PENERAPAN ALJABAR LINEAR

Pendahuluan

Benyak hukum fisika, kimia, biologi, dan ekonomi yang diuraikan dalam bentuk persamaan diferensial, yaitu persamaan-persamaan yang melibatkan fungsi-fungsi dan turunannya. Demikian pula dalam mengkaji grafik irisan kerucut dalam persamaan kuadratik banyak melibatkan konsep-konsep aljabar linear. Dalam memperdalam dan memperluas materi-materi matematika lanjut lainnya banyak pula yang memerlukan konsep-konsep aljabar linear, misalnya geometri dengan operator linear pada R^2 penyesuaian (*fitting*) suatu kurva ke data percobaan, persamaan normal, masalah-masalah aproksimasi atau hampiran dan deret Fourier, pengukuran galat sampai permukaan kuadratik dalam geometri analitik bidang maupun ruang.

Materi-materi pembelajaran penerapan aljabar linear ini sangat diperlukan pula untuk memantapkan pemahaman aljabar linear khususnya serta matematika lanjut lainnya. Hal ini dipandang perlu sebagai bekal, sebagai pendalaman, dan sebagai pengayaan dalam mempelajari matematika di sekolah lanjutan maupun dalam mempelajari materi-materi matematika lanjut lainnya.

Adapun cakupan bahasan pembelajaran modul ini meliputi terminologi persamaan diferensial, sistem linear persamaan-persamaan order pertama, prosedur untuk menyelesaikan suatu sistem persamaan diferensial linear order pertama, masalah aproksimasi, deret Fourier. Cakupan berikutnya sebagai cakupan lanjutannya meliputi bentuk kuadrat, diagonalisasi bentuk kuadrat, penerapan pada irisan kerucut (*conic section*) sampai penerapan pada permukaan kuadrik.

Perlu pula diketahui, bahwa secara umum setelah Anda mempelajari bahasan diskusi pembelajaran modul yang ke-12 ini diharapkan dapat menggunakan konsep-konsep dalam aljabar linear untuk menyelesaikan soal penerapan. Sedangkan untuk menunjang kemampuan-kemampuan tersebut secara khusus tujuan pembelajarannya mengharapkan Anda untuk dapat:

a. menggunakan konsep dalam aljabar linear untuk menyelesaikan soal persamaan diferensial dan aproksimasi;
b. menggunakan konsep dalam aljabar linear untuk menentukan persamaan konik (*conic*) dan kuadrik (*quadric*) dalam sistem koordinat.

Adapun susunan materi dalam modul ini terbagi menjadi dua kegiatan belajar sebagai berikut.

Kegiatan Belajar 1: Penerapan pada persamaan diferensial dan penerapan pada masalah aproksimasi.

Kegiatan Belajar 2: Aplikasi pada bentuk kuadrat, aplikasi pada irisan kerucut, dan penerapan pada bentuk permukaan kuadrik (*quadric*).

Petunjuk Belajar

Untuk dapat memahami modul ini dengan baik serta mencapai kompetensi yang diharapkan, gunakanlah strategi belajar berikut:

1. Sebelum membaca modul ini, cermati terlebih dahulu glosarium pada akhir modul yang memuat istilah-istilah khusus yang digunakan dalam modul ini.
2. Baca materi modul dengan seksama, tambahkan catatan pinggir, berupa tanda tanya, pertanyaan, konsep lain yang relevan, dan lain-lain sesuai dengan pemikiran yang muncul.
3. Cermati dan kerjakan soal-soal latihan dan tes formatif seoptimal mungkin, dan gunakan rambu-rambu jawaban untuk membuat penilaian tentang kemampuan pemahaman Anda.
4. Buatlah catatan khusus hasil diskusi dalam tutorial untuk digunakan dalam pembuatan tugas dan ujian akhir.
5. Usahakan Anda mempelajari beberapa buku sumber penunjang lainnya.

KEGIATAN BELAJAR 1
PENERAPAN PADA PERSAMAAN DIFERENSIAL

A. Penerapan pada Persamaan Diferensial

a. Terminologi

Seperti telah disebutkan dalam pendahuluan bahwa banyak hukum-hukum fisika, kimia, biologi, dan ekonomi yang dijelaskan dalam bentuk persamaan diferensial, yaitu persamaan yang melibatkan fungsi-fungsi dan turunannya. Pada bahasan pembelajaran petama ini akan didiskusikan satu cara yang aljabar linearny adapat diterapkan untuk menyelesaikan sistem persamaan diferensial tertentu.

Sekarang kita perhatikan suatu persamaan diferensial yang tersederhana, yaitu

$$y' = a\,y \quad \text{..} \quad (1)$$

dengan y = f(x) adalah sebuah fungsi yang tidak diketahui dan akan ditentukan turunannya yaitu $y' = \frac{dy}{dx}$ dengan a adalah konstanta. Seperti kebanyakan persamaan diferensial, maka (1) mempunya tak terhingga banyaknya penyelesaian, yaitu fungsi-fungsi yang berbentuk

$$y = c\,e^{ax} \quad \text{..............................} \quad (2)$$

dengan c adalah sebarang konstanta. Setiap fungsi dalam bentuk seperti ini merupakan penyelesaian dari y' = ay, sebab

$$y' = c\,a\,e^{ax} = a\,y.$$

Demikian pula sebaliknya, setiap penyelesaian dari $y' = a\,y$ haruslah merupakan sebuah fungsi yang berbentuk $c\,e^{ax}$, sehingga (2) menguraikan semua penyelesaian dari $y' = a\,y$. Kita namakan (2) sebagai **penyelesaian umum** (*general solution*) dari $y' = a\,y$.

Adakalanya masalah fisika yang menghasilkan suatu persamaan diferensial menimbulkan syarat tambahan yang memungkinkan kita untuk mengisolasi suatu **penyelesaian khusus** (*particular solution*) dari penyelesaian umum. Misalnya, jika kita menuntut bahwa penyelesaian dari $y' = a\,y$ memenuhi kondisi tambahan

$$Y(0) = 3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. \quad (3)$$

Yaitu $y = 3$ jika $x = 0$, maka dengan mensubstitusikan nilai-nilai ini pada penyelesaian umum $y = c\, e^{ax}$ kita akan mendapatkan suatu nilai untuk c, yaitu

$$3 = c\, e^0 = c$$

Jadi,

$$Y = 3\, e^{ax}$$

Adalah satu-satunya penyelesaian dari $y' = a\, y$ yang memenuhi syarat tambahan tersebut. Sebuah syarat seperti (3), yang menentukan nilai penyelesaian pada sebuah titik, dinamakan **syarat awal**, (*initial condition*), dan masalah menyelesaikan suatu persamaan diferensial yang memenuhi syarat awal disebut **masalah nilai awal** (*initial value problem*).

b. Sistem Linear Persamaan-persamaan Order Pertama.

Sekarang kita akan mendiskusikan bahasan pembelajaran bagaimana menyelesaikan sistem persamaan diferensial yang berbentuk:

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}\, y_1 + a_{12}\, y_2 + \ldots + a_{1n}\, y_n \\ y_2' &= a_{21}\, y_1 + a_{22}\, y_2 + \ldots + a_{2n}\, y_n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. \quad (4) \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n1}\, y_1 + a_{n2}\, y_2 + \ldots + a_{nn}\, y_n \end{aligned}$$

dengan $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x)$, ..., $y_n = f_n(x)$ adalah fungsi-fungsi yang akan ditentukan, dan a_{ij} adalah konstanta-konstanta. Dengan notasi matriks bentuk (4) dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

atau secara lebih singkat dapat kita tulis dalam bentuk:

$$Y' = A\, Y$$

Contoh 12. 1

Diketahui $\quad y_1' = 3y_1$

$y_2' = -2y_2$

$y_3' = 5y_3$

a) Tulislah system tersebut dalam bentuk matriks

b) Selesaikan system tersebut

c) Carilah penyelesaian system yang memenuhi syarat awal $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 4$ dan $y_3(0) = -2$

Penyelesaian:

a) $$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. \quad (5)$$

atau

$$Y' = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} Y$$

b) Karena setiap persamaan hanya memuat satu fungsi peubah, maka kita dapat menyelesaikan persamaan tersebut secara sendiri-sendiri. Dari (2), kita dapatkan

$$y_1 = c_1\, e^{3x}$$

$$y_2 = c_2\, e^{-2x}$$

$$y_3 = c_3\, e^{5x}$$

atau dalam notasi matriks dapat kita tulis dalam bentuk:

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1\, e^{3x} \\ c_2\, e^{-2x} \\ c_3\, e^{5x} \end{bmatrix}$$

c) Dari syarat yang diberikan, kita dapatkan

$$1 = y_1(0) = c_1\, e^0 = c_1$$

$$4 = y_2(0) = c_2\, e^0 = c_2$$

$$-2 = y_3(0) = c_3\, e^0 = c_3$$

sehingga penyelesaian yang memenuhi syarat awal adalah

$$y_1 = e^{3x},\ y_2 = 4e^{-2x},\ y_3 = -2e^{5x}$$

atau dalam notasi matriks:

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{3x} \\ 4e^{-2x} \\ -2e^{5x} \end{bmatrix}$$

Sistem dalam contoh 12. 1 di atas mudah untuk diselesaiak karena setiap persamaan hanya melibatkan satu fungsi peubah, dan hal tersebut terjadi karena matriks koefisien persamaan (5) untuk sistem tersebut adalah diagonal. Namun bagaimana jika kita ingin menangani sistem

$$Y' = A\,Y$$

yang ternyata matriks A-nya tidak diagonal? Gagasannya sederhana saja: Coba membuat suatu substitusi untuk Y yang akan menghasilkan sebuah sistem baru dengan sebuah matriks koefisien diagonal; selesaikanlah sistem baru yang lebih sederhana ini, dan kemudian gunakan penyelesaian ini untuk menentukan penyelesaian sistem aslinya.

