Drs. Karso Modul 7

FUNGSI EKSPONEN DAN FUNGSI LOGA RITMA
BESERTA BEBERAPA APLIKASINYA

PENDAHULUAN

Buku Materi Pokok atau Modul yang Anda pelajari ini adalah yang ketujuh dari 12 modul dalam mata kuliah Matematika SD Lanjut. Materi bahasan dalam modul ini meliputi fungsi eksponen, fungsi logaritma, dan beberapa aplikasinya, sedangkan pembahasannya diuraikan dalam dua kegiatan belajar.

Dalam kegiatan belajar yang pertama dibahas pengertian eksponen dan sifat-sifatnya, fungsi eksponen, grafik fungsi eksponen, serta logaritma dan sifat-sifatnya. Sedangkan dalam kegiatan belajar yang kedua akan Anda jumpai topik-topik fungsi logaritma dan grafiknya, persamaan eksponen dan persamaan logaritma, serta beberapa aplikasi fungsi eksponen dan fungsi logaritma.

Untuk mempelajari materi-materi dalam modul ini tidaklah diperlukan persyaratan khusus. Namun tentunya akan mempermudah Anda dalam memahaminya, jika Anda telah memahami konsep-konsep matematika di sekolah lanjutan, di sekolah menengah, dan beberapa materi yang termuat dalam modul-modul sebelumnya dalam mata kuliah ini. Selain itu akan sangat membantu Anda pula, jika Anda telah memahami materi-materi matematika dalam modul-modul D2-PGSD.

Perlu pula Anda ketahui, bahwa konsep-konsep eksponen dan logaritma merupakan konsep-konsep dasar dalam mempelajari konsep-konsep lanjutan dalam matematika. Eksponen dan logaritma harus menjadi pengetahuan siap dan sudah menjadi milik kita sebagai guru yang profesional dalam pembelajaran matematika baik di jenjang pendidikan dasar maupun menengah.

Secara umum tujuan pembelajaran yang hendak dicapai setelah Anda mempelajari modul ini diharapkan untuk mampu memahami konsep fungsi eksponensial dan fungsi logaritma serta dapat :

a. menjelaskan hubungan utama fungsi eksponensial dengan fungsi logaritma;

b. menggambar grafik fungsi eksponen;

c. menggambar grafik fungsi logaritma;

d. membaca tabel (daftar) logaritma berbasis 10;

e. mencari penyelesaian (solusi) persamaan eksponen;

f. mencari penyelesaian (solusi) persamaan logaritma;

g. menggunakan sifat-sifat eksponen;

h. menggunakan sifat-sifat logaritma;

i menerapkan rumus suku bunga;

j. menerapkan rumus perkembangan bakteri;

k. menerapkan rumus intensitas cahaya;

l. menerapkan rumuspertumbuhan penduduk;

m. peluruhan suatu zat radio aktif.

KEGIATAN BELAJAR 1

FUNGSI EKSPONEN, FUNGSI LOGARITMA DAN APLIKASINYA
(BAGIAN I)

Sebagaimana telak kita ketahui bahwa fungsi elementer dapat dikelompokkan menjadi dua bagian besar, yaitu fungsi Aljabar dan fungsi transenden. Berbagai jenis fungsi aljabar beserta pengertian-pengertiannya telah kita pelajari dalam beberapa modul sebelumnya. Kita baru saja mempelajari bahasan yang berkaitan dengan fungsi aljabar seperti fungsi linear dan fungsi polinom (Modul 4), fungsi rasional serta beberapa fungsi aljabar (Modul 5), dan fungsi kuadrat (Modul 6).

Khusus dalam kesempatan bahasan modul yang sekarang ini, kita akan membicarakan dua buah fungsi transenden yang elementer, yaitu fungsi eksponen dan fungsi logaritma. Namun tentunya sebelum membahas kedua konsep fungsi transenden ini haruslah kita terlebih dahulu memahami konsep eksponennya dan konsep logaritmanya.

a. Eksponen dan Sifat-sifatnya

Sebagaimana telah kita ketahui, bahwa notasi eksponen atau notasi pangkat sangat berguna untuk menuliskan hasil kali sebuah bilangan dengan bilangan itu sendiri dalam bentuk yang lebih ringkas, misalnya :

(1). $3^4 = 3 \text{ x } 3 \text{ x } 3 \text{ x } 3$

(2) $-2^5 = (-2) \text{ x } (-2) \text{ x } (-2) \text{ x } (-2) \text{ x } (-2)$

Sekarang sudah menjadi kelaziman untuk menuliskan perkalian sembarang bilangan real a sebanyak n kali, yaitu a x a x a x … x a sebagai a^n. Dengan kata lain didefinisikan bahwa untuk setiap $a \in R$ (himpunan bilangan real) dengan n bilangan bulat positif, notasi a^n adalah hasil kali n buah faktor a, atau

$$a^n = a \text{ x } a \text{ x } a \text{ x } \ldots \text{ x } a.$$

Tentunya kita masih ingat dengan baik, bahwa bentuk a^n dibaca “a pangkat n” atau ‘ a eksponen n”. Bilangan a dinamakan *bilangan pokok* atau *basis*, sedangkan bilanangan n dinamakan *pangkat* atau *eksponen* atau *indeks.*

Selanjutnya didefinisikan pula beberapa bentuk bilangan berpangkat di antaranya

(1) $a^0 = 1$ dengan $a \neq 0$ dan $a \in R$.

(2). $A^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ dengan $a \neq 0$ dan $a \in R$ dan $n \in A$.

(3). $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ dengan $a \neq 0,\ a \in R$ dan $n \neq 0,\ n \in B$

(4). $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$ dengan $a \in R,\ m \in B$ dan $n \in A$

dengan B = himpunan bilangan bulat dan A = himpunan bilangan bulat positif = himpunan bilangan asli.

Kemudian berdasarkan beberapa definisi di atas telah pula kita tentukan beberapa teorema yang berkaitan dengan eksponen sebagai prasyarat dalam mempelajari bahasan mendatang, diantaranya :

(1). Jika $m, n \in A$ dan $a \in R$, maka $a^m \times a^n = a^{m+n}$

(2). Jika $m, n \in A$, $a \in R$ dan $a \neq 0$, maka $a^m : a^n = a^{m-n}$

(3). Jika $m, n \in A$ dan $a \in R$, maka $(a^m)^n = a^{mn}$

(4). Jika $a, b \in R$ dan $n \in A$, maka $(ab)^n = a^n \times b^n$

(5). Jika $a, b \in R$ dan $n \in A$, maka $(\frac{a}{b})^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

(6). Jika $a, b \in R$ dan $n \in A$, maka $(\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

(7). Jika $m, n \in R$ dan $a > 0$ dengan $a^m = a^n$, maka $m = n$.

Untuk lebih mengingatkanya kembali tentang eksponen dan sifat-sifatnya ini, kita perhatikan beberapa contoh berikut ini.

<u>Contoh 1.1</u>

Hitunglan : (a). $(-3^{-2})^{-4}$ dan (b). $8^{-\frac{2}{3}}$

<u>Penyelesaian</u> :

(a). $(-3^{-2})^{-4} = (-3)^{(-2)\,.\,(-4)} = (-3)^8 = 6561$.

(b). $8^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{8^{\frac{2}{3}}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{8^2}} = \dfrac{1}{4}$

Contoh 1.2

Sederhanakanlah (a). $(3xy^2)^3(x^2z)^2$ dan (b). $(\dfrac{a}{b^2})^{\frac{1}{2}} . (ab^2)^{-\frac{1}{2}}$

Penyelesaian :

(a). $(3xy^2)^3(x^2z)^2 = 3^3x^3(y^2)^3 . (x^2)^2z^2 = (3^3) . (x^3x^4)(y^6)(z^2) = 27x^{7y}6z^2$.

(b). $(\dfrac{a}{b^2})^{\frac{1}{2}} . (ab^2)^{-\frac{1}{2}} = (ab^{-2})^{\frac{1}{2}} (ab^2)^{-\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}b^{-1}a^{-\frac{1}{2}}b^{-1} = a^0b^{-2} = \dfrac{1}{b^2}$

b. Fungsi Eksponen

Perhatikanlah dua buah fungsi elementer dalam bentuk seperti berikut ini.

$$Y = f(x) = x^3 \text{ dan } y = f(x) = 3^x$$

Dalam fungsi $y = x^3$ dengan pangkat variabel adalah konstan, sehingga fungsi ini termasuk ke dalam salah satu contoh fungsi aljabar. Sedangkan pada contoh yang kedua, yaitu $y = 3^x$, variabelnya muncul sebagai pangkat atau eksponen. Fungsi $y = 3^x$ merupakan contoh sebuah fungsi yang bukan fungsi aljabar melainkan fungsi transenden, yaitu sebuah contoh fungsi eksponen.

Suatu fungsi yang memuat variabel sebagai pangkat atau eksponen kita namakan fungsi eksponen. Secara lengkapnya, fungsi eksponen didefinisikan sbb :

Definisi 1

Fungsi eksponen adalah fungsi yang mempunyai bentuk umum $f(x) = ka^x$ dengan k dan a adalah konstanta, $a > 0$, dan $a \neq 1$.

Secara simbolik, fungsi eksponen dapat ditulis dalam bentuk seperti berikut ini

$$f = \{(x,y) / y = ka^x, a > 0, a \neq 1\}.$$

Fungsi eksponen ini adalah salah satu fungsi yang cukup penting dalam matematika. Fungsi eksponen banyak sekali penerapannya, dan tidak hanya dalam matematika saja tetapi banyak pula berkaitan dengan pertumbuhan dan peluruhan. Selain itu nanti kita akan melihat, bahwa fungsi ini erat sekali hubungannya dengan fungsi logaritma.

<u>Contoh 1.3</u>

(a). $y = f(x) = 2^x$ (fungsi eksponen)

(b). $y = f(x) = 1{,}5^x$ (fungsi eksponen)

(c). $y = f(x) = x^x$ (bukan fungsi eksponen)

(d). $y = f(x) = e^x$ (fungsi eksponen)

(e). $y = f(x) = 1^x$ (fungsi eksponen)

<u>Contoh 1.4</u>

Misalkan seseorang menabung uang di suatu Bank sebesar Rp. 200.000,- untuk jangka waktu tertentu dengan bunga majemuk 40% per tahun. Hal ini berarti setiap bunga yang didapat pada setiap akhir tahun digabungkan pada tabungan semula (modal), sehingga pada akhir tahun berikutnya memberikan bunga pula. Hal ini berarti, bahwa nilai simpanan orang tersebut dalam ribuan rupiah, pada akhir

Tahun 1 adalah $200(1 + 0{,}40) = 200(194) = 280$

Tahun 2 adalah $280(1{,}40) = 200(1{,}40)(1{,}40) = 200(1{,}14)^2 = 3{,}92$

Tahun 3 adalah $392(1{,}40) = 200(1{,}40)(1{,}40)(1{,}40) = 200(1{,}40)^3 = 548{,}8$

Tahun n adalah $200(1{,}40)(1{,}40) \ldots (1{,}40) = 200(1{,}40)^n$.

