhingga
A = { kucing, kambing, trenggiling, anjing }
B = { x/x bilangan asli kurang dari 7 }

**Himpunan Tak Terhingga** adalah himpunan yang banyak anggotanya tak terhingga.
A = { 1,2,3, .... }
B = {x/x < 0, x bilangan genap }.

**BILANGAN KARDINAL**

Bilangan Kardinal dari suatu himpunan adalah bilangan yang menyatakan banyaknya anggota himpunan tersebut dengan notasi n,
A = { 2,5,7,11 }, n(A) = 4

**HIMPUNAN EKUIVALEN**
A dikatakan ekuivalen dengan B bila n(A) = n(B)

**HIMPUNAN BAGIAN**
A adalah himpunan bagian dari B, bila setiap anggota A adalah anggota B, ditulis $A \subseteq B$ atau dibaca A adalah subset dari B
A subset murni dari B, bila setiap anggota adalah anggota B dan ada anggota B bukan anggota A, ditulis $A \subset B$
Banyaknya himpunan bagian dari A, bila n(A) maka banyaknya himpunan bagian dari A adalah $2^n$

**HIMPUNAN SAMA**
A dan B dua himpunan sama bila setiap anggota A adalah anggota B dan setiap anggota B adalah anggota A. A = B jika dan hanya jika $A \subset B$ dan $B \subset A$

**HIMPUNAN KUASA**
Himpunan Kuasa dari A ditulis P(A) adalah himpunan semua himpunan bagian dari A.
Bila n(A) = k maka $n(P(A)) = 2^k$

**OPERASI PADA HIMPUNAN**

**HIMPUNAN SALING LEPAS ( DISJOINT )**
Misalkan A dan B dua himpunan yang tidak kosong, bila anggota himpunan A bukan anggota B dan anggota B bukan anggota A, maka Adan B dikatakan saling lepas.

A = { x,y,z } dan B = { p,q,r }

**IRISAN = INTERSEKSI**
Irisan A dan B dituliskan $A \cap B$ adalah himpunan yang anggotanya merupakan anggota himpunan A dan juga anggota himpunan B

$$A \cap B = \{ x / x \in A \text{ dan } x \in B \}$$

**Sifat-sifat Irisan**
1. $A \cap B = B \cap A$
2. $A \cap S = A$
3. $A \cap \emptyset = \emptyset$
4. $(A \cap B) \subset A$ dan $(A \cap B) \subset B$
5. Jika A dan B saling lepas, maka $A \cap B = \emptyset$

**Gabungan = union**
Gabungan A dan B ditulis $A \cup B$ adalah himpunan yang anggotanya merupakan anggota himpunan A atau anggota himpunan B

$$A \cup B = \{ x / x \in A \text{ atau } x \in B \}$$

**Sifat – sifat Gabungan**

1. $A \cup B = B \cup A$
2. $A \cup S = S$
3. $A \cup \emptyset = A$
4. $A \subset (A \cup B)$ dan $B \subset (A \cup B)$

**Sifat-sifat Gabungan dan Irisan**

1. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
2. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
3. $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

**SELISIH**

Selisih dua himpunan A dan B ditulis A – B adalah himpunan yang anggotanya adalah anggota A tetapi bukan anggota B

$$A - B = \{ x / x \in A \text{ dan } x \notin B \}$$

A = { 1, 2, 3, 4 }

B = {x/x bilangan prima kurang dari 11 }

A – B = { 1, 4 }

B - A = { 5, 7 }

**Sifat – sifat Selisih**

1. $(A - B) \subset A$
2. $(A - B) \cap (B - A) = \emptyset$

**K0MPLEMEN**

Misalkan S adalah himpunan semesta, maka $A' = A^C$ adalah komplemen dari himpunan A yaitu himpunan yang anggotanya bukan anggota A dan anggota himpunan semesta A.

$$A^c = \{ x/x \notin A, x \in S \}$$

**Sifat – sifat Komplemen**

1. $A \cup A^C = S$
2. $A \cap A^C = \emptyset$
3. $(A^C)^C = A$
4. $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$
5. $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

# TUGAS MANDIRI

Buktikan

1. Misalkan A subset dari B, maka $A \cap B = A$
2. Misalkan A subset dari B, maka $A \cup B = B$
3. Misalkan A subset dari B, maka $B^C$ subset $A^C$
4. Jika $A \subset B$, maka $A \cup ( B - A ) = B$
5. Jika $A \cup B = \emptyset$, maka $A = \emptyset$ dan $B = \emptyset$

# EVALUASI MANDIRI

Buktikan

1. $( A - B ) \cap B = \emptyset$
2. $( B - A ) \subset A^C$
3. $B - A^C = A \cap B$
4. Jika $A \cap B$, maka $A \subset B^C$
5. $A - B \subset A \cup B$
6. $A \cap B = \emptyset$, maka $B \cap A^C = B$

# FUNGSI

**Definisi:**

Misalkan A dan B dua himpunan yang tidak kosong, sebuah fungsi dari A ke B adalah aturan yang mengkaitkan setiap x anggota A dengan tepat satu y anggota B, dan dinotasikan huruf "kecil", misalnya f, g, h dsb. Dituliskan dengan

$$f : A \rightarrow B$$

f adalah fungsi dari A ke B

f memetakan A ke B

**DAERAH ASAL DAN DAERAH HASIL FUNGSI**

A = daerah asal = Domain = daerah definisi dari f = $D_f$

B = kodomain dari = $C_f$

f memetakan $x \in A$ ke $y = f(x) \in B$

Himpunan $y = f(x) \in B$ merupakan peta dari $x \in A$ disebut daerah hasil f = range f = $R_f$

Contoh

Tentukan daerah definisi dan daerah hasil dari fungsi berikut;

1. $f(x) = 5x - 3$
2. $g(x) = \frac{2x-3}{3x+5}$
3. $h(x) = 3x^2 + 10x - 8$
4. $F(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 35}$
5. $G(x) = \log (2x^2 + 9x - 5)$
6. $H(x) = \frac{\log (x^2-5x)}{\sqrt{2x^2-11x+12}}$

Petunjuk

Untuk menentukan daerah denifisi, anda harus menentukan x sehingga f(x) terdefinisi pada bilangan real atau anda harus menentukan x yang menyebabkan f(x) bukan bilangan real.