Jenis substitusi yang ada dalam pikiran kita adalah

$$\begin{aligned} y_1 &= p_{11}u_1 + p_{12}u_2 + \dots + p_{1n}u_n \\ y_2 &= p_{21}u_1 + p_{22}u_2 + \dots + p_{2n}u_n \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (6) \\ &\vdots \\ y_n &= p_{n1}u_1 + p_{n2}u_2 + \dots + p_{nn}u_n \end{aligned}$$

atau dalam notasi matriks

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

atau secara lebih singkat,

$$Y = P\,U$$

Pada substitusi ini p_{ij} adalah konstanta-konstanta yang akan ditentukan dengan suatu cara sedemikian rupa sehingga sistem baru yang melibatkan fungsi-fungsi peubah

$u_1, u_2, \ldots, u_n$ mempunyai matriks koefisien diagonal. Kami memberikan sebagai latihan kepada Anda untuk menurunkan setiap persamaan dalam (6) sehingga Anda dapat menyimpulkan

$$Y' = P\,U'$$

Jika kita membuat substatusi Y = P U dan Y' = P U' pada sistem asalnya

$$Y' = A\,Y$$

dan jika kita menganggap P invertibel, maka kita dapatkan

$$P\,U' = A\,(PU)$$

atau

$$U' = (P^{-1}\,A\,P)\,U$$

atau

$$U' = D\,U$$

dengan $D = P^{-1}\,A\,P$. Pilihan untuk P sekarang menjadi jelas, jika kita menginginkan bahwa matriks koefisien D yang baru menjadi diagonal, maka kita harus memilih P sebagai matriks yang mendiagonalisasi A.

Prosedur berikut mengemukakan langkah-langkah untuk menyelesaikan suatu sistem

$$Y' = A\,Y$$

dengan matriks koefisien A yang dapat didiagonalisasi, yaitu:

Langkat 1. Carilah sebuah matriks P yang mendiagonalisasi matriks A.

Langkah 2. Lakukanlah substitusi Y = P U dan Y' = P U' untuk mendapatkan suatu "sistem diagonal" yang baru U' = D U, dengan $D = P^{-1}\,A\,P$.

Langkah 3. Selesaikanlah U' = D U.

Langkah 4. Tentukanlah Y dari persamaan Y = P U.

Contoh 12. 2

Diketahui

$$y_1' = y_1 + 4y_2$$
$$y_2' = 2y1 + 3y_2$$

a) Selesikanlah sistem tersebut.

b) Carilah penyelesaian yang memenuhi syarat awal $y_1(0) = 0$ dan $y_2(0) = 0$

Penyelesaian:

a) Matriks koefisien dari sistem ini adalah

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Seperti telah kita diskusikan dalam bahasan Modul 11 Kegiatan Belajar 2 bahwa matriks A akan didiagonalisasi oleh sebarang matriks P yang kolom-kolomnya adalah vektor-vektor eigen dari A yang bebas linear. Karena itu persamaan karakteristik dari matriks A adalah

$$\det(\lambda I - A) = 0 \text{ atau } \det(A - \lambda I) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -4 \\ -2 & \lambda - 3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda - 5 = (\lambda - 5)(\lambda + 1) = 0$$

Nilai-nilai eigen dari matriks A adalah $\lambda = 5$ dan $\lambda = -1$.

Menurut definisi dan teorema (Modul 11 Kegiatan Belajar 1),

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

adalah sebuah vektor eigen dari matriks A yang bersesuaian dengan nilai eigen λ jika dan hanya jika x adalah sebuah penyelesaian non trivial dari

$$(\lambda I - A)x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -4 \\ -2 & \lambda - 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Jika x = 5, sistem ini menjadi:

$$\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow 4x_1 - 4x_2 = 0$$

$$-2x_1 + 2x_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Penyelesaian dari sistem ini adalah

$$x_1 = t,\ x_2 = t,\ t \in R$$

sehingga

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} t$$

Jadi sebuah basis untuk ruang eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 5$ adalah:

$$p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Jika $\lambda = -1$, sistemnya menjadi:

$$\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Leftrightarrow -2x_1 - 4x_2 = 0$

$\Leftrightarrow x_1 = -2x_2$

Penyelesaian dari sistem ini adalah

$$x_1 = -2t,\ x_2 = t,\ t \in R$$

sehingga

$$x = \begin{bmatrix} -2t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} t$$

Jadi sebuah basis untuk ruang eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = -1$ adalah

$$p_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dari dua buah basis di atas, kita dapatkan untuk P yang mendiagonalisasi matriks A, yaitu:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Dan matriks diagonalnya adalah

$$D = P^{-1} A P$$

$$\Leftrightarrow \quad = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & \frac{10}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, substitusikan

$$Y = PU \text{ dan } Y' = P\,U'$$

sehingga menghasilkan "sistem diagonal" yang baru, yaitu:

$$U' = D\,U = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} U$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow u_1' = 5u_1$$

$$u_2' = -u_2$$

Dari persamaan (2) penyelesaian dari sistem ini adalah

$$u_1 = c_1\, e^{5x}$$

$$u_2 = c_2\, e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow u = \begin{bmatrix} c_1\, e^{5x} \\ c_2\, e^{-x} \end{bmatrix}$$

sehingga persamaan Y = P U menghasilkan Y sebagai penyelesaian baru, yaitu

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1\, e^{5x} \\ c_2\, e^{-x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1\, e^{5x} - 2c_2\, e^{-x} \\ c_2\, e^{-x} + c_2\, e^{-x} \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow y_1 = c_1\, e^{5x} - 2c_2\, e^{-x}$$

$$y_2 = c_1\, e^{5x} + c_2\, e^{-x} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. \ (7)$$

b) Jika kita mensubstitusikan syarat-syarat wal $y_1(0) = y_2(0) = 0$ pada persamaan (7), maka kita mendapatkan

$$c_1 - 2c_2 = 0$$

$$c_1 + c_2 = 0$$

dan penyelesaian dari sistem ini adalah

$$c_1 = 0 \text{ dan } c_2 = 0$$

sehingga dari (7) penyelesaian yang memenuhi syarat-syarat awal adalah

$$y_1 = 0 \text{ dan } y_2 = 0$$

Perlu diketahui bahwa pada bahasan diskusi pembelajaran ini, kita telah mengasumsikan bahwa matriks koefisien dari Y' = A Y dapat didiagonalisasi. Jika tidak demikian, maka kita harus menggunakan metode lain untuk menyelesaikan sistem tersebut. Metode-metode tersebut akan didiskusikan dalam buku-buku aljabar lanjutan.

B. Penerapan pada Masalah Aproksimasi

1. Masalah Aproksimasi

Pada bahasan diskusi pembelajaran bagian ini, kita akan menggunakan proyeksi ortogonal pada ruang hasil kali dalam untuk menyelesaikan masalah-masalah yang melibatkan penaksiran dari sebuah fungsi yang diketahui dengan fungsi-fungsi yang lebih sederhana. Masalah-masalah yang demikian muncul dalam berbagai penerapan sain dan teknologi.

Permasalahan pertama yang akan kita diskusikan pada pembelajaran ini adalah kasus-kasus khusus dari masalah umum yang dikenal sebagai masalah aproksimasi (masalah hampiran), yaitu:

”Carilah aproksimasi terbaik yang mungkin melebihi suatu selang (interval) [a , b] pada fungsi f yang diketahui dengan hanya menggunakan aproksimasi ruang bagian (subruang) W dari C [a , b].”

Untuk lebih jelasnya lagi kita perhatikan beberapa contoh berikut yang merupakan masalah-masalah aproksimasi.

Contoh 12. 3

a) Carilah aproksimasi terbaik yang mungkin untuk e^x pada [0 , 1] oleh sebuah polinom yang berbentuk $a_0 + a_1x + a_2x^2$.

b) Carilah aproksimasi terbaik yang mungkin untuk Sin πx pada [-1 , 1] oleh sebuah fungsi yang berbentuk $a_0 + a_1 e^x + a_2 e^{2x} + a_3 e^{3x}$.

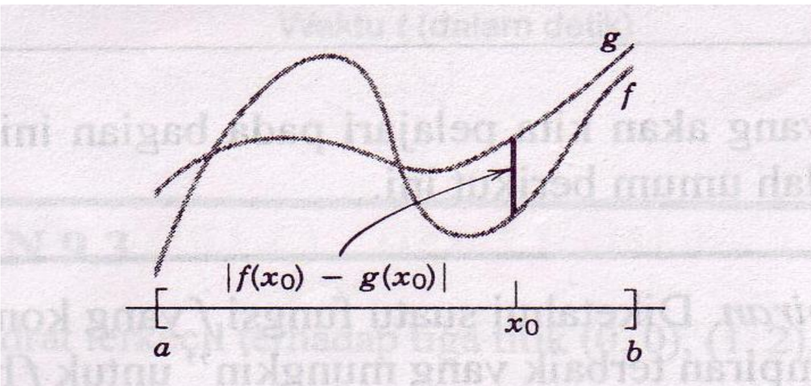
c) Carilah aproksimasi terbaik yang mungkin untuk x pada $[0\ ,\ 2\pi]$ oleh sebuah fungsi yang berbentuk $a_0 + a_1 \operatorname{Sin} x + a_2 \operatorname{Sin} 2x + b_1 \operatorname{Cos} x + b_2 \operatorname{Cos} 2x$.

Coba kita perhatikan dari masing-masing contoh di atas yang ternyata fungsi pengaproksimasinya digambarkan pada beberapa ruang bagian (sub ruang) dari ruang vektor C [a , b] (fungsi kontinu atau berkesinambungan pada [a, b]). Pada contoh pertama W adalah sub ruang dari C [0, 1] yang dibangun (dibentang) oleh 1, x, dan x^2. Pada contoh kedua W adalah ruang bagian dari C [-1 , 1] yang dibangun oleh 1, e^x, e^{2x} dan e^{3x}. Sedangkan pada contoh yang ketiga ruang bagian W adalah ruang bagian C $[0\ ,\ 2\pi]$ yang dibangun oleh 1, sin x, sin 2x, dan cos 2x.