Jadi secara umum tabungan orang tersebut dapat kita tulis dalam bentuk fungsi lama simpanan n tahun dengan persamaan :

$$n = 200(1 + 0{,}40)^n = 200(1{,}40)^n$$

Jadi, jika kita menabung uang di Bank sebesar M dengan suku bunga majemuk I pertahun, maka jumlah uangnya setelah t tahun (M_t) adalah

$$M_t = M(1 + I)^t.$$

<u>Contoh 1.5</u>

Misalkan intensitas suatu cahaya untuk setiap meternya di bawah permukaan air laut berkurang 3,5%. Jadi persentase cahaya di permukaan yang menembus ke dalam laut dapat kita tulis sebagai fungsi dari kedalaman k dengan satuan meter dalam bentuk persamaan :

$$p = 100(1 - 0{,}035)^k \text{ atau } p = 100(0{,}965)^k$$

c. <u>Grafik Fungsi Eksponen</u>

Sekarang kita akan menggambar grafik fungsi eksponen. Dengan memperhatikan karakteristik-karakteristik grafik fungsi eksponen ini kita akan melihat beberapa sifat dari fungsi eksponen tersebut.

Sebagaimana telah kita ketahui bahwa fungsi eksponen adalah fungsi dengan variabelnya (variabel bebasnya) merupakan pangkat dari suatu bilangan tertentu, sehingga secara singkat dapat kita tulis dalam bentuk

$$y = f(x) = a^x \text{ dengan } a > 0 \text{ dan } a \neq 1.$$

Untuk mempermudah menggambar grafik fungsi eksponen ini, kita tinjau nilai konstanta atau bilangan tertentunya, yaitu kemungkinan-kemungkinan dari nilai a. Berdasarkan pengertian fungsi eksponen $y = a^x$ dengan $a > 0$ dan $a \neq 1$, maka kita dapat membagi grafik fungsi eksponen menjadi dua bagian besar, yaitu :

(1). $y = a^x$ dengan $a > 1$

Dari sini kita dapat melihat, bahwa untuk x semakin besar maka harga y tentunya akan semakin besar pula. Sedangkan jika x semakin kecil, maka tentunya y akan semakin kecil pula (Gambar 1.1).

$$x \text{ menuju } \sim \;\rightarrow\; y \text{ akan menuju } \sim$$

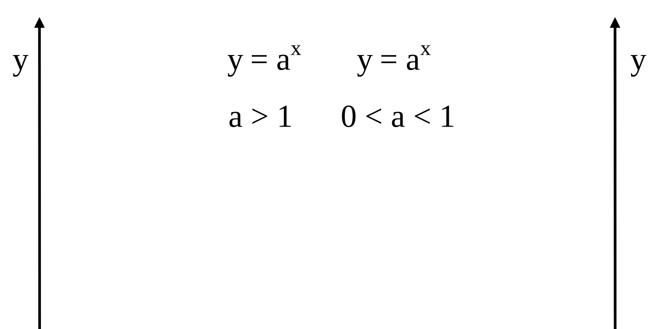
$$x \text{ menuju } -\sim \;\rightarrow\; y \text{ akan menuju } 0$$

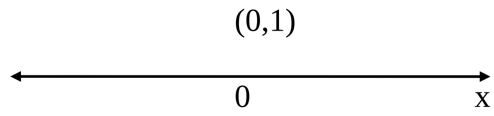
(2). $y = a^x$ dengan $0 < a < 1$

Untuk a yang lebih kecil dari satu dan lebih besar dari nol, maka jika x semakin besar tentunya y semakin kecil, dan jika x semakin kecil tentunya y senakin besar (Gambar 1.2).

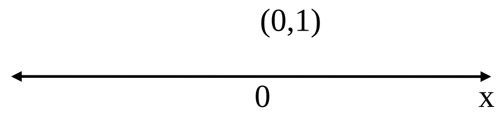
$$x \text{ menuju } \sim \;\rightarrow\; y \text{ akan menuju } 0$$

$$x \text{ menuju } -\sim \;\rightarrow\; y \text{ akan menuju } \sim$$





Gambar 1.1



Gambar 1.2

Untuk lebih jelasnya lagi tentang grafik fungsi eksponen ini kita lihat beberapa contoh berikut ini.

<u>Contoh 1.6</u>

Gambarlah grafik fungsi eksponen $f(x) = 2^x$ dengan $x \in R$.

<u>Penyelesaian</u> :

(1) Titik-titik pada grafik

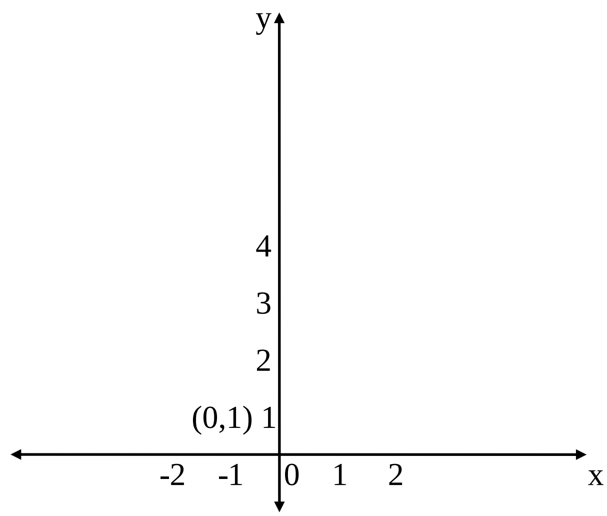
Untuk mempermudah menggambarnya, terlebih dahulu kita pilih beberapa titik yang terletak pada grafik tersebut dengan membuat tabel seperti berikut ini.

x	$-\sim \leftarrow \ldots$	-2	-1	0	1	2	$\ldots \rightarrow \sim$
y = f(x)	$0 \leftarrow \ldots$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	$\ldots \rightarrow \sim$

Titik potong dengan sumbu y : $f(0) = 2^0 = 1$. Grafik memotong sumbu y di titik (0,1). Selanjutnya dengan mengambil beberapa harga x di sebelah kiri dan sebelah kanan $x = 0$, kita dapatkan beberapa titik yang terletak pada grafik. Ternyata untuk $x \rightarrow \sim$ maka $y \rightarrow \sim$, dan untuk $x \rightarrow -\sim$ ternyata $y \rightarrow 0$.

(2). Asimtot-asimtotnya

Titik potong dengan sumbu x : jika grafik memotong sumbu x, maka $y = f(x) = 0$ berarti $2^x = 0$. Ini adalah hal yang tidak mungkin sebab $2^x > 0$ untuk $x \in R$. Hal ini berarti grafik fungsi tidak pernah memotong sumbu x. Asimtot tegaknya tidak ada, sebab untuk $x \rightarrow \sim$ ternyata $y \rightarrow \sim$. Asimtot datarnya = 0, sebab untuk $x \rightarrow - \sim$ ternyata $y \rightarrow 0$. (Didefinisikan, bahwa asimtot sesuatu garis lengkung adalah garis lurus yang semangkin didekati garis lengkung itu, sehingga dapat diambil suatu titik pada garis lengkung itu yang jaraknya pada garis lurus dapat dibuat sekecil-kecilnya. Sedangkan secara aljabar, asimtot suatu garis lengkung dapat didefinisikan sebagai garis singgung pada garis lengkung di tempat tak berhingga).



Gambar 1.3

(3). Daerah asal dan daerah hasil

Karena 2^x terdefinisi untuk setiap $x \in R$, maka daerah asalnya (domainnya) adalah R, yaitu himpunan semua bilangan real $(- \sim , \sim)$. Kemudian, karena 2^x tidak pernah nilainya nol atau negatif, dan karena terdapat satu nilai x untuk setiap nilai 2^x yang positif, maka daerah hasilnya (rangenya) adalah himpunan semua bilangan real positif $(0 , \sim)$.

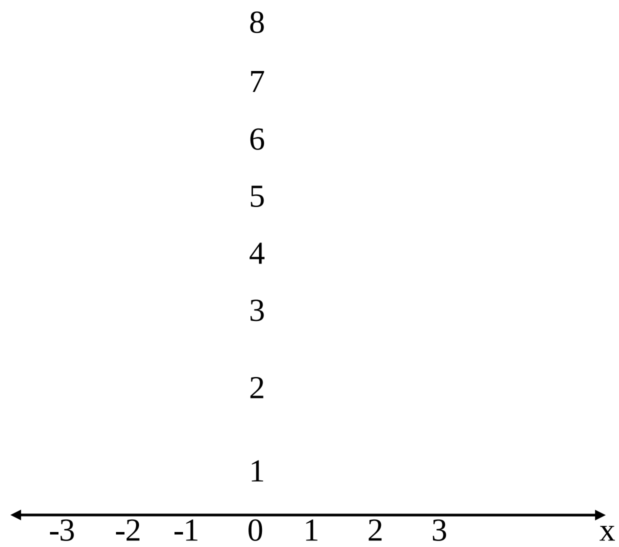
<u>Contoh 1.7</u>

Gambarlah grafik $f(x) = (\frac{1}{2})^x$, dengan $x \in R$.

<u>Penyelesaian</u> :

$y = (\frac{1}{2})^x$

x	y = f(x)



- ~	~
⋮	⋮
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
2	$\frac{1}{4}$
⋮	⋮
~	0

Gambar 1.4

Dengan memperhatikan kedua contoh terakhir di atas, kita dapat melihat bahwa grafik fungsi eksponen $f(x) = a^x$ dengan $a > 1$ selalu naik untuk setiap x bertambah, dengan kata lain $f(x) = a^x$ dengan $a > 1$ merupakan *fungsi naik*. (fungsi monoton naik). Sedangkan grafik fungsi eksponen $f(x) = a^x$ dengan $0 < a < 1$ selalu turun untuk setiap x bertambah, dengan kata lain fungsi $f(x) = a^x$ dengan $0 < a < 1$ merupakan *fungsi turun*. (fungsi monoton turun).

d. Logaritma dan Sifat-sifatnya

Dalam bagian ini kita akan mengingat kembali tentang pengertian logaritma dan sifat-sifatnya. Pengetahuan prasyarat ini akan kita gunakan pada bahasan-bahasan berikutnya dalam kegiatan pembelajaran modul ini.

Sekarang kita perhatikan pernyataan $a \times b = c$. Bagaimanakah menyatakan a dalam b dan c ? Jawabnya adalah $a = \frac{c}{b}$ dengan $b \neq 0$. Kemudian kita perhatikan pernyataan $3^2 = 9$. Bagaimanakah menyatakan 3 dalam 2 dan 9 ? Jawabnya $3 = \sqrt[2]{9}$. Bagaimanakah menyatakan 2 dalam 3 dan 9 ? Jawabnya 2 adalah pangkat dari 3 sehingga $3^2 = 9$. Jika kita ambil secara umum $a^y = x$, maka y adalah eksponen dari a sehingga $a^y = x$, dan pernyataan untuk y ini bisa ditulis dalam bentuk y = ${}^{a}\log x$ atau $y = \log_a x$ dengan a adalah bilangan dasar atau basis dan y adalah eksponennya.

<u>Definisi 2</u>

Logaritma x dengan basis a, a > 0 dilambangkan ${}^{a}\log x$ ialah pangkat atau eksponen yang akan dimiliki oleh x seandainya ia dituliskan sebagai suatu bilangan berpangkat dengan basis a. Dengan kata lain y = ${}^{a}\log x$ jika dan hanya jika x = a^y. Karena $a^y > 0$ untuk setiap y real dengan a > 0, maka haruslah x > 0.

<u>Catatan</u> :

(1) a disebut bais logaritma atau bilangan dasar, dengan ketentuan a > 0 dan a ≠ 1. Untuk a = 10, bentuk ${}^{10}\log x$ cukup ditulis log x. Logaritma dengan basis sepuluh dinamakan logaritma biasa. Jadi log x = y berarti x = 10^y. Sedangkan untuk a = e = 2,718… , bentuk ${}^{e}\log x$ ditulis sebagai ln x (dibaca : “ lon x”) dan disebut logaritma natural (logaritma Napier). Logaritma natural banyak dipakai dalam kalkulus. Hubungan antara logaritma natural dengan logaritma biasa adalah :
log x = (ln x) (ln e), karena log e = 0,43429448…, maka
log x = (0,43429448…) ln x, dan
ln x = (2,302585…) log x.

