

HAND OUT
LIMIT FUNGSI REAL SATU PEUBAH
OLEH: FIRDAUS-0716

1. LIMIT FUNGSI

1.1 Definisi

Misalkan f adalah fungsi yang terdefinisi pada setiap bilangan pada suatu selang terbuka yang memuat c , kecuali mungkin di c sendiri. Limit $f(x)$ untuk x mendekati c adalah L ditulis;

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ni 0 < |x - c| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

1.2 Teorema (ketunggalan limit)

Jika $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L_1$ dan $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L_2$, maka $L_1 = L_2$

1.3 Teorema Limit

(i). Jika m dan k suatu konstanta, maka

$$\lim_{x \rightarrow c} (mx + k) = mc + k$$

(ii). Jika k suatu konstanta, maka untuk setiap c

$$\lim_{x \rightarrow c} k = k$$

(iii). $\lim_{x \rightarrow c} x = c$

(iv). Jika $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ dan $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = M$, maka

$$\lim_{x \rightarrow c} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) + \lim_{x \rightarrow c} g(x) = L + M$$

$$\lim_{x \rightarrow c} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) - \lim_{x \rightarrow c} g(x) = L - M$$

$$\lim_{x \rightarrow c} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow c} g(x) = L \cdot M$$

$$\lim_{x \rightarrow c} [f(x)/g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) / \lim_{x \rightarrow c} g(x) = L / M, M \neq 0$$

2. LIMIT SEPIHAK

2.1 Definisi

Misalkan f adalah fungsi yang terdefinisi pada setiap bilangan pada suatu selang terbuka (c, d) .

Limit $f(x)$ untuk x mendekati c dari kanan adalah L ditulis;

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ni 0 < x - c < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

2.2 Definisi

Misalkan f adalah fungsi yang terdefinisi pada setiap bilangan pada suatu selang terbuka (c,d) .

Limit $f(x)$ untuk x mendekati c dari kiri adalah L ditulis;

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ni 0 < c - x < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

2.3 Teorema

$\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ ada dan sama dengan L jika dan hanya jika $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$ dan $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$ keduanya ada dan sama dengan L

2.4 CONTOH-CONTOH

Diketahui

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{jika } x < 2 \\ 4 & \text{jika } x = 2 \\ 4 - x^2 & \text{jika } x > 2 \end{cases}$$

Bila ada tentukan limit a. $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ b. $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ c. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

(ii). Diketahui

$$f(x) = \begin{cases} 2x - a & \text{jika } x < -3 \\ ax + 2b & \text{jika } -3 \leq x \leq 3 \\ b - 5x & \text{jika } x > 3 \end{cases}$$

Tentukan nilai a dan b sehingga $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$ dan $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ keduanya ada.

3. LIMIT TAK BERHINGGA

3.1 Definisi

Misalkan f adalah fungsi yang terdefinisi pada setiap bilangan pada suatu selang terbuka yang memuat c , kecuali mungkin di c sendiri. Untuk x mendekati c Limit $f(x)$ membesar tanpa batas yang ditulis;

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = +\infty$$

Jika untuk setiap bilangan $N > 0$ terdapat suatu $\delta > 0$ sehingga

Jika $0 < |x - c| < \delta$ maka $f(x) > N$.

3.2 Definisi

Misalkan f adalah fungsi yang terdefinisi pada setiap bilangan pada suatu selang terbuka yang memuat c , kecuali mungkin di c sendiri. Untuk x mendekati c Limit $f(x)$ mengecil tanpa batas yang ditulis;

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = -\infty$$

Jika untuk setiap bilangan $N < 0$ terdapat suatu $\delta > 0$ sehingga

Jika $0 < |x - c| < \delta$ maka $f(x) < N$.

3.3 Teorema

Jika r suatu bilangan bulat positif, maka

$$(i). \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^r} = +\infty$$

$$(ii). \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^r} = \begin{cases} -\infty & \text{jika } r \text{ ganjil} \\ +\infty & \text{jika } r \text{ genap} \end{cases}$$

3.4 Teorema

Misalkan c suatu bilangan real, $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$ dan $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = k$, di mana k suatu konstanta tak nol.

$$(i). \text{ jika } c > 0 \text{ dan } f(x) \rightarrow 0 \text{ sepanjang nilai positif dari } f(x), \text{ maka } \lim_{x \rightarrow c} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$$

$$(ii). \text{ jika } c > 0 \text{ dan } f(x) \rightarrow 0 \text{ sepanjang nilai negatif dari } f(x), \text{ maka } \lim_{x \rightarrow c} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$$

$$(iii). \text{ jika } c < 0 \text{ dan } f(x) \rightarrow 0 \text{ sepanjang nilai positif dari } f(x), \text{ maka } \lim_{x \rightarrow c} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$$

$$(iv). \text{ jika } c < 0 \text{ dan } f(x) \rightarrow 0 \text{ sepanjang nilai negatif dari } f(x), \text{ maka } \lim_{x \rightarrow c} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$$

3.5 Teorema

(i). Jika $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = +\infty$ dan $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = k$, di mana k suatu konstanta, maka

$$\lim_{x \rightarrow c} [f(x) + g(x)] = +\infty$$

(ii). $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = -\infty$ dan $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = k$, di mana k suatu konstanta, maka

$$\lim_{x \rightarrow c} [f(x) + g(x)] = -\infty$$

(iii). $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = +\infty$ dan $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = k$, di mana k suatu konstanta, maka

$$\text{Jika } k > 0, \lim_{x \rightarrow c} [f(x) \cdot g(x)] = +\infty$$

(iv). $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = +\infty$ dan $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = k$, di mana k suatu konstanta, maka

$$\text{Jika } k < 0, \lim_{x \rightarrow c} [f(x) \cdot g(x)] = -\infty$$

3.6 Definisi

Garis $x = c$ dikatakan suatu asimtot tegak dari grafik fungsi f jika paling sedikit salah satu dari pernyataan berikut benar

$$(i). \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = +\infty$$

$$(ii). \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = -\infty$$

$$(iii). \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = +\infty$$

(iv). $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = -\infty$