Untuk menyelesaikan masalah aproksimasi ini, kita harus membuat istilah ”aproksimasi terbaik yang mungkin melebihi [a , b]” (*best posible approximation over* [a , b]) lebih persis atau tepat secara matematis. Secara intuitif, aproksimasi terbaik yang mungkin melebihi [a , b] adalah aproksimasi yang menghasilkan **galat** (*error*) terkecil. Namun apa yang kita artikan dengan ”galat”? Jika kita hanya memperhatikan atau membahas cara mengaproksimasikan f(x) di sebuah titik tunggal x_0, maka galat di x_0 oleh aproksimasi g(x) akan disederhanakan sebagai

$$\text{galat} = |\, f(x_0) - g(x_0)\, |$$

yang adakalanya dinamakan **deviasi** atau **simpangan** (*deviation*) antara f dan g pada x_0. (Gambar 12. 1)

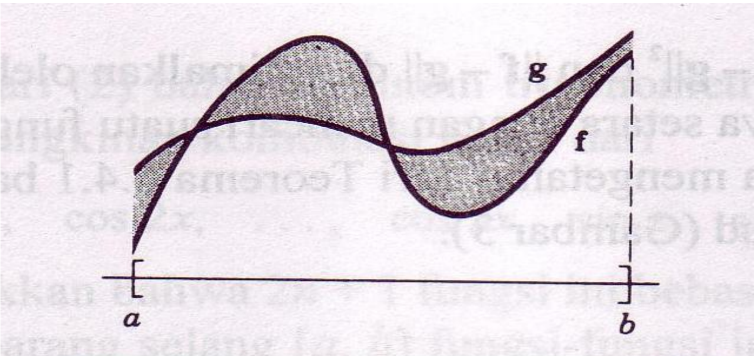


Gambar 12. 1 (Deviasi antara f dan g pada x_0)

Perlu kita ketahui, bahwa sebenarnya kita ingin mencari aproksimasi secara keseluruhan dalam selang [a , b], bukan pada sebuah titik tunggal. Sebagai konsekwensinya, pada sebuah bagian selang suatu aproksimasi g_1 terhadap f mungkin mempunyai deviasi yang lebih kecil daripada aproksimasi g_2 terhadap f, dan pada bagian selang lainnya mungkin terjadi sebaliknya. Bagaimanakah kita memutuskan salah satu aproksimasi terbaik dari keseluruhan yang lebih baik? Apa yang kita perlukan adalah bagaimana mengukur galat keseluruhan pada aproksimasi g. Salah satu ukuran galat keseluruhan diperoleh dengan mengintegralkan simpangan $|f(x) - g(x)|$ pada keseluruhan selang [a , b], yaitu:

$$\text{galat} = \int_a^b \left| f(x) - g(x) \right| dx \quad \text{.........................} \quad (8)$$

Secara geometris (8) adalah luas daerah antara grafik f(x) dan g(x) pada selang [a , b] (Gambar 12. 2), dan semakin besar luas daerah tersebut semakin besar pula galat keseluruhannya.



Gambar 12. 2

(Luas antara grafik f dan g pada [a , b] mengukur galat dalam aproksimasi f dan g pada [a , b]).

Walaupun (8) secara geometris sangat menarik dan alami, namun kebanyakan matematikawan dan ilmuwan pada umumnya lebih menyukai alternatif ukuran galat berikut ini, yang dinamakan **galat kuadrat nilai tengah** atau **galat rerata kuadrat** (*mean square error*)

$$\text{Galat rerata kuadrat} = \int_a^b \left[f(x) - g(x) \right]^2 dx.$$

Galat rerata kuadrat mempunyai keunggulan tambahan, karena dengan galat rerata kuadrat memungkinkan bagi kita untuk menggunakan teori ruang hasil kali dalam (*inner product space*) pada masalah aproksimasi. Untuk melihat bagaimana hal ini dilakukan, misalkan f adalah fungsi kontinu pada [a , b] yang ingin kita hampiri dengan suatu fungsi g dari suatu subruang W pada [a , b], dan misalkan C [a , b] dengan hasil kali dalam

$$< f , g > = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

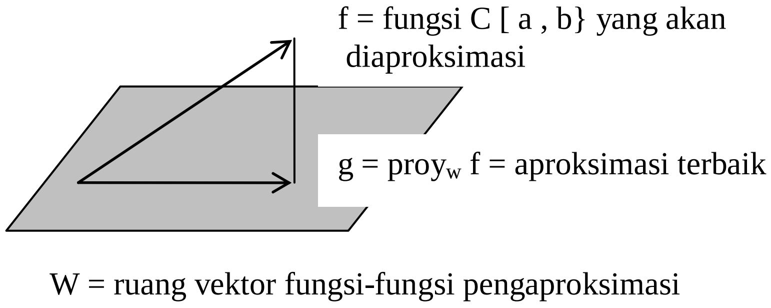
Dari hasil kali dalam ini kita dapatkan

$$\| f - g \|^2 = < f - g , f - g > = \int_a^b \left[f(x) - g(x) \right]^2 dx = \text{galat rerata kuadrat}$$

sehingga meminimalkan galat rerata kuadrat sama dengan meminimalkan $\| f - g \|^2$. Jadi masalah aproksimasi yang diajukan secara informal pada awal bahasan diskusi pembelajaran bagian ini bisa kita nyatakan ulang secara lebih tepat yang dikenal sebagai **masalah aproksimasi kuadrat terkecil**, yaitu:

> ”Misal f adalah fungsi yang kontinu pada selang [a , b] dengan C [a , b] mempunyai hasil kali dalam $< f , g > = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$ dan misalkan W adalah sebuah subruang berdimensi terhingga dari C [a , b]. Carilah sebuah fungsi g pada W yang meminimalkan $\| f - g \|^2 = \int_a^b \left[f(x) - g(x) \right]^2 dx$”.

Karena $\| f - g \|^2$ dan $\| f - g \|$ diminimalkan oleh fungsi g yang sama, maka masalahnya setara dengan mencari sebuah fungsi g pada W yang terdekat dengan f. Namun kita telah memahami dari teorema aproksimasi terbaik dalam ruang hasil kali dalam (Modul 8), bahwa g = proy $_W$ f adalah fungsi yang dimaksudkan oleh kita (Gambar 12. 3).



Gambar 12. 3

Sebagai ikhtisarnya dari penjelasan dan diskusi di atas, kita mempunyai hasil yang dikenal sebagai **penyelesaian masalah aproksimasi kuadrat terkecil**, yaitu:

Jika f adalah sebuah fungsi kontinu pada [a , b], dan W adalah sebuah subruang berdimensi terhingga dari C [a , b], maka fungsi g pada W yang meminimalkan galat rerata kuadrat $\int_a^b [f(x) - g(x)]^2\, dx$ adalah g = proy$_w$ f, yaitu proyeksi ortogonal dari f pada W, yang relatif terhadap hasil kali dalam persamaan (9), yaitu < f , g > = $\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$. Fungsi g = proyeksi $_w$ f dinamakan **aproksimasi kuadrat terkecil** (*least squares approximation*) f. terhadap W.

2. Deret Fourier

Sekarang kita perhatikan sebuah fungsi yang berbentuk

$$f(x) = c_0 + c_1 \text{ Cos } x + c_2 \text{ Cos } 2x + \ldots + c_n \text{ Cos } nx$$
$$+ d_1 \text{ Sin } x + d_2 \text{ Sin } 2x + \ldots + d_n \text{ Sin } nx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

dinamakan **polinom trigonometris** (*trigonometric polynomial*). Jika c_n dan d_n kedua-duanya tidak nol, maka f(x) dikatakan mempunyai **orde n** (*order n*).

Contoh 12. 4

Misalkan suatu fungsi berbentuk

$$P(x) = 2 + \text{Cos } x - 3 \text{ Cos } 2x + 7 \text{ Sin } 4x$$

adalah sebuah **polinom trigonometris** dengan

$$C_0 = 2,\ c_1 = 1,\ c_3 = -3,\ d_1 = 0,\ d_2 = 0\ d_3 = 0,\ d_4 = 7$$

Tentunya saja orde p(x) adalah 4.

Jelaslah dari (10) bahwa polinomial trigonometris berorde n atau berorde lebih kecil dari n adalah berbagai kombinasi linear yang mungkin dari

$$1, \text{Cos } x, \text{Cos } 2x, ..., \text{Cos } nx, \text{Sin } x, \text{Sin } 2x, ..., \text{Sin } nx \quad \text{............................} (11)$$

Dapat diperlihatkan bahwa 2n + 1 fungsi ini bebas linear, dan akibatnya untuk sebarang interval [a , b] fungsi-fungsi ini membentuk sebuah basis untuk sebuah ruang berdimensi (2n + 1) dari C [a , b].

Sekarang marilah kita perhatikan masalah aproksimasi kuadrat terkecil dari sebuah fungsi kontinu f(x) pada selang $[0\ ,\ 2\pi]$ dengan menggunakan polinomial trigonometris berorde n atau berorde lebih kecil dari n. Sebagaimana kita bahas dalam pembelajaran sebelumnya, bahwa aproksimasi kuadrat terkecil dari f pada W adalah proyeksi ortogonal dari f pada W. Untuk mencari proyeksi ortogonal ini, maka kita harus mencari sebuah basis ortonormal $g_0, g_1, g_2, ..., g_{2n}$ untuk W, setelah itu baru kita dapat menghitung proyeksi ortogonal pada W dari rumus

$$\text{proy}_W\, f = < f , g_0 > g_0 + < f , g_1 > g_1 + \ldots + < f , g_{2n} > g_{2n} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. \quad (12)$$

(lihat Modul 8, Ruang Hasil Kali Dalam Euclid). Sebuah basis ortonormal untuk W dapat diperoleh dengan menerapkan proses Gram-Schmidt pada basis (11) dengan menggunakan hasil kali dalam

$$< u , v > = \int_0^{2\pi} u(x)\, v(x)\, dx$$

Hal ini menghasilkan basis ortonormal

$$g_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ g_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{Cos } x, ..., g_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{ Cos } nx,$$

$$g_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{ Sin } x, ..., g_{2n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{ Sin } nx \quad \text{..} (13)$$

Jika kita memperkenalkan notasi

$$a_0 = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} < f\ , g_0 > < f , g_0 >,\ a_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} < f , g_1 >,\ \ldots ,\ a_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} < f , g_n >$$

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} < f\,,\, g_{n+1} >, \ldots, b_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} < f\,,\, g_{2n} >,$$

maka dengan mensubstitusikan (13) pada (12), kita dapatkan

$$\text{proy}_{w}\, f = \frac{a_0}{2} + [a_1 \text{Cos } x + \ \ldots + a_n \text{Cos}_{nx}] + [b_1 \text{Sin } x + \ldots + b_n \text{ Sin } nx].$$

dengan

$$a_0 = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} < f\,,\, g_0 > = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) \frac{1}{2\pi}\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, dx$$

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} < f\,,\, g_1 > = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) \frac{1}{\pi} \text{ Cos } x\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \text{ Cos } x\, dx$$

$$\vdots$$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} < f\,,\, g_n > = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) \frac{1}{\pi} \text{ Cos } nx\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \text{ Cos } nx\, dx$$

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} < f\,,\, g_{n+1} > = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) \frac{1}{\pi} \text{ Sin } x\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \text{ Sin } x\, dx$$

$$\vdots$$

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} < f\,,\, g_{n+2} > = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) \frac{1}{\pi} \text{ Sin } nx\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \text{ Sin } nx\, dx$$

Secara ringkas, hasil-hasil tersebut dapat kita tuliskan sebagai berikut:

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) \frac{1}{\pi} \text{ Cos } kx\, dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \text{ Sin } kx\, dx$$

Bilangan-bilangan a_0, a_1, ... , a_n, b_1, ..., b_n kita namakan **koefisien-koefisien Fourier** dari f. (Jean Baptise Joseph Fourier (1768 – 1830) adalah matematikawan dan ahli fisika yang menemukan deret Fourier).