Menurut anda adakah x bilangan real sehingga f(x) bukan bilangan real ?

Jadi

1.$D_f = \mathbf{R}$ dan $R_f = \mathbf{R}$

2. $D_g = \{ x / x \neq -\frac{5}{3}, x \in \mathbf{R} \}$ dan $R_g = \{ y / y = f(x) \neq \frac{3}{2}, y \in \mathbf{R} \}$

**KESAMAAN DUA FUNGSI**

Misalkan f dan g dua funsgi yang terdefinisi pada daerah D dan f(x) = g(x) untuk setiap x didaerah D, maka f dan g dikatakan dua fungsi sama dan dituliskan f = g.

Misalkan $f(x) = x^2$ dan $g(t) = t^2$

**FUNGSI SATU- SATU**

Misalkan f adalah fungsi yang memetakan A ke B, f disebut fungsi satu – satu bila setiap anggota B yang berbeda meruapkan peta dari anggota A yang berbeda pula.
$F(x) = 2x + 7$ adalah fungsi satu – satu
$G(x) = x^2 - x$ bukan fungsi satu – satu karena $G(0) = G(1) = 0$

**FUNGSI SURJEKTIF**
Misalkan f adalah fungsi yang memetakan A ke B, f disebut fungsi surjektif atau onto bila setiap y anggota B merupakan peta dari x di A atau $f(A) = B$.

**FUNGSI INJEKTIF**
Misalkan f adalah fungsi yang memetakan A ke B, f disebut fungsi injektif atau into bila setiap x anggota A mempunyai pasangan yang berbeda anggota B.

**FUNGSI BIJEKTIF**
Misalkan f adalah fungsi yang memetakan A ke B, f disebut fungsi bijektif atau berkorespondensi satu-satu bila setiap y anggota B merupakan peta dari x di A dan setiap x anggota A mempunyai pasangan yang berbeda anggota B.
**FUNGSI IDENTITAS**
Misalkan f adalah fungsi yang memetakan A ke A yang didefinsikan $f(x) = x$, f memetakan setiap anggota A ke dirinya sendiri. f disebut fungsi identitas. 1 dipetakan oleh f ke 1, 2 dipetakan oleh f ke 2.

**FUNGSI KONSTAN**
Misalkan f adalah fungsi yang memetakan A ke B, f dikatakan fungsi konstan bila semua anggota A dipetakan oleh ke suatu anggota tertentu pada B.

$$F(x) = k, \quad k \in \mathbf{R}$$

**OPERASI ALJABAR PADA FUNGSI**
Misalkan f dan g dua buah fungsi yang masing-masing terdefinisi pada daerah asalnya $D_f$ dan $D_g$, maka terhadap kedua fungsi ini dapat dilakukan operasi aljabar berikut;

**PENJUMLAHAN**
f + g adalah sebuah fungsi yang terdefinisi pada $D_{f+g} = D_f \cap D_g$ dan $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

**PENGURANGAN**
f - g adalah sebuah fungsi yang terdefinisi pada $D_{f-g} = D_f \cap D_g$ dan $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$

**PERKALIAN**
fg adalah sebuah fungsi yang terdefinisi pada $D_{fg} = D_f \cap D_g$ dan $(fg)(x) = f(x)g(x)$

**PEMBAGIAN**
f/g adalah sebuah fungsi yang terdefinisi pada $D_{f/g} = D_f \cap D_g$ dan $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$, $g(x) \neq 0$

**FUNGSI GENAP DAN FUNGSI GANJIL**

f disebut fungsi Genap bila f(-x) = f(x) untuk setiap $x \in D_f$ dan
f disebut fungsi Ganjil bila f(-x) = - f(x) untuk setiap $x \in D_f$
Grafik fungsi genap simteri terhadap sumbu y, sedang fungsi ganjil grafiknya simetri terhadap titik pangkal O(0,0).

**PERGESERAN GRAFIK FUNGSI**
Misalkan f adalah sebuah fungsi yang terdefinisi di $D_f$ dengan y = f(x).
Grafik fungsi y = f(x-a) + b dengan a > 0 dan b > 0 dapat diperoleh dengan menggeser grafik fungsi y = f(x) ke kanan sejauh a satuan dan ke atas b satuan. Secara umum grafik fungsi y = f(x-a) + b diperoleh dengan menggeser grafik fungsi y = f(x):
i. ke kanan a satuan dan ke atas b satuan bila a > 0 dan b > 0
ii. ke kanan a satuan dan bawah b satuan bila a > 0 dan b < 0
iii. ke kiri a satuan dan keatas b satuan bila, a < 0 dan b > 0
iV. Ke kiri a satuan dan ke bawah b satuan bila a < 0 dan b < 0

Ilustrasi
1. f(x) = √x dan g(x) = $\sqrt{x-3}$ + 2
2. f(x) = $X^2$ dan g(x) = $x^2 - 4x + 7$
3. f(x) = $x^2$ dan g(x) = $x^2 - 10x + 21$