(2). x disebut numerus, yaitu bilangan yang dicari logaritmanya dengan syarat x > 0.

(3). y disebut hasil logaritma, nilainya bisa positif, nol atau negatif.

(4). Penulisan y = ${}^{a}\log x$ kadang-kadang ditulis dalam bentuk y = $\log_a x$. Namun dalam kesempatan sekarang ini kita menggunakan notasi yang pertama.

<u>Contoh 1.8</u>

Tentukan nilai dari :

(a). log 1000 dan (b). ${}^{2}\log 128$

<u>Penyelesaian</u> :

(a). Misalkan log 1000 = y

$$\log 1000 = {}^{10}\log 1000 = {}^{10}\log 10^3 = y$$

$$10^3 = 10^y \qquad \text{(definisi)}$$

$$y = 3.$$

(b). Misalkan ${}^{2}\log 128 = x$

$${}^{2}\log 128 = {}^{2}\log 2^7 = x$$

$$2^7 = 2^x$$

$$x = 7$$

Perlu kita ketahui, bahwa dalam menentukan logaritma dari suatu bilangan selain dengan cara seperti contoh 1.7 di atas, dapat pula kita lakukan dengan cara lain. Daftar atau tabel logaritma dapat kita gunakan untuk menentukan logaritma suatu bilangan dengan basis sepuluh (${}^{10}\log x$). Selain daftar logaritma untuk menghitung logaritma dari suatu bilangan dapat pula kita menggunakan kalkulator. Sebagai contoh untuk menentukan log 1000, cukup kita tekan 1000 kemudian tekan tombol log, maka pada layar kalkulator akan tampak angka 3, berarti log 1000 = 3.

Khusus dalam kesempatan sekarang ini kita akan menggunakan daftar atau tabel logaritma basis 10 sampai dengan tiga desimal (hasil pembulatan dari suatu pendekatan). Namun untuk menentukan logaritma dari suatu bilangan diperlukan notasi ilmiah. Notasi ilmiah digunakan dalam ilmu pengetahuan untuk menyatakan suatu bilangan yang besar sekali maupun bilangan yang kecil sekali. Untuk menyatakan suatu bilangan x dalam notasi ilmiah, maka bilangan itu ditulis dalam bentuk :

$$x = A \times 10^k, \text{ dengan } 1 \leq A < 10 \text{ dan } k \text{ bilangan bulat.}$$

Untuk menentukan logaritma dari suatu bilangan x, dapat kita tulis dengan bantuan notasi ilmiah dalam bentuk seperti berikut ini.

$$\begin{aligned} \log x &= \log (A \cdot 10^k) \\ &= \log A + \log 10^k \\ &= \log A + k \log 10 \\ &= \log A + k \quad , \text{ sebab } \log 10 = 1. \end{aligned}$$

Nilai log A dapat kita baca dari daftar logaritma. Selanjutnya dengan menambahkan k pada hasil membaca daftar tadi, maka nilai pendekatan dari log x dapat kita peroleh.

Contoh 1.9

Tentukanlah atau hitunglah nilai dari

(a) log 234 (b). log 23,4 (c). log 2,34

(d). log 0,234 (e). log 0,000234

Penyelesaian :

(a). log 234 = log (2,34 x 10^2) = log 2,34 + log 10^2 = log 2,34 + 2

Dengan memperhatikan atau membaca logaritma biasa, nilai log 2,34 berada pada baris yang dikepalai oleh 23 dan di bawah kolom yang dikepalai oleh 4. Hal ini berarti log 2,34 = 0,369. Jadi, log 234 = 0,369 + 2 = 2,369.

Catatan :

Bilangan 0,369 disebut *mantisa* (bagian desimal) dan 2 disebut *karakteristik* (bagian bulat). Dalam hal ini mantisa logaritma tidak pernah negatif, tetapi $0 \le$ mantisa < 1.

(b). log 23,4 = log (2,34 x 10^1) = log 2,34 + log 10 = log 2,34 + 1 = 0,369 + 1 = 1,369.

(c). log 2,34 = 0,369

(d). log 0,000234 = log (2,34 x 10^{-4}) = log 2,34 + log 10^{-4} = 0,369 - 4 = -3,631.

Logaritma Tiga Angka (Basis 10)

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	.000	004	009	013	017	021	025	029	033	037
11	.041	045	049	053	057	061	064	068	072	076
12	.079	083	086	090	093	097	100	104	107	111
13	.114	149	152	155	158	161	164	167	170	173
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
20	.301	303	305	307	310	312	314	316	318	320
21	.322	324	326	328	330	332	334	336	338	340

22	.342	344	346	348	350	352	354	356	358	360
23	.362	364	365	367	369	371	373	375	377	378
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
30	.477	479	480	481	483	484	486	487	489	490
31	.491	493	494	496	497	498	500	501	502	504
32	.505	507	508	509	511	512	513	515	516	517
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
97	.987	987	988	988	989	989	989	990	990	991
98	.991	992	992	993	993	993	994	994	995	995
99	.996	996	997	997	997	998	998	999	999	1.000

Sekarang kita akan mencari nilai x bila nilai log x nya diketahui. Sedangkan lat yang kita pakai masih tetap dengan bantuan daftar (tabel) logaritma tidak menggunakan kalkulator. Untuk lebih jelasnya kita perhatikan beberapa contoh berikut ini.

Contoh 1.10

Tentukanlah x jika

(a). log x = 4,483 (b). log x = 2,483 (c). log x = 0,483

(d). log x = - 2,483 (e). log x = -4,483

Penyelesaian :

(a). log x = 4,483 menurut definisi $x = 10^{4,483} = 10^{0,483 + 4} = 10^4 \times 10^{0,483}$

Untuk menghitung $10^{0,483}$, kita harus menemukan bilangan yang logaritmanya 0,483. Dari tabel (daftar) ternyata 0,483 terdapat pada baris yang dikepalai oleh 30 dan pada kolom yang dikepalai 4, bilangan ini adalah 3, 04. (ingat $1 \leq A < 10$). Jadi,

$$x = 10^4 \times 3,04 = 30400.$$

(b). Karena log x = 2,483, maka menurut definisi x = $10^{2,483} = 10^{2\,+\,0,483} = 10^{2} + 10^{0,483}$. Dengan memperhatikan daftar logaritma, seperti penyelesaian soal di atas (a), maka didapat :

$$x = 10^{2} \text{ x } 3,04 = 304.$$

(c). log x = 0,483 berarti x = $10^{0,483}$ = 3,04.

(d). Karena log x = - 2,483 tidak dalam bentuk baku, maka bentuk bakunya

$$\log x = -2,483 = 0,517 + (-3).$$

Dari daftar logaritma diperoleh antilog 0,517 = 3,29. Jadi,

$$x = 3,29 \text{ x } 10^{-3} = 0,00329.$$

(e). log x = -4,483 = 0,517 + (-5), sedangkan dari daftar logaritma diperoleh antilog 0,517 = 3,29. Jadi,

$$x = 3,29 \text{ x } 10^{-5} = 0,0000329.$$

Silakan Anda periksa semua contoh 1.8 dan contoh 1.9 dengan bantuan kalkulator, maka hasilnya haruslah relatif sama seperti dengan bantuan daftar logaritma di atas.

Berikut ini kita ingatkan kembali beberapa sifat atau teorema pokok logaritma yang diperlukan dalam menyelesaikan persoalan yang berkaitan dengan logaritma, diantaranya :

(1). ${}^{a}\log a^{x} = x$

(2). $a^{{}^{a}\log x} = x$

(3). ${}^{a}\log x \,.\, y = {}^{a}\log x + {}^{a}\log y$

(4). ${}^{a}\log \dfrac{x}{y} . = {}^{a}\log x - {}^{a}\log y$

(5). ${}^{a}\log x^{n} = n\ {}^{a}\log x$

(6). ${}^{a}\log \sqrt[n]{x} = \dfrac{1}{n}\ {}^{a}\log x$

(7). ${}^{b}\log x = \dfrac{{}^{a}\log x}{{}^{a}\log b}$, $a \neq 1, b \neq 1$

(8). ${}^{a}\log x = {}^{a}\log y \Leftrightarrow x = y$, $a \neq 1$.

Dalam teorema di atas, x dan y adalah bilangan real positif, a dan b bilangan real positif, dan n $\in$ R. Sebagai buktinya silakan Anda perhatikan kembali matematika sekolah lanjutan dan menengah.

<u>Contoh 1.11</u>

Carilah ${}^{3}\log 2$ dengan bantuan daftar logaritma.

Penyelesaian :

$${}^{3}\log 2 = \frac{\log 2}{\log 3} = \frac{0{,}301}{0{,}477} = 0{,}631.$$

Contoh 1.12

Jika log x = 0,602, tentukanlah nilai logaritma berikut :

(a). log 4000 (b). log 0,04 (c). Log 16

Penyelesaian :

(a). log 4000 = log (4 x 1000) = log 4 + log 1000 = 0,602 + 3 = 3, 602

(b). log 0,04 = log $\frac{4}{100}$ = log 4 - log 100 = 0,602 - 2 = - 1,398

(c). Log 16 = log 4^2 = 2 log 4 = 2 x 0,602 = 1,204.

Selanjutnya untuk lebih memantapkan pemahaman Anda tentang materi kegiatan belajar ini, cobalah Anda kerjakan soal-soal latihan 1 berikut ini.

1. Misalkan sebuah bola basket dijatuhkan dari ketinggian 3 meter dan setiap kali jatuh ke lantai bola itu naik setinggi 65% dari ketinggian sebelumnya. Tentukanlah model jatuhnya bola dalam bentuk peluruhan eksponen sebagai suatu fungsi tinggi bola T (dalam meter) dari banyaknya jatuhan n.

2. Sederhanakanlah bentuk berikut menjadi eksponen positif $\frac{16^{\frac{1}{4}}\ a^{3}}{2b^{-2}}$

3. Gambarlah grafik fungsi eksponen y = f(x) = 2^{x+1} , dengan x $\in$ R.

4. Gambarlah grafik y = 2^{-x^2+2x+1}

5. Dengan menggunakan daftar logaritma, hitunglah x, jika

(a). $x = \log \sqrt[3]{2}$

(b). $\log x = 3{,}516$

Setelah Anda mencoba menyelesaikan soal-soal latihan 1 di atas, bandingkanlah jawabannya dengan petunjuk alternatif jawaban berikut.

1. Bola basket yang dijatuhkan ke lantai dari ketinggian 3 meter dengan setiap kali jatuhnya naik setinggi 65% dari ketinggian sebelumnya adalah fungsi eksponen, dengan tinggi bola (dalam meter) setelah :

   Jatuh ke-1 adalah 3(0,65) = 1,95

   Jatuh ke-2 adalah $3(0{,}65(0{,}65) = 3(0{,}65)^2 = 1{,}2675$

   Jatuh ke-3 adalah $3(0{,}65(0{,}65)(0{,}65) = 3(0{,}65)^3 = 0{,}8239$

   Jatuh ke-n adalah $3(0{,}65(0{,}65) \ldots (0{,}65) = 3(0{,}65)^n$.

   Jadi tinggi bola T(dalam meter) merupakan fungsi dari banyaknya jatuhan n dengan persamaan $T = 3(0{,}65)^n$.