Contoh 12. 5

Carilah aproksimasi kuadrat terkecil dari f(x) = x pada selang $[0\,,\,2\pi]$ dengan menggunakan

a) polinom trigonometris berorde 2 atau lebih kecil dari 2.

b) polinom trigonometris berorde n atau berorde lebih kecil dari n.

Penyelesaian:

a) Karena f(x) = x, maka kita dapatkan

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x\, dx = 2\pi \quad \text{.....................} \quad (14a)$$

Untuk k = 1, 2, …, maka integrasi parsial akan menghasilkan (buktikan)

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{Cos} kx\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \operatorname{Cos} kx\, dx \quad \text{.............} \ (14b)$$

$$b_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{Sin} kx\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \operatorname{Sin} kx\, dx = -\frac{2}{k} \quad \text{......} \ (14c)$$

Jadi, aproksimasi kuadrat terkecil pada x di [0 , 2π] dengan menggunakan polinom trigonometris berorde 2 atau kurang adalah

$$x \approx \frac{a_0}{2} + a_1 \operatorname{Cos} x + a_2 \operatorname{Cos} 2x + b_1 \operatorname{Sin} x + b_2 \operatorname{Sin} 2x$$

atau dari (14a), (14b), dan (14c)

$$x = \pi - 2 \operatorname{Sin} x - \operatorname{Sin} 2x.$$

b) Aproksimasi kuadrat terkecil untuk x dalam interval [0 , 2π] dengan menggunakan polinom trigonometris yang berorde n atau berorde lebih kecil dari n adalah

$$x \approx \frac{a_0}{2} + [a_1 \operatorname{Cos} x + \ \dots + a_n \operatorname{Cos} nx] + [b_1 \operatorname{Sin} x + \dots + b_n \operatorname{Sin} nx]$$

atau dari (14a), (14b), dan (14c)

$$x = \pi - 2 \left(\operatorname{Sin} x + \frac{\operatorname{Sin} 2x}{2} + \frac{\operatorname{Sin} 3x}{3} + \cdots + \frac{\operatorname{Sin} nx}{n}\right).$$

Tentunya wajar, bila kita mengharapkan bahwa galat rerata kuadrat akan semakin kecil jika banyaknya suku dalam aproksimasi kuadrat terkecil

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \operatorname{Cos} kx + b_k \operatorname{Sin} kx)$$

semakin bertambah. Bisa dibuktikan bahwa untuk fungsi-fungsi f pada C [0 , π] galat rerata kuadrat akan mendekati nol ketika n → + ~, hal ini dinyatakan dengan menuliskan

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\sim} (a_k \operatorname{Cos} kx + b_k \operatorname{Sin} kx)$$

Ruas kanan dari persamaan terakhir ini disebut **deret Fourier** (*Fourier series*) untuk f pada selang $[0 , \pi]$. Deret seperti ini sangat penting dan banyak diterapkan dalam sain, matematika, dan teknologi.

Selanjutnya untuk memantapkan pemahaman Anda tentang materi pembelajaran **Kegiatan Belajar 1** di atas, cobalah kerjakan soal-soal **Latihan 1** berikut ini.

Latihan 1

1. Diketahui:

$$y_1' = -2y_1$$
$$y_2' = 5y_2$$

   a) Tuliskanlah sistem tersebut dalam bentuk matriks.

   b) Selesaikanlah sistem tersebut.

2. Carilah penyelesaian sistem dari soal latihan nomor satu di atas yang memenuhi syarat awal $y_1(0) = 2$ dan $y_2(0) = -3$.

3. Selesaikanlah sistem

$$y_1' = y_1 + 3y_2$$
$$y_2' = 4y_1 + 5y_2$$

4. Carilah penyelesaian sistem dari soal latihan nomor tiga di atas yang memenuhi syarat awal $y_1(0) = 2$ dan $y_2(0) = 1$.

5. Carilah aproksimasi terkecil dari $f(x) = x + 1$ pada selang $[0 , 2\pi]$ dengan menggunakan suatu polinom trigonometris berorde 2 atau kurang.

Setelah Anda mencoba mengerjakan soal-soal **Latihan 1** di atas, bandingkanlah jawabannya dengan petunjuk jawaban berikut.

Petunjuk Jawaban Latihan 1

1. a) $y_1' = -2y_1$

   $y_2' = 5y_2$

   $$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

   $$\Leftrightarrow Y' = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} Y$$

   b) Karena masing-masing persamaan dalam sistem yang diketahui hanya melibatkan satu fungsi peubah, maka kita dapat menyelesaikan persamaan tersebut dengan sendiri-sendiri. Dengan pemperhatikan persamaan (2), kita dapatkan:

   $$y_1 = c_1 e^{-2x}$$

   $$y_2 = c_2 e^{5x}$$

   $$\Leftrightarrow Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{-2x} \\ c_2 e^{5x} \end{bmatrix}$$

2 Dari syarat awal $y_1(0) = 2$ dan $y_2(0) = -3$, kita dapatkan

$$2 = y_1(0) = c_1 e^0 = c_1$$

$$-3 = y_2(0) = c_2 e^0 = c_2$$

sehingga penyelesaian yang memenuhi syarat awal adalah

$$y_1 = 2 e^{-2x}$$

$$y_2 = -3 e^{5x}$$

$$\Leftrightarrow Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 e^{-2x} \\ c - 3 e^{5x} \end{bmatrix}$$

3. Matriks koefisien untuk sistem

$$y_1' = y_1 + 3y_2$$

$$y_2' = 4y_1 + 5y_2$$

adalah $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

akan dicari matriks yang mendiagonalisasi A, dan matriks tersebut adalah matriks P yang kolom-kolomnya adalah vektor-vektor eigen dari matriks A yang bebas linear.

Persamaan karakteristik dari matriks A adalah

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -3 \\ -4 & \lambda - 5 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 6\lambda - 7 = (\lambda + 1)(\lambda - 7) = 0$$

Nilai-nilai eigen dari A adalah $\lambda = 7$ dan $\lambda = -1$

Menurut definisi

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

adalah sebuah vektor eigen dari A yang bersesuaian dengan λ jika dan hanya jika **x** sebuah penyelesaian non trivial dari persamaan

$$(\lambda I - A)\, x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -3 \\ -4 & \lambda - 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Untuk $\lambda = 7$, sistem ini menjadi

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow 2x_1 - x_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{2}\, t$$

$$x_2 = t \in R$$

sehingga $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} t$,

jadi sebuah basis untuk ruang eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 7$ adalah

$$p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \ t = 2.$$

Demikian pula Anda dapat memperlihatkan bahwa

$$P_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \ t = 2.$$

adalah sebuah basis untuk ruang eigen yang bersesuian dengan $\lambda = 7$. Jadi matriks yang mendiagonalisasi A adalah

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Matriks diagonal dari matriks A adalah

$$D = P^{-1} A P$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Dengan mensubstitusi

$$Y = P U \ \text{ dan } \ Y' = P U'$$

menghasilkan sistem diagonal yang baru, yaitu:

$$U' = D U$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow u_1' = 7u_1$$

$$u_2' = - u_2$$

Dari persamaan (2) penyelesaian sistem ini adalah

$$u_1 = c_1 e^{7x}$$

$$u_2 = c_2 e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow U = \begin{bmatrix} c_1 \ e^{7x} \\ c_2 \ e^{-x} \end{bmatrix}$$

sehingga persamaan Y = P U menghasilkan Y sebagai penyelesaian baru

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1\ e^{7x} \\ c_2\ e^{-x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1\ e^{7x} - 3c_2\ e^{-x} \\ 2c_1\ e^{7x} + 2c_2\ e^{-x} \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow y_1 = c_1\ e^{7x} - 3\ c_2\ e^{-x}$$

$$y_2 = 2c_1\ e^{7x} + 2\ c_2\ e^{-x} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. \quad (*)$$

4. Jika kita substitusikan syarat-syarat awal $y_1(0) = 2$ dan $y_2(0) = 1$ yang diberikan ke dalam persamaan (8), maka kita dapatkan

$$c_1 - 3\ c_2 = 2$$
$$2c_1 + 2\ c_2 = 1$$

Dengan menyelesaikan sistem ini kita dapatkan

$$c_1 = \frac{7}{8} \text{ dan } c_2 = -\frac{3}{8}$$

sehingga dari (*) penyelesaian yang memenuhi syarat awal adalah:

$$y_1 = \frac{7}{8}\ e^{7x} + \frac{9}{8}\ e^{-x}$$
$$y_2 = \frac{14}{8}\ e^{7x} - \frac{6}{8}\ e^{-x}$$

5. Karena $f(x) = 1 + x$, maka kita dapatkan

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (1+x)\ dx\ = 2 + 2\pi$$

Seperti halnya contoh 12. 4 dan dengan beberapa integrasi sederhana, untuk k = 1, 2, ..., kita dapatkan

$$a_k = \frac{1}{a} \int_0^{2\pi} (1+x)\ \text{Cos}\ (kx)\ dx\ = 0$$

$$b_k = \frac{1}{a} \int_0^{2\pi} (1+x)\ \text{Sin}\ (kx)\ dx = -\frac{2}{k}$$

Jadi aproksimasi kuadrat terkecil untuk $1 + x$ pada $[0\ ,\ 2\pi]$ oleh suatu polinom trigonometris yang berorde ≤ 2 adalah

$$1 + x = (1 + \pi) - 2\ \text{Sin}\ x - \text{Sin}\ 2x.$$

Selanjutnya buatlah rangkuman materi bahasan **Kegiatan Belajar 1**, kemudian bandingkanlah dengan alternatif rangkuman berikut.

Rangkuman

1. Penyelesaian umum dari persamaan diferensial sederhana y' = ay adalah $y = c\,e^{ax}$ dengan c adalah sebarang konstanta.

2. Sebuah kondisi yang menetapkan nilai penyelesaian pada sebuah titik dinamakan **kondisi awal**, sedangkan masalah menyelesaikan persamaan diferensial yang memenuhi kondisi awal dinamakan **masalah nilai awal**.

3. Prosedur untuk menyelesaikan suatu sistem Y' = A Y dengan matriks koefisien A yang dapat didiagonalisasi, adalah beberapa langkah berikut:

   Langkat 1. Carilah sebuah matriks P yang mendiagonalisasi matriks A.