**FUNGSI KOMPOSISI**
Misalkan f adalah fungsi yang terdefinisi pada $D_f$ dan daerah hasil $R_f$. Misalkan g adalah fungsi yang terdefinisi pada $D_g$. Fungsi komposisi f dilanjutkan g ditulis

$$(gof)(x) = g(f(x)) \text{ bila } R_f \cap D_g \neq \emptyset$$

Ilustrasi
1. f(x) = 5x – 6
2. g(x) = $2x^2 - 3x + 1$
3. h(x) = $\frac{2x-3}{4x-7}$
4. F(x) = $\sqrt{3x+4}$
5. G(x) = $\frac{x^2+3x-18}{\sqrt{5-4x}}$
6. H(x) = $\log\frac{3-7x}{\sqrt{5x-8}}$

Tentukan (bila ada) dan tentukan daerah serta daerah hasil dari
1. (fog)(x)
2. (goh)(x)
3. (hoF)(2x)
4. (FoG)(1/x)
5. (GoH) (-3x)

Tentukan f(x) bila diketahui
1. (gof)(x) = 5x – 7 dan g(x) = 4x +7
2. (gof)(x) = $3x^2 + 5x - 1$ dan g(x) = 7 – 4x

3. $(fog)(x) = 6x + 13$ dan $g(x) = 3- 15x$
4. $(fog)(x) = x^2 + 4x - 12$ dan $g(x) = 5x – 3$

**FUNGSI INVERS**

Misalkan $f : D_f \rightarrow R_f$ dengan $y = f(x)$, sedangkan fungsi invers dari f adalah $f^{-1} : R_f \rightarrow D_f$, dengan $x = f^{-1}(y)$ $D_f^{-1} = R_f$.

Apakah setiap fungsi mempunyai invers fungsi ?

Invers dari fungsi f adalah fungsi bila f adalah fungsi satu – satu dan pada.

Aturan dari fungsi invers $f^{-1}$ ditentukan dengan cara menyatakan x dalam y, kemudian x dan y berganti peran. Grafik fungsi f dan inversnya $f^{-1}$ simetri terhadap garis y = x.

Ilustrasi

1. Invers dari fungsi $f(x) = 3x – 5$ ditentukan dengan cara sbb

$f(x) = 3x – 5$

$y = 3x – 5$

selanjutkan nyatakan x dalam y, diperoleh

$x = \frac{y+5}{3}$

$f^{-1}(y) = \frac{y+5}{3}$

$f^{-1}(x) = \frac{x+5}{3}$

2. $g(x) = \frac{2x+5}{3+5x}$

$g^{-1}(x) = ?$

Jawab

$y = \frac{2x+5}{3+5x}$

$y(3 + 5x ) = 2x + 5$

$3y + 5xy = 2x + 5$

$5xy – 2x = 5 – 3y$

$(5y – 2 )x = 5 – 3y$

$x = \frac{5-3y}{5y-2}$

$g^{-1}(y) = \frac{5-3y}{5y-2}$

$g^{-1}(x) = \frac{5-3x}{5x-2}$

## TUGAS MANDIRI

**Tentukan dari setiap fungsi berikut;**

Daerah asal dan daerah definisi dan periksa apakah fungsi injektif, bijektif, surjektif, satu-satu, ganjil dan genap

1. f(x) = 2x – 7
2. g(x) = $x^2$ – 6x -7
3. h(x) = $\frac{2-3x}{5-7x}$
4. F(x) = $\sqrt{5x-4}$
5. G(x) = $\frac{2x^2+7x+5}{\sqrt{5x-9}}$
6. H(x) = log$\frac{3+4x}{\sqrt{5x+4}}$

**Tentukan ( bila ada )dari fungsi di atas**

1. (fog)(x)
2. (goh)(-x)
3. (hoF)(3x)
4. (FoG)(2/x)
5. (GoH) (-3/x)

**Tentukan f(x) bila diketahui**

1. (gof)(x) = 2x – 7 dan g(x) = 4 +7x
2. (gof)(x) = $x^2$ + 2x – 1 dan g(x) = 9 – 3x
3. (fog)(x) = 16x + 3 dan g(x) = 13- 5x
4. (fog)(x) = 2$x^2$ + x - 2 dan g(x) = 15x – 13

**Tentukan fungsi invers dari setiap fungsi berikut;**

1. f(x) = 2 – 7x
2. g(x) = $x^2$ + 6x -7
3. h(x) = $\frac{2+3x}{5+7x}$
4. F(x) = $\sqrt{2x^2+x-21}$

## EVALUASI MANDIRI

**Tentukan dari setiap fungsi berikut;**

Daerah asal dan daerah definisi dan periksa apakah fungsi injektif, bijektif, surjektif, satu-satu, ganjil dan genap

1. f(x) = 25x – 7
2. g(x) = $6x^2$ =13x -5
3. h(x) = $\frac{12+3x}{35-7x}$
4. F(x) = $\sqrt{15x + 4}$
5. G(x) = $\frac{2x^2-7x+15}{\sqrt{15x-10}}$
6. H(x) = log$\frac{3\pm x}{\sqrt{5x+3}}$

**Tentukan ( bila ada )dari fungsi di atas**

1. (fog)(1/x)
2. (goh)(-2x)
3. (hoF)(x)
4. (FoG)(2)
5. (GoH) (-3)

**Tentukan f(x) bila diketahui**

1. (gof)(x) = 12x – 7 dan g(x) = 4 +17x
2. (gof)(x) =2 $x^2$ + 2x – 10 dan g(x) = 9 – 13x
3. (fog)(x) = 6x + 3 dan g(x) = 3- 15x
4. (fog)(x) = $x^2$ +5x - 2 dan g(x) = 5x – 1

**Tentukan fungsi invers dari setiap fungsi berikut;**

1. f(x) = 12 – x
2. g(x) = $2x^2$ + 3x -7
3. h(x) = $\frac{2+13x}{5+17x}$
4. F(x) = $\sqrt{x^2 \; + 5x - 21}$

# LOGIKA

**PENGERTIAN LOGIKA**

Dalam keseharian sering didengar pernyataan bahwa si A berfikir tidak logis atau sebaliknya si B berfikir dengan jernih dan logis. Terkait dengan kelogisan berfikir sesorang ditentukan oleh kemampuan orang tersebut menggunakan nalarnya atau disebut dengan kemampuan penalaran, kemampuan membuat hubungan atau menentukan hubungan suatu hal ( pernyataan )dengan pernyataan yang lain atau dengan banyak pernyataan, berdasarkan aturan-aturan atau hukum yang telah diyakini kebanarannya.