2. $\dfrac{16^{\frac{1}{4}}\, a^3}{2b^{-2}} = (2^4)^{\frac{1}{4}}\, a^3 . 2^{-1}\, b^2 = 2a^3 . 2^{-1}\, b^2 = a^3 b^2$.

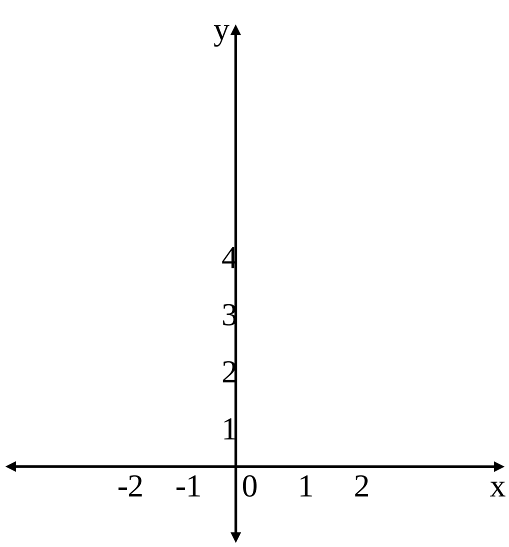
3. $y = 2^{x+1}$

(a). Titik-titik pada grafik

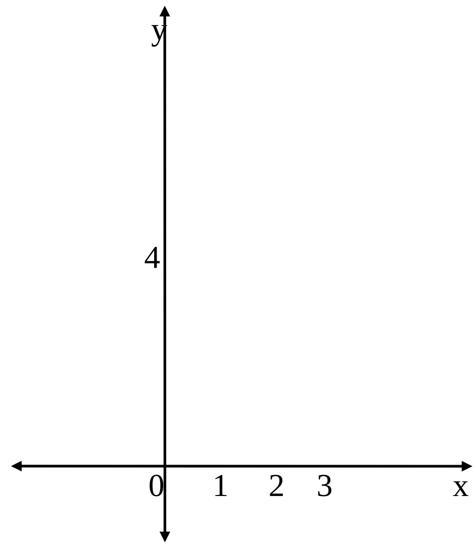
x	$-\sim \leftarrow \ldots$	-2	-1	0	1	$\ldots \rightarrow \sim$
y	$0 \leftarrow \ldots$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	$\ldots \rightarrow \sim$

(b) Asimtot-asimtotnya

Asimtot tegak tidak ada, sedangkan asimtot datarnya y = 0 (Gambar 1.5)



Gambar 1.5



Gambar 1.6

4. $y = 2^{-x^2+2x+1}$

(a). Harga ekstrim dari $-x^2 + 2x + 1$ dicapai untuk

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2(-1)}\text{, sehingga } y = 2^{-(1)^2+2.1+1} = 4$$

(b). Titik-titik pada grafik

x	$-\sim \leftarrow$	…	-1	0	1	2	3	… $\rightarrow \sim$
y	$0 \leftarrow$	…	$\frac{1}{4}$	2	4	2	$\frac{1}{4}$	… $\rightarrow 0$

(c). Asimtot tegak tidak ada sedangkan asimtot datar y = 0 (Gambar 1.6)

5. (a). $x = \log \sqrt[3]{2} = \log 2^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \log 2 = \frac{1}{3} . 0,301 = 0,10033$.

(b). Karena log x = 3,516, maka

$$x = 10^{3,516} = 10^{3 + 0,516} = 10^3 + 10^{0,516}$$

Dari daftar logaritma, ternyata 0,516 terletak pada baris yang dikepali oleh 32 dan kolom ke-8, bilangannya adalah 3,28. Jadi $x = 10^3 + 3,28 = 3280$.

Setelah Anda mempelajari kegiatan belajar yang pertama dari buku materi pokok ini, buatlah rangkumannya kemudian bandingkanlah dengan alternatif rangkuman berikut.

Rangkuman

1. Suatu fungsi yang memuat variabel sebagai pangkat atau eksponen dinamakan fungsi eksponen, dan secara umum dapat ditulis dalam bentuk $f = \{(x,y) / y = ka^x$ dengan $k, a \in R, a > 0, a \neq 1\}$.

2. Sifat-sifat fungsi eksponen

   (a). Domainnya (daerah asalnya) adalah himpunan bilangan real, R = (- ~ , ~).

   (b). Daerah hasilnya (rangenya) adalah himpunan bilangan real positif, R_+ = (0, ~).

   (c). Grafik fungsi selalu memotong sumbu y di titik (0,1).

   (d). Fungsi $f(x) = a^x$ merupakan fungsi naik untuk $a > 1$, dan merupakan fungsi turun untuk $0 < a < 1$, serta merupakan fungsi konstan untuk $a = 1$. $(f(x) = 1)$.

(e). Grafik fungsinya tidak pernah memotong sumbu x. Sumbu x merupakan asimtot datar.

3. $y = {}^a\log x$ jika dan hanya jika $x = a^y$ dengan $a > 0$ dan $a \neq 1$.

4. Sifat-sifat eksponen

   (a) $a^0 = 1$ dengan $a \neq 0$ dan $a \in R$.

   (b). $A^{-n} = \frac{1}{a^n}$ dengan $a \neq 0$ dan $a \in R$ dan $n \in A$.

   (c). $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ dengan $a \neq 0, a \in R$ dan $n \neq 0, n \in B$

   (d). $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$ dengan $a \in R, m \in B$ dan $n \in A$

5. Sifat-sifat logaritma

(a). ${}^{a}\log a^{x} = x$

(b). $a^{{}^{a}\log x} = x$

(c). ${}^{a}\log x\,.\,y = {}^{a}\log x + {}^{a}\log y$

(d). ${}^{a}\log \frac{x}{y} .= {}^{a}\log x - {}^{a}\log y$

(e). ${}^{a}\log x^{n} = n\ {}^{a}\log x$

(f). ${}^{a}\log \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n}\ {}^{a}\log x$

(g). ${}^{b}\log x = \frac{{}^{a}\log x}{{}^{a}\log b}$, $a \neq 1$, $b \neq 1$

(h). ${}^{a}\log x = {}^{a}\log y \Leftrightarrow x = y$, $a \neq 1$.

TES FORMATIF 1

Untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda, kerjakanlah soal-soal Tes Formatif 1 berikut dengan memberi tanda silang (X) di muka pernyataan yang benar.

1. Yang merupakan fungsi eksponen

   A. $f(x) = \sqrt{2x+5}$

   B. $f(x) = 2^{x+1}$

   C. $f(x) = \log x^3$

   D. $f(x) = 3x^2$

2. Pada tahun 1987 penduduk dunia ada 5 milyar jiwa dan bertambah dengan laju 16% pertahun. Jika dimisalkan laju pertumbuhan penduduk dunia tetap sebesar itu, maka banyaknya penduduk dunia P (dalam milyar) sejak 1987 dapat dituliskan sebagai fungsi dari tahun n sebagai berikut

   A. $P = 5(1{,}016)^n$

   B. $P = 1{,}6(5)^n$

   C. $P = 5(1{,}6)^n$

   D. $P = 1{,}6(1{,}5)^n$

3. Bentuk sederhana dari $\frac{x^2y^{-1}}{x^{-3}y} =$

   A. x^5y^2

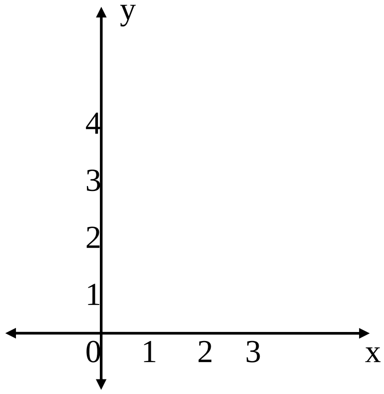
   B. x^6y

   C. x^5y^{-2}

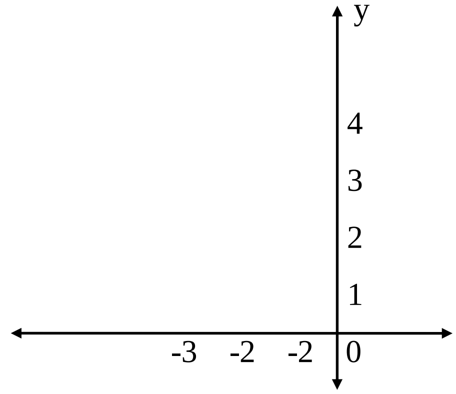
   D. $x^{-5}y^2$

4. Grafik fungsi eksponen y = f(x) = $(\frac{1}{2})^{x+1}$ adalah

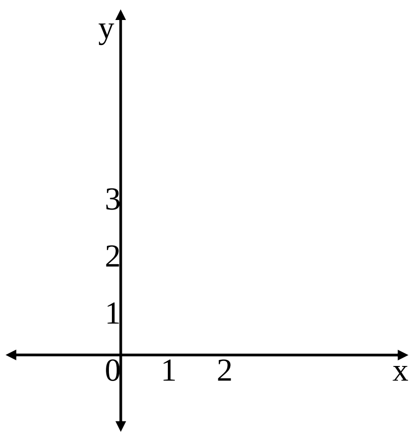
A.



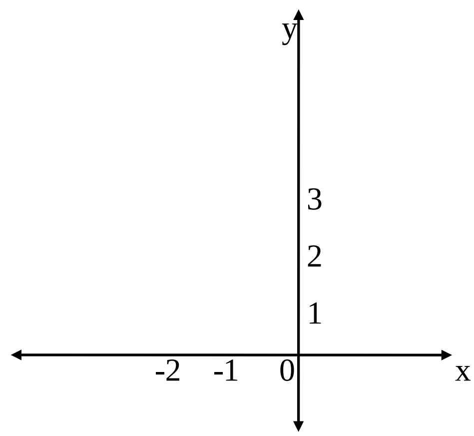
B.



C.

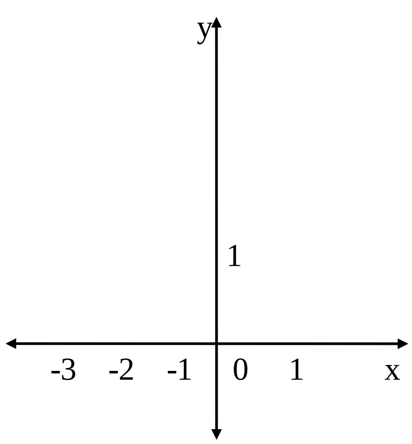


D.

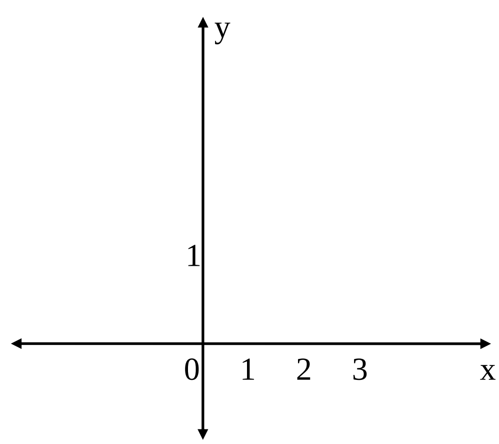


5. Grafik fungsi y = f(x) = $2^{x^2 - 2x}$

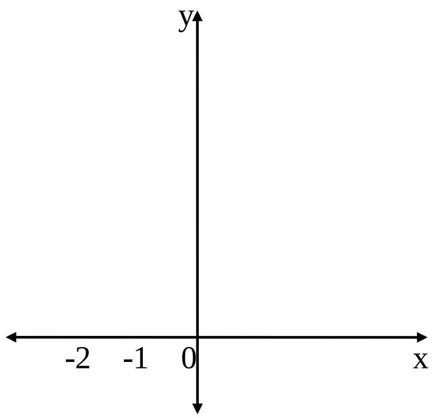
A.