   Langkah 2. Lakukanlah substitusi Y = P U dan Y' = P U' untuk mendapatkan suatu "sistem diagonal" yang baru U' = D U, dengan $D = P^{-1} A P$.

   Langkah 3. Selesaikanlah U' = D U.

   Langkah 4. Tentukanlah Y dari persamaan Y = P U.

4. Masalah aproksimasi. "Carilah aproksimasi terbaik yang mungkin melebihi suatu selang (interval) [a , b] pada fungsi f yang diketahui dengan hanya menggunakan aproksimasi ruang bagian (subruang) W dari C [a , b]."

5. Masalah Aproksimasi Kuadarat Terkecil. "Misal f adalah fungsi yang kontinu pada selang [a , b] dengan C [a , b] mempunyai hasil kali dalam $< f , g > = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$ dan misalkan W adalah sebuah subruang berdimensi terhingga dari C [a , b]. Carilah sebuah fungsi g pada W yang meminimalkan $\| f - g \|^2 = \int_a^b [f(x) - g(x)]^2\, dx$"

6. Penyelesaian Masalah Aproksimasi Kuadarat Terkecil. Jika f adalah sebuah fungsi kontinu pada [a , b], dan W adalah sebuah subruang berdimensi terhingga

dari C [a , b], maka fungsi g pada W yang meminimalkan galat rerata kuadrat $\int_a^b [f(x) - g(x)]^2 \, dx$ adalah g = proy_W f, yaitu proyeksi ortogonal dari f pada W, yang relatif terhadap hasil kali dalam (9) < f , g> = $\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$. Fungsi g = proyeksi $_W$ f dinamakan **aproksimasi kuadrat terkecil** (*least squares approximation*) f pada W.

Selanjutnya untuk mengetahui tingkat pemahaman Anda terhadap bahasan Kegiatan Belajar 1, cobalah kerjakan dengan sebaik-baiknya soal-soal berikut sebagai evaluasi formatifnya.

Tes Formatif 1

Petunjuk:

Pilihlah salah satu jawaban yang paling tepat dari beberapa alternatif jawaban yang diberikan.

1. Jika $y_1' = 4y$

   $y_2' = -3y$

   maka sistem tersebut dapat ditulis dalam bentuk matriks

   A. $y_1' = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} Y$ C. $y_1' = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} Y$

   B. $y_1' = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} Y$ D. $y_1' = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} Y$

2. Penyelesaian dari sistem

$$y_1' = 4y$$

$$y_2' = -3y$$

   adalah

   A. $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1\, e^{-3x} \\ c_2\, e^{4x} \end{bmatrix}$ C. $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1{}^{4x}\, e \\ c_2{}^{-3x}\, e \end{bmatrix}$

B. $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1\ e^{4x} \\ c_2\ e^{-3x} \end{bmatrix}$

D. $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1\ x^{4x}\ e \\ c_2\ x^{-3x}\ e \end{bmatrix}$

3. Penyelesaian dari system pada soal latihan nomor dua di atas yang memenuhi syarat awal y1(0) = 2 dan $y_2(0) = 5$ adalah

A. $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\ e^{2x} \\ -3\ e^{5x} \end{bmatrix}$

C. $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\ x^{4e} \\ 5\ x^{-3e} \end{bmatrix}$

B. $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\ x^{2e} \\ -3\ x^{5e} \end{bmatrix}$

D. $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\ e^{4x} \\ 5\ e^{-3x} \end{bmatrix}$

4. Penyelesaian dari sistem berikut:

$$y_1' = y_1 + y_2$$
$$y_2' = 4y_1 - 2y_2$$

A. $y_1 = c_1\ e^{-3x} - \frac{1}{4} c_2\ e^{2x}$
$y_2 = c_1\ e^{2x} + c_2\ e^{-3x}$

C. $y_1 = c_1\ e^{2x} + \frac{1}{4} c_2\ e^{-3x}$
$y_2 = c_1\ e^{2x} - c_2\ e^{-3x}$

B. $y_1 = c_1\ e^{2x} - \frac{1}{4} c_2\ e^{-3x}$
$y_2 = c_1\ e^{-3x} + c_2\ e^{2x}$

D. $y_1 = c_1\ e^{2x} - \frac{1}{4} c_2\ e^{-3x}$
$y_2 = c_1\ e^{2x} + c_2\ e^{-3x}$

5. Penyelesaian dari sistem pada soal nomor 4 di atas dengan syarat-syarat awal $y_1(0) = 1$ dan $y_2(0) = 6$ adalah

A. $y_1 = 2\ e^{2x} + e^{-3x}$
$y_2 = 2\ e^{2x} - 4e^{-3x}$

C. $y_1 = 2\ e^{-3x} + c^{2x}$
$y_2 = 2\ e^{-3x} - c^{2x}$

B. $y_1 = 2\ e^{2x} - e^{-3x}$
$y_2 = 2\ e^{2x} + e^{-3x}$

D. $y_1 = 2\ e^{-3x} - c^{2x}$
$y_2 = 2\ e^{-3x} + c^{2x}$

6. Bentuk persamaan matriks dari persamaan diferensial y" – y' – 6y = 0 (Petunjuk. Misalkan $y_1 = y$, $y_2 = y'$ dan kemudian tunjukkan bahwa

$y_1' = y_2$

$y_2' = y'' - y' + 6y = 6y_1 + y_2$).

A. $\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$

D. $\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$

7. Penyelesaian dari persamaan diferensial y” – y’ – 6y = 0 dengan petunjuk seperti pada soal nomor 6 di atas adalah y =

A. $e_1\ c^{-2x} + e_2\ c^{-3x}$

C. $c_1\ e^{2x} + c_2\ e^{3x}$

B. $-\ e_1\ c^{-2x} + e_2\ c^{3x}$

D. $-\ c_1\ e^{-2x} + c_2\ e^{3x}$

8. Aproksimasi kuadrat terkecil dari $f(x) = x^2$ pada selang $[0\ ,\ 2\pi]$ dengan menggunakan poligon trigonometris berorde 3 atau berorde lebih kecil dari 3 adalah x^2 =

A. $\frac{4}{3}\pi^2 + 4\ \text{Cos}\ x + \text{Cos}\ 2x + \frac{4}{9}\ \text{Cos}\ x + 4\pi\ \text{Sin}\ x + 2\pi\ \text{Sin}\ 2x + \frac{4}{3}\ \text{Sin}\ 3x$

B. $\frac{4}{3}\pi^2 - 4\ \text{Cos}\ x - \text{Cos}\ 2x - \frac{4}{9}\ \text{Cos}\ x + 4\pi\ \text{Sin}\ x + 2\pi\ \text{Sin}\ 2x + \frac{4}{3}\ \text{Sin}\ 3x$

C. $\frac{4}{3}\pi^2 + 4\ \text{Cos}\ x + \text{Cos}\ 2x + \frac{4}{9}\ \text{Cos}\ x - 4\pi\ \text{Sin}\ x - 2\pi\ \text{Sin}\ 2x - \frac{4}{3}\ \text{Sin}\ 3x$

D. $\frac{4}{3}\pi^2 - 4\ \text{Cos}\ x - \text{Cos}\ 2x - \frac{4}{9}\ \text{Cos}\ x - 4\pi\ \text{Sin}\ x - 2\pi\ \text{Sin}\ 2x - \frac{4}{3}\ \text{Sin}\ 3x$

9. Aproksimasi kuadrat terkecil dari e^x pada selang [0 , 1] dengan menggunakan polinom berbentuk $a_0 + a_1x$

A. (4e – 10) – (18 – 6e)x

C. (4e – 10) + (18 – 6e)x

B. (4e + 10) – (18 + 6e)x

D. (4e + 10) + (18 + 6e)x

10. Deret Fourier dari f(x) = π – x adalah

A. $\sum_{k=1}^{\tilde{}} \frac{2}{k}\ \text{Cos}\ (kx)$

C. $\sum_{k=1}^{\tilde{}} \frac{2}{k}\ \text{Sin}\ (kx)$

B. $\sum_{k=1}^{\tilde{}} \frac{2}{k}\ \text{Cos}\ x$

D. $\sum_{k=1}^{\tilde{}} \frac{2}{k}\ \text{Sin}\ x$

Balikan dan Tindak Lanjut

Sebagai umpan balik dan tindak lanjutnya, cocokanlah jawaban Anda dengan **Kunci Jawaban Tes Formatif 1** yang ada di bagian akhir modul ini. Hitunglah jumlah jawaban Anda yang benar. Kemudian gunakan rumus di bawah ini untuk engetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 1.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{jumlah jawaban Anda yang benar}}{10} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan yang Anda capai :

90% - 100% = Baik sekali

80% - 89% = Baik

70% - 79% = Cukup

< 70% = Kurang.

Kalau Anda mencapai tingkat penguasaan 80% ke atas, Anda dapat meneruskannya pada Kegiatan Belajar kedua. **Bagus !** Tetapi bila tingkat penguasaan Anda masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum Anda kuasai. Selamat belajar, semoga berhasil.

KEGIATAN BELAJAR 2

PENERAPAN PADA MASALAH BENTUK KUADRAT, BAGIAN KERUCUT DAN PERMUKAAN KUADRIK

A. Bentuk-bentuk Kuadrik

Pada bahasan diskusi pembelajaran modul yang kedua, kita telah mendefinisikan sebuah persamaan linear dalam n variabel x_1, x_2. x_3, ..., x_n yang dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b.$$

Ruas kiri persamaan ini, yaitu

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n$$

merupakan sebuah fungsi dalam n variabel (fungsi peubah n), yang dinamakan **bentuk linear**.

Pada bahasan pembelajaran yang sekarang ini, kita akan mendiskusikan beberapa fungsi yang dinamakan **bentuk kuadrat** yang suku-sukunya adalah kuadrat dari variabel atau hasil kali dua variabel. Bentuk kuadrat timbul dalam berbagai penerapan seperti dalam getaran, relativitas, geometri, statistika, mekanis dan berbagai rekayasa elektris.

Sebuah persamaan yang berbentuk

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \quad \text{..} \quad (15)$$

dengan a, b, c, …, f adalah bilangan-bilangan real dengan a, b, dan c tidak sekaligus nol, dinamakan sebuah **persamaan kuadrat dalam x dan y**. Sedangkan pernyataan

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 \quad \text{...} \quad (16)$$

dinamakan **bentuk kuadrat terasosiasi** (*associated quadratic form*) atau bentuk kuadrat dalam 2 variabel.