Ranah logika adalah meneliti atau memeriksa apakah suatu cara berfikir atau penalaran sesorang tepat atau tidak tepat, bukan salah atau tidak salah. Untuk pemeriksaaan ini logika memberikan seperangkat peralatan atau kaidah yang dapat menuntun ketepatan suatu penalaran. Penalaran ini dibangun dari pernyataan-pernyataan yang mempunyai nilai kebenaran tertentu, mungkin salah atau mungkin benar tetapi tidak dua-duanya.

**PERNYATAAN**

Bagaimana seseorang memikirkan sesuatu tampak dari konstruksi pernyataan-pernyataan yang disampaikannya. Pernyataan tidak selalu dapat disamakan dengan kalimat secara umum, tidak semua kalimat dikategorikan pernyataan. Pernyataan adalh kalimat matematika tertutup yang memiliki nilai kebenaran benar atau salah dan tidak dua-duanya, biasanya suatu pernyataan dinyatakan dengan huruf kecil, p, q, r,....

Contoh Pernyataan

1. p : Pepaya tumbuhan berclorophyl
2. q : kucing berkembang biak dengan bertelur
3. r : 2 bukan bilangan ganjil

Contoh bukan Pernyataan

1. Bertandukah binatang tersebut ?
2. 2x + 7 = 5x – 22

**NILAI KEBENARAN PERNYATAAN**

Suatu pernytaan hanya memliki nilai kebenaran benar (B) atau salah (S) tidak dua-duanya, nilai kebenaran dari pernyataan p diberi lambang $\tau$(p).

Contoh

1. p : Kuda binatang berkuku ganjil
   $\tau$(p) = B

2. q : Padi adalah  tumbuhan berakar tunggang
$\tau$(q) = S

**NEGASI  = PENYANGKALAN**

Bila p adalah sebuah pernyataan , maka  negasi atau penyangkalan dari p dituliskan dengan $\sim$p. Bila $\tau$(p) = B, maka $\tau\ (\sim p)$ = S

Contoh

r : Tumbuhan dikotil berakar serabut

$\sim$ r : Tidak benar bahwa tumbuhan dikotil berakar serabut

**KONJUNGSI**

Dua pernyataan tunggal dapat digabungkan menjadi pernyataan majemuk dengan menggunakan kata sambung " konjungsi = dan" dilambangkan dengan " $\wedge$"

Contoh

p : Durian tumbuhan berbiji belah

q : Batang tumbuhan berbiji belah memilki lapisan kambium

p $\wedge$ q : Durian tumbuhan berbiji belah dan batangnya memiliki lapisan kambium

s : 5 adalah bilangan genap

t : 6 adalah bilangan genap

s $\wedge$ t : 5 dan 6 adalah bilangan genap

**NILAI KEBANARAN PERNYATAAN KONJUNGSI**

Pernyataan konjungsi p $\wedge$ q bernilai benar bila p dan q keduanya bernilai benar, p $\wedge$ q bernilai salah bila  salah satu bernilai salah atau keduanya bernilai salah.

Nilai kebenaran pernyataan "Kucing binatang berkaki empat dan 9 dalah bilangan prima" adalah SALAH". Padi adalah tumbuhan monokotil atau Kuala Lumpur ibu kota negara Malaysia" adalah pernyataan bernilai BENAR.

**DISJUNGSI**

Dua pernyataan tunggal dapat digabungkan menjadi pernyataan majemuk dengan menggunakan kata sambung " disjungsi = atau" dilambangkan dengan " $\vee$"

Contoh

p : Durian tumbuhan berbiji belah

q : Batang tumbuhan berbiji belah memilki lapisan kambium

p $\vee$ q : Durian tumbuhan berbiji belah atau batangnya memiliki lapisan kambium

s : 5 adalah bilangan genap

t : 6 adalah bilangan genap

s $\vee$ t : 5 atau 6 adalah bilangan genap

**NILAI KEBANARAN PERNYATAAN DISJUNGSI**

Pernyataan disjungsi p $\vee$ q bernilai salah bila p dan q keduanya bernilai salah, p $\vee$ q bernilai benar bila salah satu bernilai benar atau keduanya bernilai.
Nilai kebenaran pernyataan "Kucing binatang bernafas dengan paru- paru atau 5 adalah bilangan prima" adalah BENAR". Padi adalah tumbuhan dikotil atau Kuala Lumpur ibu kota negara Singapura" adalah pernyataan bernilai SALAH.

**IMPLIKASI = KONDISIONAL**

Dua pernyataan tunggal dapat digabungkan menjadi pernyataan majemuk dengan menggunakan kata " jika ............., maka............ , dilambangkan dengan " →"; p → q, dibaca "jika p maka q".