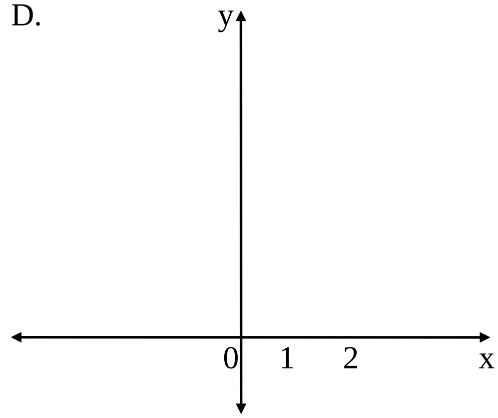
B.



C.



D.



6. Grafik fungsi $f(x) = 3^{-2x}$ melalui titik

A. (1, -9)

B. $(3, -\frac{1}{2})$

C. $(-\frac{1}{2}, -3)$

D. $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$

7. Fungsi $f(x) = a^x$ dengan $x \in R$ adalah fungsi naik untuk

A. $a < 1$

B. $a > 0$

C. $a < 0$

D. $a > 1$.

8. Jika log x = -5,889, maka dengan menggunakan daftar logaritma

A. x = 0,00129

B. x = 0,000129

C. x = 0,0000129

D. x = 0,00000129

9. Jika log 3 = 0,477, maka $^{3}\log 100$ =

A. 2,096

B. 0,954

C. 4,193

D. 0,238

10. Notasi $a^b = c$ dapat ditulis dalam bentuk

A. ${}^{a}\log c = b$ B. ${}^{b}\log c = a$

C. ${}^{c}\log a = b$ D. ${}^{a}\log b = c$

Selanjutnya cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat di bagian akhir Materi Pokok ini. Hitunglah jumlah jawaban Anda yang benar. Kemudian gunakan rumus di bawah ini untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 1.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{jumlah jawaban Anda yang benar}}{10} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan yang Anda capai :

90% - 100% = Baik sekali

80% - 89% = Baik

70% - 79% = Cukup

≤ 70% = Kurang.

Kalau Anda mencapai tingkat penguasaan 80% ke atas, Anda dapat meneruskannya pada Kegiatan Belajar kedua. **Bagus !** Tetapi bila tingkat penguasaan Anda masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum Anda kuasai. Selamat belajar, semoga berhasil.

KEGIATAN BELAJAR 2

FUNGSI EKSPONEN, FUNGSI LOGARITMA DAN APLIKASINYA
(Bagian 2)

---

a. <u>Fungsi Logaritma dan Grafiknya</u>

Sebagaimana telah disebut dalam membahas fungsi eksponen bahwa fungsi eksponen mempunyai kaitan yang erat dengan fungsi logaritma. Karena itulah pembahasan kedua fungsi transenden ini, disatukan dalam buku materi pokok ini.

Sekarng kita perhatikan kembali fungsi eksponen $y = a^x$. Setiap nilai x dari daerah asalnya (domainnya) akan mempunyai satu peta (satu bayangan) y yang tertentu. Demikian pula untuk setiap satu peta $y > 0$, berasal dari satu prapeta x. Jadi, jelaslah bahwa fungsi eksponen itu adalah fungsi satu-satu.

Karena fungsi eksponen $y = f(x) = a^x$ adalah fugsi satu-satu, maka ia akan mempunyai invers (balikan). Jika diberikan suatu fungsi f dan fungsi inversnya adalah fungsi f^{-1}, maka daerah asal f menjadi daerah hasil fungsi invers f^{-1} dan daerah hasil fungsi f menjadi daerah asal fungsi invers f^{-1}. Hal ini berarti jika

$$f = \{(x,y) \,/\, y = a^x \,,\, a > 0 \,,\, a \neq 1\} \text{ fungsi eksponensial, maka}$$

$$f^{-1} = \{(x,y) \,/\, x = a^y \,,\, a > 0 \,,\, a \neq 1\} \text{ adalah invers fungsi eksponen.}$$

Notasi $x = a^y$ dapat dinyatakan dalam bentuk $y = {}^a\log x$ yang disebut fungsi logaritma. Jadi,

$$f^{-1} = \{(x,y) \,/\, y = {}^a\log x \,,\, a > 0 \,,\, a \neq 1\}$$

adalah fungsi logaritma.

<u>Definisi 3</u>

Jika $a > 0$ dan $a \neq 1$, maka fungsi $g(x) = {}^a\log x$ dengan $x > 0$ dinamakan fungsi logaritma.

Selanjutnya perhatikan teorema berikut ini.

Fungsi logaritma $g(x) = {}^a\log x$ dengan $a > 0$ dan $a \neq 1$, adalah balikan (invers) dari fungsi eksponen $g(x) = a^x$.

Teorema ini dapat kita buktikan dengan bantuan teorema-teorema atau sifat-sifat bahwa $a^{{}^{a}\log x}$ dan ${}^{a}\log\ a^{x} = x$ untuk x $\in$ R, serta berdasarkan definisi fungsi invers dan (g o f)(x) = x. Sekarang

$$(g \circ f)(x) = f(g(x)) = f({}^{a}\log x) = a^{{}^{a}\log a^{x}} = x$$

atau

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(a^{x}) = {}^{a}\log\ a^{x} = x$$

Jadi fungsi logaritma merupakan invers (balikan) dari fungsi eksponen.

Dengan demikian menurut teorema ini grafik fungsi $y = {}^{a}\log x$ dapat kita peroleh melalui pencerminan grafik fungsi y = a^x terhadap garis lurus y = x bila fungsi y = a^x telah diketahui.

<u>Contoh 2.1</u>

(a). Gambarlah sketsa grafik y = f(x) = 2^x.

(b). Gambarlah sketsa grafik invers dari fungsi eksponen pada (a) dalam sistem koordinat yang sama.

(c). Tentukan persamaan fungsi invers itu.

Gambar 2.1

<u>Penyelesaian :</u>

(a). y = f(x) = 2^x telah kita buat sketsa grafiknya pada contoh 6 KBM I yang baru lalu. Ternyata bila x positif sangat besar, maka f(x) positif sangat kecil, dan mendekati nol. Sedangkan untuk x = 0, y = f(0) = 2^0 = 1.

(b). Bila y = f(x) = 2^x dipantulkan terhadap garis y = x seperti tampak pada gambar 2.1, maka hasil pencerminannya adalah grafik $y = {}^{2}\log x$.

(c). Persamaan fungsi inversnya adalah = y = $f^{-1}(x) = {}^{2}\log x$.

Contoh 2.2

Gambarlah grafik fungsi $y = {}^{3}\log x$ dan $y = {}^{\frac{1}{3}}\log x$ dengan $x \in R$ pada stu sistem koordinat.

Penyelesaian :

(a). Grafik fungsi $y = {}^{3}\log x$

(1). Titik-titik pada grafik

x	$0 \leftarrow \ldots \frac{1}{3} \quad 1 \quad 3 \ldots \rightarrow \sim$
y	$- \sim \leftarrow \ldots -1 \quad 0 \quad 1 \ldots \rightarrow \sim$

(2). Asimtotnya x = 0.

(b). Grafik fungsi $y = {}^{\frac{1}{3}}\log x$

(1). Titik-titik pada grafik

x	$0 \leftarrow \ldots \frac{1}{3} \quad 1 \quad 3 \ldots \rightarrow \sim$
y	$\sim \leftarrow \ldots \quad 1 \quad 0 \quad -1 \ldots \rightarrow - \sim$

(2). Asimtotnya x = 0.

Gambar 2.2

Dari beberapa contoh di atas, ternyata bahwa y = g(x) = ${}^{a}\log x$ dengan a > 1 merupakan *fungsi naik*(monoton naik), sebab bila $x_1 < x_2$, maka ${}^{a}\log x_1 < {}^{a}\log x_2$. Sedangkan grafik fungsi logaritma y = f(x) = ${}^{a}\log x$ dengan 0 < a < 1 merupakan *fungsi turun* (monoton turun), sebab bila $x_1 < x_2$, maka ${}^{a}\log x_1 > {}^{a}\log x_2$.

b. <u>Persamaan Eksponen dan Persamaan Logaritma</u>

Dalam bahasan yang sekarang ini kita akan melihat bagaimana sifat-sifat eksponen dan sifat-sifat logaritma digunakan untuk menyelesaikan persamaan yang memuat variabel dalam eksponen atau dalam logaritma.

Secara khusus, suatu persamaan yang memuat variabel sebagai eksponen dinamakan persamaan eksponen. Sedangkan persamaan logaritma adalah persamaan yang variabelnya termuat dalam bilangan pokok atau numerus dari suatu logaritma.

Dalam kesempatan ini kita akan membicarakan beberapa bentuk persamaan eksponen di antaranya beberapa bentuk berikut ini.

(1). Bentuk $a^{f(x)} = 1$

Jika $a^{f(x)} = 1$ dengan $a > 0$ dan $a \neq 1$, maka f(x) = 0.

(2). Bentuk $a^{f(x)} = a^{p}$

Jika $a^{f(x)} = a^{p}$ dengan $a > 0$ dan $a \neq 1$, maka f(x) = p.

(3). Bentuk $a^{f(x)} = a^{g(x)}$

Jika $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ dengan $a > 0$ dan $a \neq 1$, maka f(x) = g(x).

(4). Bentuk $a^{f(x)} = b^{f(x)}$

Jika $a^{f(x)} = b^{f(x)}$, a dan $b > 0$ dan $a \neq 1$, a tidak sebasis dengan b, maka f(x) = 0.

(5). Bentuk $a^{f(x)} = b^{g(x)}$

Jika $a^{f(x)} = b^{g(x)}$, $a > 0$, $b > 0$ dan $a \neq 1$; a tidak sebasis dengan b, $f(x) \neq g(x)$, maka $\log a^{f(x)} = \log b^{f(x)}$.

(6). Bentuk $(h(x)^{f(x)} = h(x)^{g(x)}$.

Himpunan penyelesaian dari bentuk ini mempunyai beberapa kemungkinan . Agar tidak berakibat terjadinya bilangan tidak real atau tidak terdefinisi, diperlukan beberapa teknik penyelesaian, diantaranya :

(a). Bila h(x) tidak sama dengan 0, 1 atau -1, maka f(x) = g(x)

(b). Bila h(x) = 0, maka persamaan akan dipenuhi untuk f(x) > 0 dan g(x) > 0.

(c). Bila h(x) = 1, maka persamaan akan dipenuhi untuk setiap f(x) dan g(x).

(d). Bila h(x) = -1, maka haruslah nilai dari $|f(x)|$ dan $|g(x)|$ kedua-duanya genap atau kedua-duanya ganjil.

(7). Bentuk $A\{a^{f(x)}\}^2 + B\{a^{f(x)}\} + c = 0$

Bentuk ini dapat ditentukan dengan mengubah menjadi persamaan kuadrat.

Untuk lebih jelasnya lagi dari beberapa bentuk persamaan eksponen di atas, kita lihat beberapa contoh dan cobalah kerjakan soal-soal baik dalam latihan maupun tes formatifnya.

Contoh 2.3

Selesaikanlah $4^{x-1} = \sqrt{2^{2x+1}}$

Penyelesaian :

$$4^{x-1} = \sqrt{2^{2x+1}}$$

$$\Leftrightarrow 2^{2(x-1)} = (2^{2x+1})^{\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow 2^{2x-2} = 2^{x+\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow 2x - 2 = x + \frac{1}{2}$$

$\Leftrightarrow x = 2\frac{1}{2}$.