Contoh 12. 6

Berikut adalah beberapa bentuk kuadrat dalam x dan y

a) $2x^2 + 6xy – 7y^2$ (a = 2, b = 3, c = -7).

b) $4x^2 – 5y^2$ (a = 4, b = 0, c = -5).

c) xy (a = 0, b = $\frac{1}{2}$, c = 0).

Jika pada matriks 1 × 1 tanda kurung dihilangkan, maka (16) dapat kita tulis dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

Silakan Anda buktikan dengan mencoba mengalikan matriks-matriks tersebut. Perhatikan bahwa matriks 2 × 2 pada persamaan (17) ternyata adalah matriks simetris dengan unsur-unsur diagonal utamanya adalah koefisien suku-suku yang dikuadratkan, sedangkan unsur-unsur diagonal lainnya adalah setengah koefisien suku hasil kali xy.

Contoh 12. 7

Bentuk kuadrat berikut tidak terbatas pada dua variabel

a) $2x^2 + 6xy - 4y^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

b) $4x^2 - 5y^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

c) $xy = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

Bentuk kuadrat yang lebih umum didefinisikan sebagai berikut:

Definisi. Bentuk kuadrat dalam n variabel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ adalah suatu ekspresi yang dapat ditulis sebagai berikut:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, A = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

dengan A adalah suatu matriks n × n yang simetris. Jika kita misalkan matriks

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

maka (17) bisa ditulis secara lebih ringkas dalam bentuk

$$\mathbf{x}^t A \, \mathbf{x} \quad \ldots\ldots \quad (19)$$

Matriks A yang simetris ini dinamakan matriks **dari bentuk kuadrat $\mathbf{x}^t$** A **x**.

Matriks-matriks simetris berguna, namun tidak begitu penting untuk menyajikan bentuk kuadrat dalam notasi matriks. Misalnya, untuk bentuk kuadrat pada contoh 12. 6a, yaitu

$$2x^2 + 6xy - 7y^2,$$

kita boleh memisalkan menguraikan koefisien suku-suku hasil kali yaitu 6 menjadi 5 + 1 atau 4 + 2, dan menuliskan sebagai berikut:

$$2x^2 + 6xy - 7y^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

atau

$$2x^2 + 6xy - 7y^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Namun matriks-matriks simetris biasanya memberikan hasil yang paling sederhana, sehingga kita akan selalu menggunakannya. Jadi, jika kita menyatakan suatu bentuk kuadratik dengan $\mathbf{x}^t$ A **x** akan dipahami bahwa A simetris, walaupun tidak dinyatakan secara eksplisit.

Jika kita menggunakan fakta bahwa A adalah simetris, yaitu $A = A^t$, maka (19) dapat dinyatakan dalam bentuk hasil kali dalam Euclid dengan menuliskan

$$\mathbf{x}^t A \, \mathbf{x} = \mathbf{x}^t A^t \mathbf{x} = (A\mathbf{x})^t \mathbf{x} = \langle \mathbf{x} , A\mathbf{x} \rangle \quad \ldots\ldots \quad (20)$$

Contoh 12. 8

Berikut adalah sebuah bentuk kuadrat dalam x_1, x_2, dan x_3:

$$x_1^2 + 7x_2^2 - 3x_3^2 + 4\,x_1x_2 - 2\,x_1x_3 + 6x_2x_3 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 7 & 3 \\ -1 & 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Perhatikan bahwa koefisien dari suku-suku kuadrat tampil pada diagonal utama matriks 3×3, sedangkan koefisien dari suku hasil kali dipisahkan setengah-setengah dan disimpan pada posisi-posisi bukan diagonal, yaitu seperti berikut:

Koefisien dari	Kedudukan dalam matriks A
x_1x_2	a_{12} dan a_{21}
x_1x_3	a_{13} dan a_{31}
x_2x_3	a_{23} dan a_{32}

B. Penerapan pada Bagian Kerucut (Konik)

Dalam bahasan diskusi pembelajaran ini kita akan melihat bagaimana menghilangkan suku hasil kali dari sebuah bentuk kuadrat, yaitu dengan cara mengganti variabel, dan kita akan menggunakan hasilnya untuk mengkaji grafik bagian kerucut (irisan atau penampang kerucut, atau *conic section*).

Misalkan

$$\mathbf{x}^t A\,\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. \quad (21)$$

adalah bentuk kuadrat dengan A berupa matriks simetris. Dari Teorema 11. 4 pada Modul 11 kita mengetahui bahwa ada suatu matriks ortogonal P yang mendiagonalisasi A, yaitu

$$D = P^{-1} A\,P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

dengan $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ adalah nilai-nilai eigen A. Jika kita misalkan

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

dengan $y_1, y_2, ..., y_n$ adalah variabel-variabel baru, dan jika kita melakukan substitusi

$$\mathbf{x} = P\,\mathbf{y}$$

pada (21), maka akan kita dapatkan

$$\mathbf{x}^t A\,\mathbf{x} = (P\,\mathbf{y})^t A\,P\,\mathbf{y} = \mathbf{y}^t P^t A\,P\,\mathbf{y} = \mathbf{y}^t D\,\mathbf{y}$$

Namun

$$\mathbf{y}^t D\,\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_n) \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$= \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + ... + \lambda_n y_n^2$$

yang merupakan bentuk kuadrat tanpa suku-suku hasil kali.

Secara ringkas uraian pembelajaran di atas dapat kita tulis dalam bentuk teorema berikut:

Teorema 12. 1. Misalkan $\mathbf{x}^t A\,\mathbf{x}$ adalah bentuk kuadrat dalam variable-variabel x_1, x_2, ..., x_n dengan A simetris. Jika P mendiagonalkan A secara ortogonal dan jika variabel-variabel baru $y_1, y_2, ..., y_n$ ddidefinisikan oleh persamaan $\mathbf{x} = P\,\mathbf{y}$, maka dengan mensubstitusikan persamaan ini ke dalam $x^t A\,x$ menghasilkan

$$\mathbf{x}^t A\,\mathbf{x} = \mathbf{y}'\,D\,\mathbf{y} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n^2\, y_n^2$$

dengan $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_n$ adalah nilai-nilai eigen dari A dan $D = P^t A\,P$.

Matriks P pada teorema ini dinamakan **mendiagonalkan secara ortogonal bentuk kuadrat** atau **mereduksi bentuk kuadrat menjadi suatu jumlah kuadrat.**

Contoh 12. 9

Carilah penggantian variabel yang mereduksi bentuk kuadrat $2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2$ menjadi sebuah jumlah kuadrat, dan nyatakan bentuk kuadrat itu dalam variabel-variabel yang baru.

Penyelesaian

Bentuk kuadrat tersebut dapat dituliskan seperti berikut

$\mathbf{x}^t A \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ (Dari (16) dan (17))

Persamaan karakteristik dari matriks A adalah

det (λ I – A) = 0

$\Leftrightarrow$ det $\begin{bmatrix} \lambda - 2 & 1 \\ 1 & \lambda - 2 \end{bmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$

sehingga nilai-nilai eigen A adalah $\lambda = 1$ dan $\lambda = 3$.

Vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 1$ didapat dari penyelesaian

$$(\lambda I - A)\, x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow -x_1 + x_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = x_2$$

$$\Leftrightarrow x_1 = t$$

$$x_2 = t$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} t\,.$$

Dengan proses Gram-Schmidt kita dapatkan basis ortonormal

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Demikian pula untuk $\lambda_2 = 3$, kita dapatkan

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x_1 + x_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = -x_2$$

$$\Leftrightarrow x_1 = -t$$

$$x_2 = t$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} t \,.$$

Dengan proses Gram-Schmidt kita dapatkan basis ortonormalnya

$$\mathbf{V}_2 = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Jadi bentuk P yang mendiagonalisasi matriks simetris A secara ortogonal adalah

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Selanjutnya substitusikan **x** = P **y** yang menghilangkan suku-suku hasil kali adalah

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} y_2$$

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_2$$

Bentuk kuadrat yang baru adalah

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow y_1^2 + 3y_2^2.$$

Selanjutnya bahasan diskusi pembelajaran sekarang akan menerapkan kerja kita tentang bentuk-bentuk kuadrat untuk mengkaji **persamaan-persamaan kuadrat dalam** x **dan** y dan **bentuk-bentuk kuadratnya**. Bentuk-bentuk ini telah kita tulis sebagai persamaan (15) dan (16).

Bentuk umum persamaan kuadrat dalam variabel x dan y, yaitu

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. \quad (15)$$

grafiknya dinamakan **bentuk-bentuk kerucut** atau **konik** (*conics*), atau dikenal pula sebagai **irisan kerucut** atau **penampang kerucut**, atau **bagian kerucut** (*conic section*). Irisan-irisan kerucut yang paling penting adalah ellips, lingkaran, hiperbola, dan parabola. Irisan-irisan kerucut ini disebut **irisan-irisan kerucut yang tidak mengalami degenerasi** (*nondegenerate conics*). Jika benda dalam **posisi standar** (*standard position*) relatif terhadap sumbu-sumbu koordinat (Gambar 12. 4). Irisan-irisan kerucut sisanya disebut **mengalami degerasi** (*degenerate*) yang mencakup titik-titik tunggal dan pasangan-pasangan garis.