Contoh
p : Durian tumbuhan berbiji belah
q : Batang tumbuhan berbiji belah memilki lapisan kambium
p → q : Jika durian tumbuhan berbiji belah maka batangnya memiliki lapisan kambium

s : 5 adalah bilangan genap
t : 6 adalah bilangan genap
s → t : jika 5 bilangan genap, maka 6 adalah bilangan genap

**NILAI KEBANARAN PERNYATAAN KONDISIONAL**

Pernyataan kondisional p → q bernilai salah bila p bernilai benar sedangkan q bernilai salah, p → q bernilai benar bila p salah dan q benar, atau p benar dan q benar atau p salah dan q salah.
"Jika 4 habis dibagi 2, maka 4 adalah bilangan genap" adalah pernyataan bernilai BENAR.
"Jika ular binatang memamabiak, maka kecoa binatang bernafas dengan insang" adalah pernyataan yang bernilai BENAR.
"Jika Bukittinggi ibu kota propinsi Sumatera Barat, maka Cirebon ibu kota propinsi Jawa Barat" adalah pernyataan BENAR.
"Jika jantung memompakan darah keseluruh tubuh manusia, maka darah berwarna biru" adalah bernyataan bernilai SALAH.

**BIIMPLIKASI = BIKONDISIONAL**

Dua pernyataan tunggal dapat digabungkan menjadi pernyataan majemuk dengan menggunakan kata " .........jika dan hanya jika...... , dilambangkan dengan "↔"; "p jika dan hanya jika q" dituliskan " p ↔ q "

**NILAI KEBANARAN PERNYATAAN BIKONDISIONAL**

Pernyataan bikondisional" p ↔ q " bernilai salah bila p bernilai benar sedangkan q bernilai salah, atau bila p bernilai salah dan q bernilai benar. Dalam kondisi lainnya pernyataan" p ↔ q "
Bernilai benar.
"4 habis dibagi 2 jika dan hanya jika 4 adalah bilangan genap" adalah pernyataan bernilai BENAR.
"Ular adalah binatang memamabiak jika dan hanya jika kecoa binatang bernafas dengan insang" adalah pernyataan yang bernilai BENAR.
"Bukittinggi ibu kota propinsi Sumatera Barat jika dan hanya jika Bandung ibu kota propinsi Jawa Barat" adalah pernyataan SALAH.

"Jantung memompakan darah keseluruh tubuh manusia jika dan hanya jika maka darah berwarna biru" adalah bernyataan bernilai SALAH.

Contoh

p : Durian tumbuhan berbiji belah

q : Batang tumbuhan berbiji belah memilki lapisan kambium

" p $\leftrightarrow$ q " : Durian adalah tumbuhan berbiji belah jika dan hanya jika batangnya memiliki lapisan kambium

s : 5 adalah bilangan genap

t : 6 adalah bilangan genap

s $\leftrightarrow$ t : 5 adalah bilangan genap jika hanya jika 6 adalah bilangan genap.

**TABEL KEBANARAN**

Tabel kebenaran memuat nilai kebenaran dari suatu pernyataan majemuk, yang mungkin terdiri dari dua, tiga atau lebih pernyataan. Bila pernyataan majemuk yang dibentuk memuat dua pernyataan tunggal, maka terdapat 4 kemungkinan nilai kebenaran kedua pernyataan tsb adalah;

i. Pernyataan pertama bernilai benar ( B ) dan pernyataan kedua bernilai benar ( B )

ii. Pernyataan pertama bernilai benar ( B ) dan pernyataan kedua bernilai salah ( S )

iii. Pernyataan pertama bernilai salah ( S ) dan pernyataan kedua bernilai benar ( B )

iv. Pernyataan pertama bernilai salah ( S ) dan pernyataan kedua bernilai salah ( S )

Seandainya pernyataan-pernyataan tersebut p dan q, maka tabel kebenarannya adalah sbb:

| **p** | **q** |
|---|---|
| B | B |
| B | S |
| S | B |
| S | S |

Bila pernyataan majemuk yang dibangun terdiri dari 3 pernyataan tunggal, maka terdapat 8 kemungkinan nilai kebenaran sbb:

| **p** | **q** | **r** |
|---|---|---|
| B | B | B |
| B | B | S |
| B | S | B |
| B | S | S |
| S | B | B |
| S | B | S |
| S | S | B |
| S | S | S |

Bila pernyataan majemuk yang dibangun terdiri dari “n” pernyataan tunggal, maka terdapat “ $2^n$ “ kemungkinan nilai kebenaran.

Nilai kebenaran dari pernyataan majemuk disjungsi, konjungsi, implikasi dan biimplikasi dengan tabel kebenaran sbb:

| **p** | **q** | **p V q** | **p ∧ q** | **p → q** | **p ↔ q** |
|---|---|---|---|---|---|
| B | B | B | B | B | B |
| B | S | B | S | S | S |
| S | B | B | S | B | S |
| S | S | S | S | B | B |

**PERNYATAAN TAUTOLOGI, KONTRADIKSI**

Pernyataan tautologi adalah penyataan majemuk dengan nilai kebenaran selalu BENAR, apapun nilai kebenaran dari pernyataan – pernyataan tunggal yang membangunnya. Sebaliknya pernyataan kontradiksi adalah pernyataan majemuk yang nilai kebenarannya selalu SALAH, apapun nilai kebenaran dari pernyataan – pernyataan tunggal yang membangunnya.

Contoh pernyataan tautologi

1. 6 adalah bilangan genap atau 6 bukan bilangan genap.
2. p V ∼ p

Contoh pernyataan kontradiksi

1. Ayam adalah binatang berkaki dua dan ayam adalah binatang berkaki tiga
2. p ∧ ∼ p

**PERNYATAAN EKUIVALEN**

Dua pernyataan ( baik majemuk maupun tunggal dikatakan ekuivalen, bila nilai kebenaran kedua pernyataan tersebut sama.

Jika 4 adalah bilangan bulat maka 12 adalah kelibatan dari 4 dan jika 12 adalah kelipatan dari 4 maka 4 adalah bilangan bulat. Pernyataan ini ekuivalen dengan 4 adalah bilangan bulat jika hanya jika 12 adalah kelipatan dari 4.