Jadi, himpunan penyelesaiannya atau HP = $\{2\frac{1}{2}\}$.

<u>Contoh 2.4</u>

Tentukan himpunan penyelesaian dari persamaan eksponen $3^{x+2} - 3^{2x} = 18$.

<u>Penyelesaian</u> :

$3^{x+2} - 3^{2x} = 18$

$\Leftrightarrow 3^x \cdot 3^2 - (3^x)^2 = 18$

Misalkan $3^x = a$, maka diperoleh $9a - a^2 = 18$

$\Leftrightarrow 9a - a^2 - 18 = 0 \Leftrightarrow (a - 3)(a - 6) = 0$

$a_1 = 3 \rightarrow 3^x = 3 \Leftrightarrow x = 1$

$a_2 = 6 \rightarrow 3^x = 6 \Leftrightarrow x \log 3 = \log 6 \Leftrightarrow x = \frac{\log 6}{\log 3} = \frac{0{,}778}{0{,}477}$

$x = 1{,}6309$

Himpunan penyelesaiannya atau HP = { 1 , (1,6309)}.

Sekarang kita perhatikan beberapa bentuk persamaan logaritma yang akan dibahas dalam uraian ini, diantaranya.

(1). Bentuk ${}^a\log f(x) = {}^a\log p$

Jika ${}^a\log f(x) = {}^a\log p$, maka f(x) = p

Nilai x yang didapat perlu diperiksa agar tidak mengakibatkan terjadinya bilangan tak didefinisikan.

(2). Bentuk ${}^a\log f(x) = {}^a\log g(x)$.

Jika ${}^a\log f(x) = {}^a\log g(x)$, maka f(x) = g(x) > 0.

(3). Bentuk ${}^a\log f(x) = {}^b\log f(x)$

Jika ${}^{a}\log f(x) = {}^{b}\log f(x)$, a tidak sebasis dengan b, maka f(x) = 1.

(4). Bentuk ${}^{h(x)}\log f(x) = {}^{h(x)}\log g(x)$

Jika bentuknya seperti ini, maka nilai x yang memenuhi adalah f(x) = g(x) > 0, h(x) > 0, dan h(x) ≠ 1.

(5). Bentuk A{log x}^{2} + B{ ${}^{a}\log x$ } + c = 0

Dalam bentuk ini a > 0 dan a ≠ 1; A, B, dan C ∈ R dan A ≠ 0 dapat ditentukan dengan mengubah menjadi persamaan kuadrat.

Sebelum kita mencoba mengerjakan soal-soal latihan dan dalam test formatif, kita perhatikan dulu beberapa contoh menyelesaikan persamaan logaritma berikut ini.

<u>Contoh 2.5</u>

Selesaikanlah persamaan log (a + b) = 2 log x.

<u>Penyelesaian</u> :

log (x + 6) = 2 log x

⇔ log (x + 6) = log x^2

⇔ x + 6 = x^2 ⇔ x^2 - x - 6 = 0.

⇔ (x + 2)(x - 3) ⇔ x = -2 atau x = 3.

Jika x = -2 atau x = 3 dimasukkan ke f(x) dan g(x), maka terdapat f(x) = g(x) > 0, sehingga x = -2 dan x = 3 merupakan anggota himpunan penyelesaiannya.

Jadi, HP = { -2 , 3 }.

<u>Contoh 2.6</u>

Tentukanlah himpunan penyelesaian dari persamaan logaritma ${}^{2}\log^{2} x + 2.{}^{2}\log x^{2} - {}^{2}\log 8 = 2$

<u>Penyelesaian</u> :

${}^{2}\log^{2} x + 2.{}^{2}\log x^{2} - {}^{2}\log 8 = 2$

$\Leftrightarrow\ {}^{2}\log^{2} x + 4\,.\ {}^{2}\log x - 3 = 2$

Misalkan ${}^{2}\log x = p$, maka $p^2 + 4p - 5 = 0$

$\Leftrightarrow (p + 5)(p - 1) = 0$

$\Leftrightarrow p_1 = -5$ atau $p_2 = 1$

${}^{2}\log x = -5$ ${}^{2}\log x = 1$

$x = 2^{-5} = \frac{1}{32}$ $x = 2$

Jadi himpunan penyelesaiannya atau HP = { $\frac{1}{32}$, 2 }.

c. Aplikasi Fungsi Eksponen dan Fungsi Logaritma

Fungsi eksponen dan fungsi logaritma sering kita jumpai penerapannya dalam masalah yang berkaitan dengan pertumbuhan dan peluruhan seperti yang telah kita lihat dalam KBM 2yang lalu. Pembahasan secara lebih luas tentang aplikasi fungsi eksponen dan logaritma, termasuk dalam pertumbuhan dan peluruhan akan kita jumpai kelak dalam perkuliah matematika lanjut, yaitu dalam bahasan yang berhubungan dengan kalkulus. Namun dalam kesempatan ini kita akan melihat beberapa penerapan rumus sebagai aplikasi dari fungsi eksponen dan logaritma, diantaranya beberapa penyelesaian dari contoh-contoh berikut ini.

Contoh 2.7

Tentukan besarnya uang yang ditabungkan di Bank dengan bunga majemuk 20% pertahun agar dalam waktu 10 tahun uang itu menjadi Rp. 10.000.000,00.

Penyelesaian :

Misalkan uang yang ditabungkan mula-mula sebesar M, maka menurut contoh 1.4 dalam kegiatan belajar pertama, kita dapatkan :

$$M_t = M(1 + i)^t$$

$$M_{10} = M(1 + 0,20)^{10} = M(1,2)^{10} = 10.000.000$$

Jadi,

$$M = \frac{10.000.000}{(1,2)^{10}} = 10.000.000(1,2)^{-10} = 10^7 \,.\, (1,2)^{-10}$$

Dengan bantuan kalkulator kita dapatkan

$$M = 10^7 \,.\, (1,2)^{-10} = 10^7(0,161505582) = 1615055,829$$

$$M = \text{Rp. } 1.615.055 \qquad \text{(dibulatkan).}$$

Dengan bantuan logaritma

$$M = 10^7 \,.\, (1,2)^{-10}$$

$$\log M = \log 10^7 + \log (1,2)^{-10}$$

$$= 7 \log 10 - 10 \log 1,2$$

$$= 7 - 10(0,07918) = 7 - 0,7918$$

$$= 6,2081$$

$$M = \text{antilog } 6,2081 = 1.615.102,168$$

$$= \text{Rp. } 1.615.102,00 \qquad \text{(dibulatkan).}$$

Jadi, dalam jangka waktu 10 tahun uang sebanyak Rp. 1.615.102,00 akan menjadi Rp. 10.000.000,00 setelah ditabungkan di Bank yang memberikan bunga majemuk 20% pertahun.

<u>Contoh 2.8</u>

Jumlah penduduk kota X pada tahun 1994 mencapai 2 juta jiwa. Bila jumlah penduduk di kota tersebut meningkat dengan laju 2,5% pertahun dan andaikan laju pertambhan itu tetap sebesar itu dalam setiap tahunnya, tentukanlah banyaknya penduduk di kota X pada tahun 1999.

<u>Penyelesaian</u> :

Pertumbuhan penduduk pada dasarnya sama dengan pertambahan tabungan yang disimpan di Bank. Jadi, apabila banyaknya penduduk mula-mula P dengan tingkat kenaikan penduduk I%, sedangkan banyaknya penduduk setelah t tahun adalah P_t, maka tentunya banyaknya penduduk pada saat t tahun adalah :

$$P_t = P(1 + I)^t$$

Jadi, dari soal di atas kita dapatkan, banyaknya penduduk di kota X pada tahun 1999 (setelah 5 tahun) menjadi :

$$P_5 = 2.000.000\ (1 + 0{,}025)^5$$
$$= 2\ .\ 10^6\ .\ (1{,}025)^5$$

Dengan bantuan kalkulator, kita dapatkan

$$P_5 = 2\ .\ 10^6\ (1{,}025)^5$$
$$= 2\ .\ 10^6\ (1{,}1314)$$
$$= 2.262.816 \qquad \text{(dibulatkan).}$$

Dengan bantuan logaritma, didapatkan

$$P_5 = 2\ .\ 10^6\ (1{,}025)^5$$
$$\log P_5 = \log 2 + \log 10^6 + \log (1{,}025)^5$$
$$= \log 2 + 6 \log 10 + 5 \log (1{,}025)$$
$$= 0{,}3010299 + 6 + 5(0{,}0107238)$$
$$= 0{,}3010299 + 6 + 0{,}5361932$$
$$\log P_5 = 6{,}354649$$
$$P_5 = 2{,}262816 \qquad \text{(dibulatkan).}$$

Jadi, banyaknya penduduk di kota X setelah 5 tahun menjadi 2.262.816 orang (pembulatan).

Demikianlah sedikit gambaran tentang penerapan fungsi eksponen dan fungsi logaritma yang berkaitan dengan pertumbuhan. Sekarang kita akan melihat penerapan kedua fungsi ini dengan hal-hal yang berkaitan dalam peluruhan.

Misalkan kita mempunyai beberapa lembar kaca Andaikan setiap lembar kaca mengurangi cahaya yang menembusnya sebanyak 10%, maka intensitas cahaya yang berhasil menembus lembaran kaca ke-

1 adalah $100\ (1 - 1{,}10) = 90$

2 adalah $90\ (1 - 0{,}10) = 100\ (1 - 0{,}10)\ (1 - 0{,}10) = 100\ (1 - 0{,}10)^2 = 81$

3 adalah $81\ (1 - 0{,}10) = 100\ (1 - 0{,}10)\ (1 - 0{,}10)\ (1 - 0{,}10) = 100\ (1 - 0{,}10)^3 = 72{,}9$

$\vdots$

t adalah 100 (1 - 0,10) (1 - 0,10) (1 - 0,10) … (1 - 0,10) = 100 (1 - 0,10)^t.

Jadi, untuk setiap t lembar kaca, intensitas cahaya berkurang I, maka persentase cahaya P di permukaan yang menembus lembar kaca dapat kita tulis dalam bentuk :

$$P = 100\,(1 - i)^t.$$

Contoh 2.9

Misalkan untuk setiap meter masuk ke bawah permukaan laut, maka intensitas cahaya berkurang sekitar 2,5%. Pada kedalaman berapakah intensitas cahayanya tinggal 50% dari intensitas cahaya di permukaan air laut.

Penyelesaian :

Dari penjelasan di atas, maka kita dapatkan

$P = 100\,(1 - i)^t$

$50 = 100\,(- 1{,}025)^t$

$0{,}5 = (0{,}975)^t$

$\log 0{,}5 = t\ \log 0{,}975$

$$t = \frac{\log\ 0{,}5}{\log\ 0{,}975} = \frac{-0{,}30102999}{-0{,}01099538} = 27{,}377 = 27{,}38.$$

Jadi pada kedalaman sekitar 27 ,, intensitas cahaya itu hanya 50% dibandingkan intensitas cahaya di permukaannya. Kondisi ini akan mempengaruhi jenis organisme yang bisa hidup dengan intensitas cahaya yang relatif sedikit itu.

Selanjutnya untuk lebih memantapkan pemahaman Anda tentang materi kegiatan belajar ini, cobalah Anda kerjakan soal-soal latihan 2 berikut ini.