Contoh 12. 10

a) Persamaan

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1 \text{ mempunyai bentuk } \frac{x^2}{k^2}+\frac{y^2}{l^2}=1 \text{ dengan } k = 2 \text{ dan } l = 3.$$

Jadi grafiknya berupa ellips pada posisi standar yang memotong sumbu x di titik (-2 , 0) dan (2 , 0), dan memotong sumbu y di titik (0 , -3) dan (0 , 3).

b) Persamaan $x^2 – 8y^2 + 16 = 0$ dapat ditulis dalam bentuk

$$\frac{y^2}{2}-\frac{x^2}{16}=1$$

$$\text{atau } \frac{y^2}{k^2}-\frac{x^2}{l^2}=1 \text{ denga } k = \sqrt{2} \text{ dan } l = 4.$$

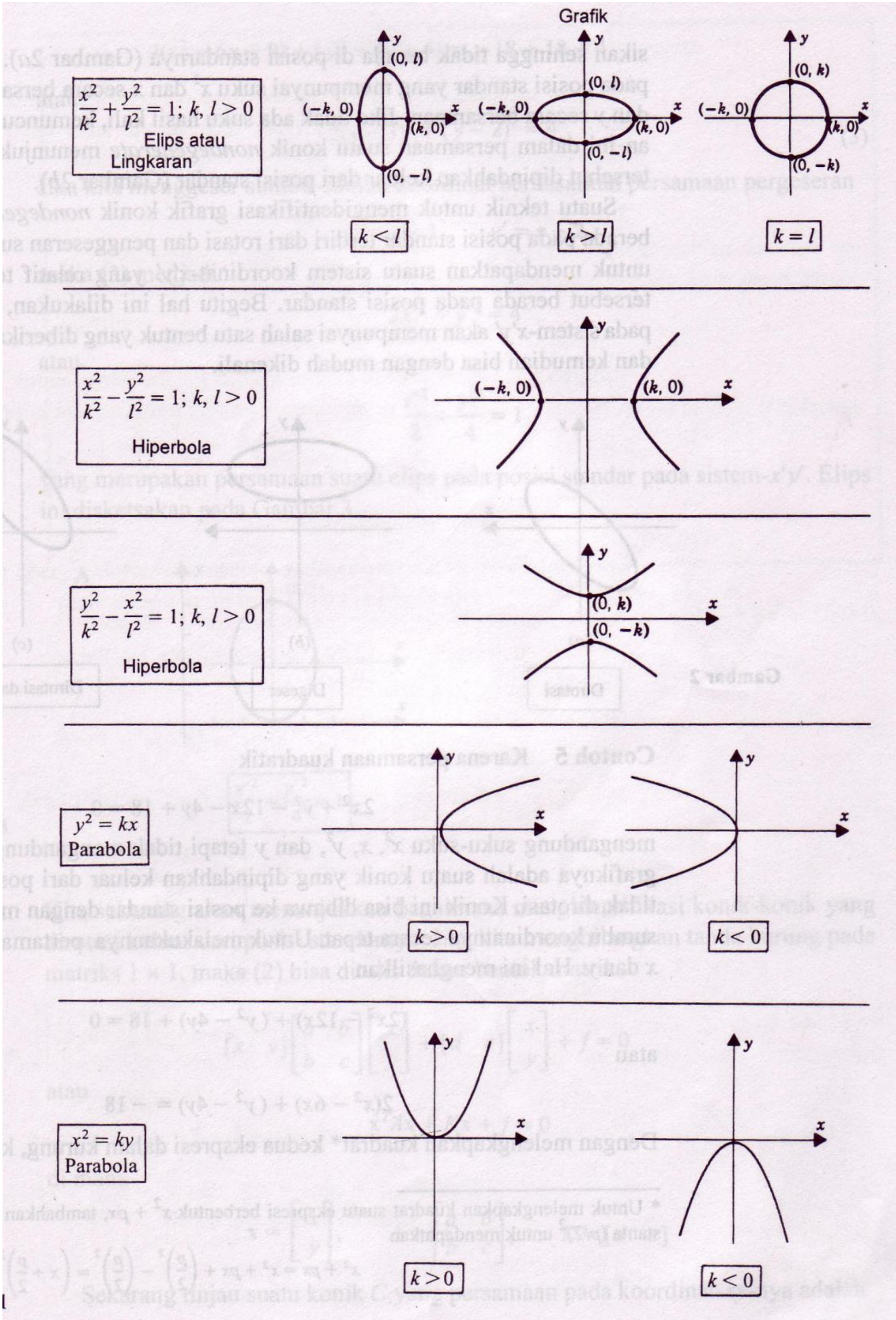
Grafiknya berupa hiperbola pada posisi standar yang memotong sumbu y pada (0 , - $\sqrt{2}$) dan (0 , $\sqrt{2}$).

c) Persamaan $5x^2 + 2y = 0$ bisa ditulis ulang dalam bentuk

$$x^2 = -\frac{2}{5}y$$

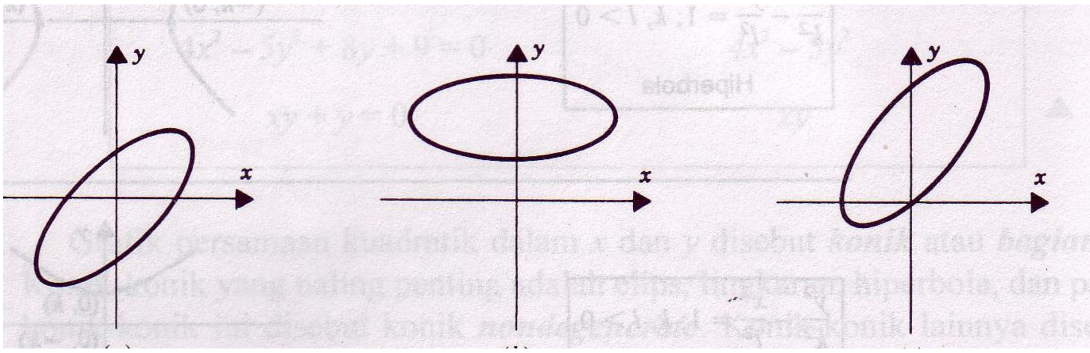
$$\text{atau } x^2 = ky \text{ dengan } k = -\frac{2}{5}.$$

Karena k < 0, grafiknya berupa parabola pada posisi standar yang membuka ke bawah dengan sumbu simetri adalah sumbu y.


Grafik
$\frac{x^2}{k^2} + \frac{y^2}{l^2} = 1;\ k, l > 0$
Elips atau Lingkaran
(0, l)
(−k, 0)
(k, 0)
(0, −l)
(0, k)
(0, −k)
x
y
$k < l$
$k > l$
$k = l$
$\frac{x^2}{k^2} - \frac{y^2}{l^2} = 1;\ k, l > 0$
Hiperbola
$\frac{y^2}{k^2} - \frac{x^2}{l^2} = 1;\ k, l > 0$
Hiperbola
$y^2 = kx$
Parabola
$k > 0$
$k < 0$
$x^2 = ky$
Parabola
$k > 0$
$k < 0$

Gambar 12. 4

Jika kita amati irisan kerucut pada posisi standar ternyata persamaannya tidak memuat suku-suku hasil kali (suku-suku xy). Keberadaan suku-suku xy dalam persamaan irisan kerucut yang tidak mengalami degenerasi, menunjukkan bahwa irisan kerucut itu diputar (dirotasikan dari posisi standarnya). (Gambar 12. 5a). Juga tidak ada irisan kerucut dalam posisi standar yang sekaligus memuat suku x^2 dan x atau suku-suku y^2 dan y secara bersamaan. Jika tidak ada suku hasil kali, munculnya kedua pasangan ini dalam persamaan suatu irisan kerucut *nondegenerate* menunjukkan bahwa irisan kerucut itu dipindahkan atau digeser (ditranslasikan) dari posisi standar (Gambar 12. 5b).



(a) Diputar (rotasi)

(b) Digeser (translasi)

(c) Diputar dan digeser

Gambar 12. 5

Bagaimana untuk mengidentifikasi grafik bentuk irisan kerucut yang tidak mengalami degenerasi tetapi tidak berada pada kedududkan standar? Hal ini bisa terjadi disebabkan oleh rotasi dan translasi sumbu-sumbu koordinat xy untuk mendapatkan suatu sistem koordinat x’ y’ yang relatif terhadap irisan kerucut ini berada dalam posisi standar. Begitu ini dikerjakan, maka persamaan irisan kerucut pada sistem x’ y’ akan berbentuk salah satu di antara yang diberikan dalam Gambar 12. 4, sehingga dengan mudah kita kenali.

Contoh 12. 11

Karena persamaan kuadrat

$$x^2 + 4y - 6x + 17 = 0$$

memuat suku-suku x^2, y, dan x tetapi tidak memuat suku hasil kali (suku xy), maka grafiknya adalah suatu irisan kerucut yang dipindahkan ke luar dari posisi yang standar tetapi tidak diputar. Irisan kerucut ini dapat dibawa ke posisi standar dengan menggeser sumbu-sumbu koordinatnya secara tepat. Untuk melakukan ini, pertama-tama kumpulkanlah suku-suku yang memuat x dan atau suku-suku yang memuat y. Hal ini menghasilkan persamaan-persamaan yang ekuivalen, yaitu

$$x^2 + 4y - 6x + 17 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x = -4y - 17$$

Kemudian bentuklah melengkapkan kuadrat, sehingga kita dapatkan

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = -40 - 17 + 9$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2 = -4(y+2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

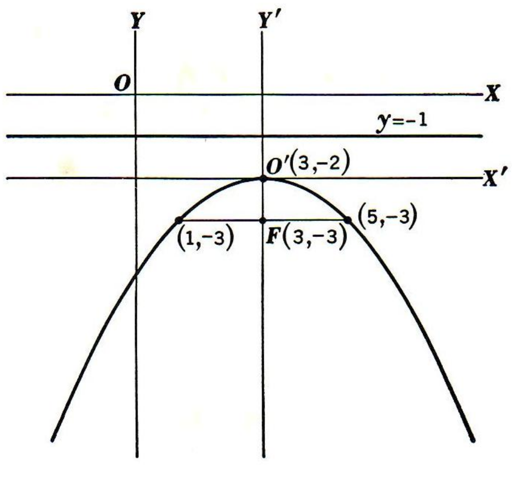
Jika kita menggeser suku-suku koordinat dengan menggunakan persamaan pergeseran (persamaan translasi)

$$x' = x - 3 \;\;,\;\; y' = y + 2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

maka persamaan (23) menjadi bentuk

$$x'^2 = -4y$$

yang merupakan persamaan parabola dalam posisi standar pada sistem koordinat x' y' dengan titik pangkal koordinat yang baru (a , b) = (3 , - 2) (Gambar 12. 6). Persamaan ini menyatakan sebuah parabola yang terbuka ke bawah dengan titik puncak (3 , -2), titik fokus (3 , -3), dan direktriksnya y = -1 (ingat persamaan sederhana parabola).



Gambar 12. 6

Sekarang kita akan melihat bagaimana mengidentifikasi bangun-bangun irisan kerucut yang dirotasi keluar dari posisi standarnya. Untuk itu kita tinjau kembali bentuk umum persamaan kuadrat dalam variabel x dan y (yaitu persamaan 15).

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + f = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{x}^t A \mathbf{x} + k \mathbf{x} + f = 0$$

dengan

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, perhatikanlah irisn kerucut C yang persamaannya pada sistem koordinat x y (XOY) adalah

$$\mathbf{x}^t A \mathbf{x} + K \mathbf{x} + f = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

Kita akan memutar (merotasikan) sumbu-sumbu koordinat x y sehingga persamaan irisan kerucut dalam sistem koordinat x’ y’ yang baru tidak menurut suku hasil kali. Hal ini bias dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut:

Langkah 1. Carilah suatu matriks

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$$

yang secara ortogonal mendiagonalkan bentuk kuadrat $\mathbf{x}^t A \mathbf{x}$.