Jika daun pepaya berklorophyl maka pohon kelapa berlapisan kambium dan bila pohon kelapa berlapisan kambium maka daun pepaya berklorophyl. Pernyataan ini ekuivalen dengan pernyataan daun pepaya berklorophyl jika dan hanya jika pohon kelapa berkambium.

**BEBERAPA PERNYATAAN EKUIVALEN**

**1. Idempotent (Idemp)**

**p V p ≡ p**

**$p \wedge p \equiv p$**

**2. Asosiatif (Ass)**

**$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$**

**$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$**

**3. Komutatif (Com)**

**$(p \vee q) \equiv (q \vee p)$**

**$(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$**

**4. Distributif (Distr)**

**$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$**

**$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$**

**5. Negasi ( Ingkaran ) Ganda (DN)**

**$\sim \sim p \equiv p$**

**6. Transposisi ( Trans )**

**$p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$**

**7. Implikasi ( Impl )**

**$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$**

**8. Ekuivalen ( Equiv )**

**$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$**

**$p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$**

**9. Eksportasi ( Exp )**

**$(p \wedge q) \rightarrow r \equiv p \rightarrow (q \rightarrow r)$**

**KONVERS, INVERS DAN KONTRAPOSITIF**

1. Jika harimau binatang bertaring, maka harimau pemakan daging
2. Jika harimau bintang pemakan daging, maka harimau binatang bertaring
3. Jika harimau binatang tidak bertaring, maka harimau bukan pemakan daging
4. Jika harimau binatang bukan pemakan daging, maka harimau bukan binatang bertaring

Pernyataan – pernyataan di atas dituliskan dengan lambang sbb:

p : harimau adalah binatang bertaring

q : harimau adalah binatang pemakan daging

1. Pernyataan implikasi : $p \rightarrow q$
2. Pernyataan konvers : $q \rightarrow p$
3. Pernyataan invers : $\sim p \rightarrow \sim q$
4. Pernyataan kontrapositif : $\sim q \rightarrow \sim p$

Dari tabel kebenaran, nilai kebenaran pernyataan implikasi sama dengan nilai kebenaran pernyataan kontrapositif ( kedua pernyataan ekuivalen ), begitu juga dengan pernyataan konvers dan pernyataan invers.

**PENARIKAN KESIMPULAN**

Ilustrasi

Cermati rangkaian pernyataan berikut:

Jika jengkol tumbuhan monokotil, maka jengkol berakar serabut.

Jengkol bukan tumbuhan berakar serabut.

Kesimpulan yang dapat dibuat dari rangkaian pernyataan tsb adalah;

Jengkol bukan tumbuhan monokotil.

Pernyataan- pernyataan

Jika jengkol tumbuhan monokotil, maka jengkol berakar serabut.

Jengkol bukan tumbuhan berakar serabut.

Disebut dengan pernyataan PREMIS, yaitu prenyataan yang diketahui, sedangkan pernyataan Jengkol bukan tumbuhan monokotil adalah pernyataan KONKLUSI atau KESIMPULAN.

Penarikan kesimpulan ini disebut ARGUMENTASI. Suatu argumentasi dikataka SAH atau VALID bila konjungsi dari premis – premisnya berimplikasi konklusi. Sebaliknya suatu argumen dikatakan TIDAK SAH atau INVALID bila konjungsi dari premis – premisnya tidak berimplikasi konklusi

**ATURAN PENARIKAN KESIMPULAN**

**MODUS PONENS (MP)**

$$\begin{array}{l} \textbf{Premis 1 : } p \rightarrow q \\ \underline{\textbf{Premis 2 : } p \qquad\quad} \\ \qquad\quad \therefore q \end{array}$$

Dalam bentuk implikasi dapat ditulis sbb:

$[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$

Argumentasi Modus Ponens ini sah karena merupakan Tautologi

| p | q | $p \rightarrow q$ | $[(p \rightarrow q) \wedge p]$ | $[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$ |
|---|---|---|---|---|
| B | B | B | B | B |
| B | S | S | S | B |
| S | B | B | S | B |
| S | S | B | S | B |

Contoh

Premis 1 : Jika matematika dasar mudah, maka mahasiswa biologi lulus semua
Premis 2 : Matematika dasar mudah

$\therefore$. Mahasiswa Biologi lulus semua

Contoh
Premis 1 : Jika anjing dan kucing bersahabat, maka tikus menari girang
Premis 2 : Anjing dan kucing bersahabat

$\because$. Tikus menari girang

Contoh
Jika hujan deras terjadi dihulu atau hutan gundul, maka jika tidak terjadi banjir, kebutuhan air bersih masyarakat terpenuhi.
Ternyata tidak terjadi banjir
Jika hutan gundul maka terjadi pemanasan global
Jika terjadi pemanasan global maka hujan deras terjadi dihulu atau hutan gundul
Ternyata hutan gundul. Dari argumen ini disimpulkan secara sah (valid ) bahwa kebutuhan air bersih masyarakat terpenuhi.
Validitas argumen di atas dapat diuji dengan menunjukkan bahwa adalah pernyataan tautologi.