1. Gambarlah grafik fungsi logaritma $y = {}^2\log\,(2x - 2)$ dengan $x \in R$.

2. Selesaikanlah persamaan eksponen $9^{x^2+2x-\frac{3}{2}} = 3^{x^{2+4x-2}}$.

3. Selesaikanlah persamaan logaritma ${}^{x}\log 2 + {}^{2}\log x = 2$.

4. Selesaikanlah $6^{4x+1} = 9^{2x+1}$.

5. Di dalam sebuah uji coba ledakan nuklir, sebagian strontium 90 terlepas ke atmosfir. Zat ini mempunyai waktu paruh 28 tahun.
   (a). Nyatakan persentase P strontium 90 yang tersisa di atmosfir sebagai fungsi dari
      (i). Berapakah waktu paruh N telah berlalu
      (ii). Berapa tahun t telah berlalu sejak ledakan terjadi
   (b). Berapakah persentase strontium 90 yang masih tersisa di atmosfir akibat ledakan tadi 50 tahun kemudian ?

Setelah Anda mencoba menyelesaikan soal-soal latihan 2 di atas, bandingkanlah jawabannya dengan petunjuk alternatif jawaban berikut ini.

1. Grafik fungsi $y = {}^{2}\log(2x - 2)$
   (a). Asimtot : x = 1, sebab 2x - 2 > 0 atau x > 1
   (b). Titik-titik pada grafik (mulai dari numerus $\frac{1}{2}$)

y	x
$1\frac{1}{4}$	-1
$1\frac{1}{2}$	0
2	1

   (c). Cara lain :

$$y = {}^{2}\log(2x - 2)$$

$$= {}^{2}\log 2 + {}^{2}\log(x - 2) = 1 + {}^{2}\log(x - 2) \text{ dst.}$$

2. $9^{x^2+2x-\frac{3}{2}} = 3^{x^{2+4x-2}}$

$(3^2)^{x^2+2x-\frac{3}{2}} = 3^{x^{2+4x-2}}$

$3^{2x^2+4x-3} = 3^{x^{2+4x-2}}$

$2x^2 + 4x - 3 = x^2 + 4x - 2$

$x^2 - 1 = 0$

$(x + 1)(x - 1) = 0$

$x = -1$ atau $x = 1$

Jadi himpunan penyelesaiannya atau HP = {1 , -1}.

3. ${}^{x}\log 2 + {}^{2}\log x = 2.$

$\frac{\log 2}{\log x} + \frac{\log x}{\log 2} = 2$

$\frac{\log 2 . \log 2 + \log x . \log x}{\log x . \log 2} = 2.$

$(\log 2)^2 + (\log x)^2 = 2 \log x . \log 2.$

$(\log x)^2 - 2 \log x . \log 2 + (\log 2)^2 = 0$

$(\log x - \log 2)^2 = 0$

$\log x - \log 2 = 0$

$\log x = \log 2$

$x = 2$

Jadi, HP = { 2 }.

4. $6^{4x + 1} = 9^{2x + 1}.$

$\text{Log } 6^{4x + 1} = \log 9^{2x + 1}.$

$(4x + 1) \log 6 = (2x + 1) \log 9$

$4x \log 6 + \log 6 = 2x \log 9 + \log 9$

$4x \log 6 - 2x \log 9 = \log 9 - \log 6$

$x = \dfrac{\log 9 - \log 6}{4\log 6 - 2\log 9} = 0{,}1462$

Jadi, HP = { 0,1462 }.

5. Soal nomor 5 ini berkaitan dengan peluruhan tentang waktu paruh suatu zat radioaktif. Fungsi eksponen sangat berguna dalam penelitian tentang hujan radioaktif, yaitu pencemaran atmosfir dan permukaan bumi oleh partikel-pertikel radio aktif yang terlepas oleh ledakan nuklir atau kecelakaan nuklir di pusat-pusat pembangkit tenaga nuklir. Pengaruh pengrusakan terjadi ketika partikel-pertikel itu meluruh menjadi partikel-pertikel lain dan melepaskan radiasi. Setiap zat radio aktif meluruh dengan waktu paruh tertentu yang khas untuk setiap zat tersebut. Waktu paruh adalah waktu yang diperlukan bagi separuh dari zat itu untuk meluruh dan habis dengan sendirinya.

(a). (i). Setelah setiap kali satu waktu paruh berlalu, persentase yang tersisa tinggal separuhnya. Karenanya, persentase yang tersisa setelah n waktu paruh berlalu, adalah $P = 100(\frac{1}{2})^n$.

(ii). Karena t = 28, maka persamaan eksponen di atas dapat kita nyatakan dalam t. Kita substitusikan $\frac{t}{28}$ ke dalam n, sehingga kita dapatkan

$$P = 100\,(\frac{1}{2})^{\frac{t}{28}}$$

(b). Jika t = 50, maka kita peroleh

$$P = 100\,(\frac{1}{2})^{\frac{50}{28}}$$

$$\log P = \log 100 + \log\,(\frac{1}{2})^{\frac{50}{28}} = 2 + \frac{50}{28}\log\frac{1}{2}$$

$$= 2 + \frac{50}{28}\,(-\,0,\,3010299) = 2 - (0{,}5377)$$

$$\log P = 1,\,4624$$

$$P = 29{,}003234$$

Jadi, walaupun setelah 50 tahun ledakan strontium 90 terjadi, ternyata masih sekitar 29% yang tersisanya.

Setelah Anda mempelajari kegiatan belajar yang kedua dari buku materi pokok ini, buatlah rangkumannya, kemudian bandingkan dengan alternatif rangkuman berikut.

Rangkuman

1. Bentuk $^{a}\log x$ dengan $a > 0$ dan $a \neq 1$ disebut fungsi logaritma yang merupakan invers dari fungsi eksponen $y = a^x$. Sedangkan grafik fungsi logaritma diperoleh dari grafik fungsi eksponen yang dicerminkan terhadap garis $y = x$.

2. Sifat-sifat fungsi logaritma $y = g(x) = {}^{a}\log x$.

   (a). Domain (daerah asalnya) adalah himpunan bilangan real positif $D_f = (0 , \sim)$. Sedangkan daerah hasilnya (rangenya) adalah himpunan semua bilangan real, $R_f = (- \sim , + \sim)$.

   (b). Nilai fungsi pada $x = 1$ adalah nol, berarti grafiknya selalu melalui titik (1,0).

   (c). Jika $a > 1$, maka fungsinya merupakan fungsi naik dan jika $0 < a < 1$, maka fungsinya merupakan fungsi turun.

   (d). Asimtot tegaknya adalah sumbu y dan fungsi ini bersifat satu-satu.

4. Beberapa bentuk persamaan eksponen, diantaranya :

   (a). Bentuk $a^{f(x)} = 1$

   Jika $a^{f(x)} = 1$ dengan $a > 0$ dan $a \neq 1$, maka $f(x) = 0$.

   (b). Bentuk $a^{f(x)} = a^p$

   Jika $a^{f(x)} = a^p$ dengan $a > 0$ dan $a \neq 1$, maka $f(x) = p$.

   (c). Bentuk $a^{f(x)} = a^{g(x)}$

   $= a^{g(x)}$ dengan $a > 0$ dan $a \neq 1$, maka $f(x) = g(x)$.

   (d). Bentuk $a^{f(x)} = b^{f(x)}$

   Jika $a^{f(x)} = b^{f(x)}$, a dan $b > 0$ dan $a \neq 1$, a tidak sebasis dengan b, maka $f(x) = 0$.

(e). Bentuk $a^{f(x)} = b^{g(x)}$

Jika $a^{f(x)} = b^{g(x)}$, $a > 0$, $b > 0$ dan $a \neq 1$; a tidak sebasis dengan b, $f(x) \neq g(x)$, maka $\log a^{f(x)} = \log b^{f(x)}$.

(f). Bentuk $(h(x))^{f(x)} = h(x)^{g(x)}$.

Himpunan penyelesaian dari bentuk ini mempunyai beberapa kemungkinan . Agar tidak berakibat terjadinya bilangan tidak real atau tidak terdefinisi, diperlukan beberapa teknik penyelesaian, diantaranya :

(1). Bila h(x) tidak sama dengan 0, 1 atau -1, maka f(x) = g(x)

(2). Bila h(x) = 0, maka persamaan akan dipenuhi untuk $f(x) > 0$ dan $g(x) > 0$.

(3). Bila h(x) = 1, maka persamaan akan dipenuhi untuk setiap f(x) dan g(x).

(4). Bila h(x) = -1, maka haruslah nilai dari $|f(x)|$ dan $|g(x)|$ kedua-duanya genap atau kedua-duanya ganjil.

(g). Bentuk $A\{a^{f(x)}\}^2 + B\{a^{f(x)}\} + c = 0$ dapat ditentukan dengan mengubah menjadi persamaan kuadrat.

5. Beberapa bentuk persamaan logaritma, diantaranya :

(a). Bentuk ${}^{a}\log f(x) = {}^{a}\log p$

Jika ${}^{a}\log f(x) = {}^{a}\log p$, maka f(x) = p

Nilai x yang didapat perlu diperiksa agar tidak mengakibatkan terjadinya bilangan tak didefinisikan.

(b). Bentuk ${}^{a}\log f(x) = {}^{a}\log g(x)$.

Jika ${}^{a}\log f(x) = {}^{a}\log g(x)$, maka $f(x) = g(x) > 0$.

(c). Bentuk ${}^{a}\log f(x) = {}^{b}\log f(x)$

Jika ${}^{a}\log f(x) = {}^{b}\log f(x)$, a tidak sebasis dengan b, maka f(x) = 1.

(d). Bentuk ${}^{h(x)}\log f(x) = {}^{h(x)}\log g(x)$

seperti ini, maka nilai x yang memenuhi adalah $f(x) = g(x) > 0$, $h(x) > 0$, dan $h(x) \neq 1$.

(e). Bentuk A{log x}^{2} + B{ ^{a}log x } + c = 0

Dalam bentuk ini $a > 0$ dan $a \neq 1$; A, B, dan C $\in$ R dan $A \neq 0$ dapat ditentukan dengan mengubah menjadi bentuk persamaan kuadrat.

6. Fungsi eksponen dan logaritma mempunyai aplikasi yang luas dan salah satunya sering dijumpai dalam pertumbuhan dan peluruhan, diantaranya :

(a). Pertumbuhan

(1). Bunga majemuk $M_t = M(1 + i)^t$

(2). Pertumbuhan penduduk $P_t = P(1 + I)^t$

(b). Peluruhan

(1). Persentase intensitas cahaya $P = 100(1 - i)^t$

(2). Persentase waktu paruh $P = 100 \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

TES FORMATIF 2

Untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda, kerjakanlah soal-soal Tes Formatif 2 berikut dengan memberi tanda silang (X) di muka pernyataan yang benar.

1. Fungsi logaritma y = ^{b}log x dengan $b > 0$ dan $b \neq 1$ adalah invers dari fungsi eksponen

A. $x = b^y$ B. $y = b^x$

C. $y = x^b$ D. $x = y^b$

2. Grafikfungsi logaritma y = 3 + ^{3}log x

A. B.

C. D.

3. Grafik fungsi logaritma y = ${}^{\frac{1}{3}}\log x$ merupakan bayangan dari pencerminan grafik fungsi eksponen berikut pada garis y = x.