Berikut ini adalah bentuk bukti langsung dengan menggunakan Modus Ponens;
p : hujan deras terjadi dihulu
q : hutan gundul
r : terjadi banjir
s : kebutuhan air bersih masyarakat terpenuhi
t : terjadi pemanasan global

1. Premis 1 : $(p \vee q) \rightarrow (\sim r \rightarrow s)$
2. Premis 2 : $\sim r$
3. Premis 3 : $q \rightarrow t$
4. Premis 4 : $t \rightarrow (p \vee q)$
5. Premis 5 : q....................................... $\therefore s$
6. (3,5: MP ) : t
7. (4,6; MP) : $p \vee q$
8. (1,7;MP ) : $\sim r \rightarrow s$
9. (8,2; MP) : s

**MODUS TOLLENS (MT)**

**Premis 1 : $p \rightarrow q$**

**Premis 2 : $\sim q$**

$\therefore \sim p$

Dalam bentuk implikasi dapat ditulis sbb:

$[(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \rightarrow \sim p$

Argumentasi Modus Tollens ini sah karena merupakan Tautologi

| P | q | $\sim p$ | $\sim q$ | $p \rightarrow q$ | $[(p \rightarrow q) \wedge \sim q]$ | $[(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \rightarrow \sim p$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| B | B | S | S | B | S | B |
| B | S | S | B | S | S | B |
| S | B | B | S | B | S | B |
| S | S | B | B | B | B | B |

Contoh

Premis 1 : Jika matematika dasar mudah, maka mahasiswa biologi lulus semua

Premis 2 : Mahasiswa biologi tidak lulus semua

$\therefore$ Matematika dasar tidak mudah

Contoh

Premis 1 : Jika anjing dan kucing bersahabat, maka tikus menari girang

Premis 2 : Tikus tidak menari girang

$\because$ Anjing dan kucing tidak bersahabat.

Contoh

Jika kacang polong berwarna kuning, maka kacang panjang berwarna hijau

Jika kacang panjang berwarna hijau, maka kacang hijau berbiji belah

Jika kacang polong tidak berwarna kuning, maka kacang buncis tumbuhan merambat

Ternyata kacang hijau tidak berbiji belah.

Dari rangkaian argumen ini dapat disimpulkan secara valid bahwa, kacang buncis tumbuhan merambat.

Silakan dibuktikan validitasnya melalui tabel kebenaran yang menunjukkan rangkaian argumen tsb membentuk pernyataan tautologi.

Berikut ini adalah bentuk bukti langsung dengan menggunakan Modus Ponens dan Modus Tolens;

p : kacang polong berwarna kuning.

q : kacang panjang berwarna hijau

r : kacang hijau berbiji belah

s : kacang buncis tumbuhan merambat

1. Premis 1 : $p \rightarrow q$
2. Premis 2 : $q \rightarrow r$
3. Premis 3 : $\sim p \rightarrow s$
4. Premis 4 : $\sim r$...................................... $\therefore s$

5. (2,4;MT) : $\sim q$
6. (1,5;MT) : $\sim p$
7. (3,6;MP) : s

**SIMPLIKASI ( Simpl )**

Simplikasi merupakan argumen yang hanya dibangun dengan satu premis yang berbentuk pernyataan majemuk konjungsi.

$$\mathbf{p \wedge q}$$
$$\mathbf{\therefore p}$$

Contoh
Premis : Rahmah rajin belajar dan lulus ujian matematika dasar.
Jadi, Rahmah rajin belajar
p : Rahmah rajin belajar
q : Rahmah lulus ujian matematika dasar

| p | q | $p \wedge q$ | $(p \wedge q) \rightarrow q$ |
|---|---|---|---|
| B | B | B | B |
| B | S | S | B |
| S | B | S | B |
| S | S | S | B |

**KONJUNGSI ( CONJ )**

$$\mathbf{P}$$
$$\mathbf{q}$$
$$\mathbf{\therefore p \wedge q}$$

| p | q | $p \wedge q$ | $(p \wedge q) \rightarrow (p \wedge q)$ |
|---|---|---|---|
| B | B | B | B |
| B | S | S | B |
| S | B | S | B |
| S | S | S | B |

Buktikan secara langsung bahwa, argumen berikut ini valid
Jika rambutan adalah tumbuhan berakar tunggang dan durian adalah tumbuhan berakar serabut, maka ilalang tumbuhan berbiji belah.
Rambutan tumbuhan berakar tunggang dan jagung tumbuhan berakar serabut.

Durian tumbuhan berakar serabut dan pohon pinang tidak bercabang.
Jadi disimpulkan bahwa, ilalang tumbuhan berbiji belah.
p : rambutan adalah tumbuhan berakar tunggang
q : durian adalah tumbuhan berakar serabut
r : ilalang tumbuhan berbiji belah
s : jagung tumbuhan berakar serabut
t : pohon pinang tidak bercabang

**Pembuktian langsung**
1. Premis : $(p \wedge q) \rightarrow r$
2. Premis : $p \wedge s$
3. Premis : $q \wedge t$.......................... $\therefore r$
4. (2; simpl ) : $p$
5. (3; simpl ) : $q$
6. (4,5; conj ): $p \wedge q$
7. (1,6; MP ) : $r$

**SILOGISME**
Ilustrasi
Jika Dadi lulus matematika dasar, maka Dadi bersedia menjadi tutor mata kuliah matematika dasar
Jika Dadi bersedia menjadi tutor mata kuliah matematika dasar, maka Dadi menjadi asisten dosen.
Jadi jika Dadi lulus matematika dasar, maka Dadi menjadi asisten dosen.
Dengan lambang rangkaian pernyataan di atas dapat dinyatakan sbb:

**Premis 1 : $p \rightarrow q$**
**Premis 2 : $q \rightarrow r$**

---

**$\therefore p \rightarrow r$**

| P | q | r | $p \rightarrow q$ | $q \rightarrow r$ | $p \rightarrow r$ | $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$ | $[(p \rightarrow q) \wedge q \rightarrow r] \rightarrow (p \rightarrow r)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B | B | B | B | B | B | B | B |
| B | B | S | B | S | S | S | B |
| B | S | B | S | B | B | B | B |
| B | S | S | S | B | S | S | B |
| S | B | B | B | B | B | B | B |
| S | B | S | B | S | B | S | B |
| S | S | B | B | B | B | B | B |
| S | S | S | B | B | B | B | B |

$[(p \rightarrow q) \wedge q \rightarrow r] \rightarrow (p \rightarrow r)$ merupakan pernyataan tautologi, sehingga argumen
Premis 1 : $p \rightarrow q$
Premis 2 : $q \rightarrow r$

---

$\therefore\ p \rightarrow r$

Valid atau sah.