A. $x = (\frac{1}{3})^y$ B. $x = (3)^y$

C. $y = (\frac{1}{3})^x$ D. $y = (3)^x$

4. Penyelesaian dari persamaan eksponensial $4^{2x} + 4^{x-2} = 0$

A. -2 B. -2 atau 0

C. -1 atau 2 D. 0

5. Penyelesaian dari persamaan eksponensial $8^{x-2} = \frac{1}{16}$.

A. 2 B. $\frac{2}{3}$

C. 3 D. $\frac{3}{2}$

6. Penyelesaian persamaan logaritma ${}^{3}\log(2x - 5) = {}^{5}\log(2x - 5)$

A. 1 B. 3

C. 2 D. ϕ

7. Himpunan penyelesaian persamaan logaritma ${}^{3}\log^{2} x + {}^{3}\log x^{2} - 3 = 0$

A. { -3 , 1} B. { -3 , 3 }

C. $\{ 3 , \frac{1}{27} \}$ D. $\{ \frac{1}{27} , -3 \}$

8. Bakteri E-coli adalah suatu bakteri tunggal. Ia membelah diri menjadi dua setiap sekitar 20 menit bila berada pada kondisi yang ideal bagi kehidupannya. Jika satuan waktunya 20 menit, maka waktu yang diperlukan untuk perkembangan bakteri coli yang pada awalnya ada 1000 bakteri sehingga menjadi 64.000 bakteri adalah :

A. 160 menit B. 130 menit

C. 120 menit D. 100 menit

9. Misalkan Anda menyimpan uang di Bank sebesar Rp. 500.000,00 dengan tingkat suku bunga majemuk 12% per tahun. Lamanya waktu yang diperlukan supaya uang simpanan Anda di Bank menjadi dua kali lipat

   A. 3,1 tahun   B. 4,1 tahun

   C. 5,1 tahun   D. 6,1 tahun

10. Untuk setiap meter di bawah permukaan air laut, misalkan intensitas cahayanya berkurang 5 %. Jika intensitas cahayanya tinggal 40% dari intensitas cahaya di permukaan, maka kedalaman di lautnya adalah

   A. 17,86 meter   B. 17,68 meter

   C. 18,76 meter   D. 18,67 meter

Selanjutnya cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 2 yang terdapat di bagian akhir Materi Pokok ini. Hitunglah jumlah jawaban Anda yang benar. Kemudian gunakan rumus di bawah ini untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 2.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{jumlah jawaban Anda yang benar}}{10} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan yang Anda capai :

90% - 100% = Baik sekali

80% - 89% = Baik

70% - 79% = Cukup

$\leq$ 70% = Kurang.

Kalau Anda mencapai tingkat penguasaan 80% ke atas, Anda dapat meneruskannya pada modul yang lainnya. **Bagus !** Tetapi bila tingkat penguasaan Anda masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi Kegiatan Belajar 2, terutama bagian yang belum Anda kuasai. Selamat belajar, semoga berhasil.

KUNCI JAWABAN TES FORMATIF

Modul 7

Tes Formatif 1

1. B $f(x) = 2^{x+1}$ adalah contoh dari fungsi eksponen, sebab variabel bebasnya merupakan pangkat atau eksponen dari bilangan (2).

2. A Penduduk dunia tahun

   1988 adalah 5 + (5 x 0,016) = 5(1 + 0,016) = 5(1,016)

   1989 adalah 5(1,016) + (5(1,016) . 0,016) = $5(1,016)^2$

   dst.

   19… adalah $5(1,016)^n$, berarti p =$(1,016)^n$.

3. C $\dfrac{x^2y^{-1}}{x^3y} = (x^2\,y^{-1})(x^3\,y^{-1}) = x^5\,y^{-2}$

4. B $y = f(x) = (\frac{1}{2})^{x+1}$

Titik-tik pada grafik

x	$-\sim \leftarrow \ldots$	-3	-2	-1	0	$\ldots \to \sim$
y	$\sim \leftarrow \ldots$	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\ldots \to 0$

Asimtot tegak tidak ada dan asimtot datarnya y = 0

5. B $y = f(x) = 2^{x^2-2x}$

Harga minimum $x^2 - 2x$ dicapai untuk $x = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{2} = 1$

Titik-titik pada grafik

x	$-\sim \leftarrow \ldots$	0	1	2	3	$\ldots \to \sim$
y	$\sim \leftarrow \ldots$	1	$\frac{1}{2}$	1	8	$\ldots \to \sim$

Asimtot tegaknya dan asimtot datarnya tidak ada.

6. D $y = f(x) = 3^{-2x}$

Titik-titik pada grafik

x	$-\sim \leftarrow \ldots$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\ldots \to \sim$
y	$\sim \leftarrow \ldots$	0	3	1	$\frac{1}{3}$	$\ldots \to 0$

7. D $f(x) = a^x$ adalah fungsi naik untuk a > 1 sebab jika $x_1 < x_2$, maka $a^{x_1} < a^{x_2}$.

8. D Karena log x tidak dalam bentuk baku, maka diubah dalam bentuk baku, yaitu :

log x = -3,889 = 0,111 + (-6)

dari daftar logaritma, diperoleh antilog 0,111 = 1,29

Jadi x = 1,29 x 10^{-6} = 0,00000129

9. C $^{3}\log 100 = \frac{\log 100}{\log 3} = \frac{2}{0{,}477} = 4{,}193.$

10. A Menurut definisi logaritma sebagai invers dari pernyataan $a^b = c$ adalah ekuivalen dengan $^{a}\log c = b$.

Tes Formatif 2

1. B Jika $g(x) = {}^{b}\log x$ maka $f(x) = b^{x}$ sebab

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f({}^{b}\log x) = b^{{}^{b}\log x} = x$ dan

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(b^{x}) = {}^{b}\log b^{x} = x\,{}^{b}\log b = x$

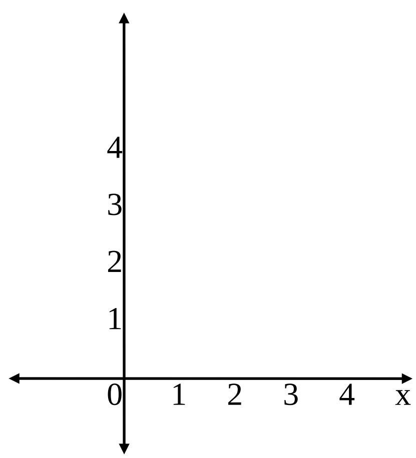
2. A Grafik $y = 3 + {}^{3}\log x$

(a). Asimstotnya : $x = 0$

(b). Titik-titik pada grafik

x	…	$\frac{1}{3}$	1	3
y	…	2	3	4

(c). Grafiknya :



3. C Menurut teorema grafik fungsi $y = {}^{a}\log x$ dapat diperoleh melalui pencerminan grafik fungsi $y = a^{x}$ terhadap garis lurus $y = x$. Jadi grafik fungsi logaritma $y = {}^{\frac{1}{3}}\log x$ tentunya bayangan dari pencerminan grafik fungsi eksponen $y = \frac{1}{3}$ x terhadap garis $y = x$. (Silakan Anda mencoba menggambar grafik kedua fungsi tersebut).

4. D. $4^{2x} + 4^{x} - 2 = 0$

Misalkan $4^{x} = a$, maka $a^{2} + a - 2 = 0$

$\Leftrightarrow$ (a + 2)(a - 1) = 0

$\Leftrightarrow$ a = -2 atau a = 1

untuk a = -2 tidak ada penyelesaian, sebab tidak ada harga x yang memenuhi 4^x = -2, sedangkan untuk a = 1 kita peroleh $4^x = 1$ atau x = 0. Jadi penyelesaiannya adalah 0 atau HP = { 0 }.

5. B

$$8^{x-2} = \frac{1}{16}$$

$$\Leftrightarrow (2^3)^{x-2} = \frac{1}{2^4}$$

$$\Leftrightarrow 2^{3x-6} = 2^{-4}$$

$\Leftrightarrow$ 3x - 6 = -4

$\Leftrightarrow$3x = 2

$$\therefore x = \frac{2}{3}$$

6. B

$${}^3\log(2x - 5) = {}^5\log(2x - 5)$$

$\Leftrightarrow$ 2x - 5 = 1, karena bilangan dasar logaritma tidak sama, sedangkan numerusnya sama yaitu (2x - 5)

$\Leftrightarrow$ 2x = 6

$\therefore$ x = 3.

7. C

$${}^3\log^2 x + {}^3\log x^2 - 3 = 0$$

$$({}^3\log x)^2 + 2({}^3\log x) - 3 = 0$$

Misalkan ${}^3\log x$ = a, maka

$a^2 + 2a - 3 = 0$

(a + 3)(a - 1) = 0

a = -3 atau a = 1

$${}^3\log x = -3 \rightarrow x = 3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$$

$^{3}\log x = 1 \rightarrow x = 3^1 = 3$

Jadi himpunan penyelesaiannya atau HP = $\{ \frac{1}{27}, 3 \}$.

8. C Karena pada awalnya banyaknya bakteri coli ada 1000 bakteri, maka setelah satu satuan waktu berlalu akan menjadi 2000 bakteri, 4000 bakteri setelah dua satuan waktu, 8000 bakteri setelah tiga satuan waktu, dst. Secara umum diperoleh $F(t) = 1000(2)^t$ bakteri tepat setelah t satuan waktu. Ini tentu saja kita menganggap tidak ada bakteri yang mati selama periode itu. Bentuk

dari $f(t) = 1000(2)^t$

dan $f(t) = 64.000$

maka $64.000 = 1000(2)^t$

atau $64 = 2^t$, atau $2^6 = 2^t$

atau $t = 6$.

Jadi, waktu yang diperlukannya 6 x 20 menit = 120 menit.

9. D $M_t = M(1 + I)^t$ atau

$1000.000 = 500.000(1 + 0,12)^t$

$(1,12)^t = 2$

$t \log 1,12 = \log 2$ atau $t = \dfrac{\log 2}{\log 1,12} = \dfrac{0,301029995}{0,049218022} \approx 6,116$

Jadi, waktu yang diperlukannya sekitar 6,1 tahun

10. A $P = 100(1 - I)^t$

$40 = 100(1 + 0,05)^t$

$40 = 100(0,95)^t \Leftrightarrow (0,95)^t = 0,4$

$t \log 0,95 = \log 0,4$

$t = \dfrac{\log 0,4}{\log 0,95} \approx 17,86$

Jadi pada kedalaman 17,86 meter, intensitas cahayanya di dalam laut itu tinggal 40% dibandingkan dengan intensitas cahayanya di permukaannya.

DAFTAR PUSTAKA

Andi hakim Nasution, dkk.(1994). Matematika 2 Untuk Sekolah Menengah Umum Kelas 2, Jakarta : Depdikbud, Balai Pustaka.

Endang daiman dan Tri Dewi L (1995). Penuntun Belajar Matematika 2, Bandung : Ganeca Exact.

Endi Nurgana (1986). Aljabar Untuk Guru / Calon Guru Matematika SMTP-SMTA, Bandung : CV. Permadi.

Karso (1997). Telaah Materi Kurikulum Matematika SMU : Telaah Materi Fungsi dan Komposisinya, Jakarta : FKIP-UT.

K. Martono (1992). Kalkulus 1 Sistem Bilangan Real dan Fungsi, Bandung : Jurusan Matematika FMIPA-ITB.

Louis Leithold (1976). The Calculus With Analytic Geometry, Third Edition, New York, Hagerstown, San Fransisco, London : Harper & Row, Publishers.

Utari Sumarmo (1988-1999). Matematika PGSMTP Jilid 2 Aljabar, Bandung : PPPG Tertulis.

Walter Fleming and Dell Verberg (1982). Algebra and Trigonometry, New Jersey : Prentice Hal Inc.

Walter Van Stigt (1978). Success in Mathematics, London : Jhon Murray Publihsing Ltd.