**DISJUNGTIF SILOGISME (DS)**

$$\begin{array}{c} \mathbf{p \lor q} \\ \underline{\mathbf{\sim p}} \\ \mathbf{\therefore q} \end{array}$$

| p | q | $\sim p$ | $p \lor q$ | $(p \lor q) \land \sim p$ | $[(p \lor q) \land \sim p] \rightarrow q$ |
|---|---|---|---|---|---|
| B | B | S | B | S | B |
| B | S | S | B | S | B |
| S | B | B | B | B | B |
| S | S | B | S | S | B |

Binatang itu melata atau ampibi
Itu bukan binatang melata
Jadi, itu adalah binatang ampibi

Saya mengikuti seminar di Jakarta atau saya berlibur di Ancol
Saya tidak mengikuti seminar di Jakarta.
Jadi, saya berlibur di Ancol

**KONSTRUKTIF DILEMMA**

Cermati rangkaian pernyataan berikut;
Jika hutan telah gundul, maka suhu udara makin panas.
Jika es di kutub mencair, maka permukaan air laut naik
Hutan telah gundul atau es di kutub mencair
Jadi, Suhu udara makin panas atau permukaan air laut naik

p : Hutan telah gundul
q : Suhu udara makin panas
r : Es di kutub mencair
s : Permukaan air laut naik

$$\begin{array}{c} \mathbf{p \rightarrow q} \\ \mathbf{r \rightarrow s} \\ \underline{\mathbf{p \lor r}} \\ \mathbf{\therefore q \lor s} \end{array}$$

**DESTRUKTIF DILEMMA**

Cermati rangkaian pernyataan berikut;
Jika hutan telah gundul, maka suhu udara makin panas.
Jika es di kutub mencair, maka permukaan air laut naik
Suhu udara tidak panas atau permukaan air laut tidak naik
Jadi, hutan tidak gundul atau es di kutub tidak mencair.

$$\begin{array}{c} \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q} \\ \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{s} \\ \underline{\sim\mathbf{q} \vee \sim \mathbf{s}} \\ \therefore \sim\mathbf{p} \vee \sim r \end{array}$$

**ADISI**

Cermati rangkaian pernyataan berikut ;
Air mengalir dari tempat yang tinggi ke tempat yang rendah.
Jadi, air mengalir dari tempat yang tinggi ke tempat yang rendah atau angin adalah udara yang mengalir

$$\begin{array}{c} \mathbf{p} \\ \therefore \mathbf{p} \vee \mathbf{q} \end{array}$$

| p | q | p ∨ q | p → (p ∨ q) |
|---|---|---|---|
| B | B | B | B |
| B | S | B | B |
| S | B | B | B |
| S | S | S | B |

Dari tabel kebenaran terlihat bahwa pernyataan p → (p ∨ q) di atas adalah suatu tautologi, jadi adisi argumen yang valid.

**KUANTIFIKASI**

**KUANTOR UMUM**

Pernyataan " Semua kucing berkaki empat " bila
x = kucing
P(x) = berkaki empat
Maka pernyataan " Semua kucing berkaki empat " dapat dituliskan dengan lambang

**Semua x adalah P(x)**

**Semua x , P(x)**

**( ∀ x ) P(x)**

**Disebut pernyataan berkuantor umum**

**KUANTOR KHUSUS**

Pernyataan " Terdapat jagung bertongkol ganda", bila
x = jagung
P(x) = Bertongkol ganda

Maka pernyataan " Terdapat jagung bertongkol ganda" dapat dituliskan dengan lambang

**Terdapat x sedemikian sehingga P(x)**

**Terdapat x, P(x)**

**$\exists$x, P(x)**

**Disebut pernyataan berkuantor khusus**

**INGKARAN PERNYATAAN BERKUANTOR**

Ingkaran dari pernyataan " Semua kucing berkaki empat " adalah " terdapat kucing tidak berkaki empat' atau "tidak benar bahwa semua kucing berkaki empat".
Ingkaran dari pernyataan "Terdapat jagung bertongkol ganda" adalah "semua jagung bertongkol tidak ganda".
Dengan notasi kedua ingkaran ini dapat dituliskan sbb:

$$\sim [(\forall x)\, P(x)] \equiv \exists x, \sim P(x)$$

$$\sim [(\exists x)\, P(x)] \equiv \forall x, \sim P(x)$$

Contoh
Tuliskan pernyataan ingkaran dari pernyataan berikut;
1. Semua mahasiswa jurusan Biologi adalah perempuan
2. Setiap ikan bernafas dengan insang
3. Terdapat oriza sativa yang tidak berhijau daun
4. Beberapa mawar berwarna ungu

Jawab
1. Beberapa mahasiswa jurusan Biologi bukan perempuan
2. Terdapat ikan bernafas bukan dengan insang
3. Semua oriza sativa berhijau daun
4. Setiap mawar berwarna tidak ungu.

**KEPUSTAKAAN**

PURCELL, ( 2004 ). *Kalkulus.* Jilid 1. Jakarta: Erlangga.

Yaya, S. Kusumah,(1986). *Matematika Dasar Logika Elementer.* Bandung: Jurusan Pendidikan Matematika UPI.

Seymour Lipschutz, ( 1981 ). *Set Theory and Related Topics*. Singapore: Mc Graw-Hill International Book Company.