Langkah 2. Jika perlu, pertukarkan kolom-kolom P, untuk menjadikan det (P) = 1. Hal ini menjamin bahwa transformasi koordinat ortogonal

$$\mathbf{x} = P\,\mathbf{x}', \text{ yaitu } \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

adalah suatu rotasi.

Langkah 3. Untuk mendapatkan persamaan C pada sistem koordinat x’ y’, substitusikanlah (25) ke persamaan (24). Hal ini menghasilkan

$$(P\,\mathbf{x})^t A (P\,\mathbf{x}') + K (P\,\mathbf{x}') + f = 0$$

$$\Leftrightarrow (\mathbf{x}')^t (P^t A P)\mathbf{x}' + (KP)\,\mathbf{x}' + f = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

Karena P mendiagonalkan A secara ortogonal,

$$P^t\,A\,P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

dengan λ_1 dan λ_2 adalah nilai-nilai eigen A. Jadi persamaan (26) dapat kita tulis ulang sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + f = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 (x')^2 + \lambda_2 (y')^2 + d'x' + e'y' + f = 0$$

(dengan $d' = dp_{11} + ep_{21}$ dan $e' = dp_{12} + ep_{22}$). Persamaan ini tidak memuat suku hasilkali (suku xy).

Teorema berikut meringkaskan bahasan ini.

Teorema 12. 2. (Teorema sumbu utama untuk R^2).

Misalkan $ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ adalah persamaan irisan kerucut C, dan misalkan

$$\mathbf{x}^t A\, \mathbf{x} = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

adalah bentuk kuadrat yang terasosiasinya. Sebagai akibatnya sumbu-sumbu koordinat bisa dirotasi sehingga persamaan untuk C pada sistem koordinat x' y' yang baru mempunyai bentuk

$$\lambda_1 (x')^2 + \lambda_2 (y')^2 + d'x' + e'y' + f = 0$$

dengan λ_1 dan λ_2 adalah nilai-nilai eigen A. Rotasi tersebut bisa dilakukan dengan substitusi

$$\mathbf{x} = P\, \mathbf{x}'$$

dengan P mendiagonalkan $\mathbf{x}^t A\, \mathbf{x}$ secara ortogonal dan det (P) = 1.

Contoh 12. 12

Jelaskan irisan kerucut C yang persamaannya adalah

$$5x^2 - 4xy + 8y^2 - 36 = 0$$

Penyelesaian:

Bentuk matriks dari persamaan ini adalah

$$\mathbf{x}^t A \, \mathbf{x} - 36 = 0 \quad \text{...} \quad (27)$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 36 = 0$$

dengan

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$$

Persamaan karakteristik matriks A adalah

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 5 & -2 \\ -2 & \lambda - 8 \end{bmatrix} = (\lambda - 9)(\lambda - 4) = 0$$

sehinga nilai-nilai eigen A adalah $\lambda = 4$ dan $\lambda = 9$.

Basis ortonormal untuk ruang eigennya (buktikan)

$$\lambda = 4 \text{ , } v_1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}, \lambda = 9, v_2 = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}.$$

Jadi, matriks yang mendiagonalisasi $\mathbf{x}^t A \, \mathbf{x}$ secara ortogonal adalah

$$P = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}.$$

Lebih jauh, det (P) = 1 sehingga transformasi koordinat ortogonal adalah

$$\mathbf{x} = P \, \mathbf{x}' \quad \text{...} \quad (28)$$

adalah sebuah rotasi. Dengan mensubstitusikan (28) ke (27) menghasilkan

$$(P \, \mathbf{x}')^t A (P \, \mathbf{x}') - 36 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\mathbf{x}')^t (\mathbf{P}^t A \, P) \, \mathbf{x}' - 36 = 0$$

Karena $P^t A \, P = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$

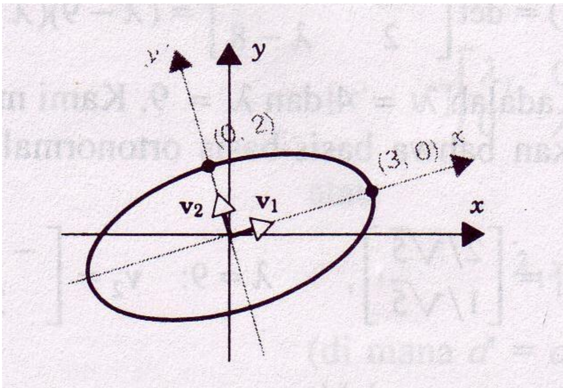
Maka persamaannya dapat ditulis sebagai

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - 36 = 0$$

$$\Leftrightarrow (4x')^2 + (9y')^2 - 36 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x'}{9} + \frac{y'}{4} = 1$$

berupa persamaan ellips yang sketsa grafiknya ditunjukkan oleh Gambar 12. 6. Pada gambar ini, vektor-vektor v_1 dan v_2 vektpr-vektor kolom dari P.



Gambar 12. 6

C. Penerapan pada Permukaan Kuadrik

Pada diskusi pembelajaran yang sekarang ini kita akan menerapkan teknik diagonalisasi yang dikembangkan sebelumnya pada persamaan kuadrat dengan tiga variabel. Hasil dari penerapan ini sekaligus untuk mengkaji **permukaan kuadrik** (*quadric surfaces*).

Perhatikan sebuah persamaan yang berbentuk

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + gx + hy + iz + j = 0 \quad \text{................} \quad (29)$$

dengan a, b, c, .., f tidak semuanya nol, dan kita namakan **persamaan kuadrat dalam variabel x, y, dan z**, sedangkan ungkapan

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz$$

dinamakan **bentuk kuadrat terasosiasi** (*assosiated quadratic form*).

Persamaan (29) dapat kita tulis dalam notasi matriks seperti berikut

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + y = 0$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{x}^t A \mathbf{x} + K \mathbf{x} + j = 0$$

dengan $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix}$, $K = \begin{bmatrix} g & h & i \end{bmatrix}$

Contoh 12. 13

Bentuk kuadrat yang diasosiasikan dengan persamaan kuadrat

$$3x^2 + 2y^2 – z^2 + 4xy + 3xz – 8yz + 7x + 2y + 3z – 7 = 0$$

adalah bentuk

$$3x^2 + 2y^2 – z^2 + 4xy + 3xz – 8yz.$$

Grafik-grafik dari persamaan-persaman kuadrat dalam x, y, dan z kita namakan **kuadrik** (*quadric*) atau **permukaan kuadrik** (*quadric surfaces*). Sebuah kuadrik yang persamaan dan sketsa grafiknya ditunjukkan dalam Gambar 12. 7 dikatakan berada dalam kedudukan standar relatif terhadap sumbu-sumbu koordinat.

Munculnya satu atau lebih suku hasil kali xy, xz, dan yz dalam persamaan sebuah kuadrik menunjukkan bahwa kuadrik dirotasikan ke luar dari posisi standar. Sedangkan munculnya dua suku yaitu suku-suku x^2 dan x, suku-suku y^2 dan y, atau suku-suku z^2 dan z dalam sebuah persaman kuadrik tampak suku hasil kali menunjukkan bahwa kuadrik tersebut digeser dari posisi standar.

Gambar 12. 7(a). Elipsoida: $\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} + \frac{x^2}{c^2} = 1$

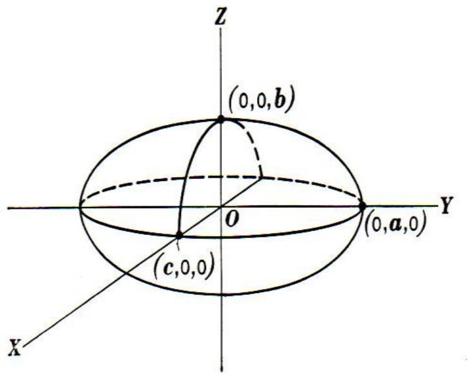
Gambar 12. 7(b). Paraboloida Eliptik: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z = 0$

Gambar 12. 7(c). Hiperboloida Daun(Cabang) Satu: $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

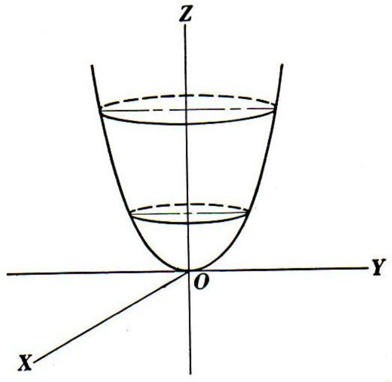
Gambar 12. 7(d). Hiperboloida Daun(Cabang) Dua: $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

Gambar 12. 7(e). Kerucut Ellipstik: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$

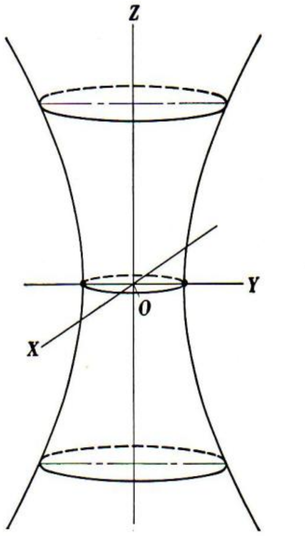
Gambar 12. 7(f). Paraboloida Hiperbolik: $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} + z = 0$



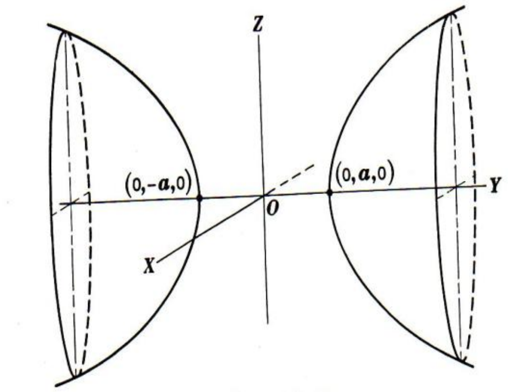
Gambar 12. 7(a)



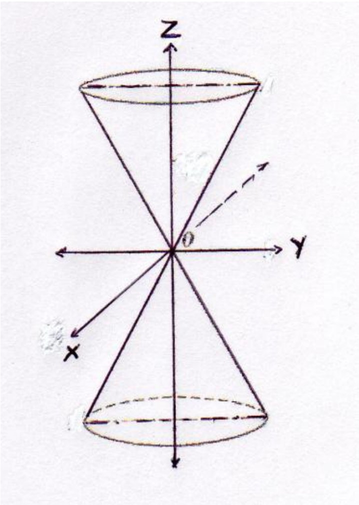
Gambar 12. 7(b)

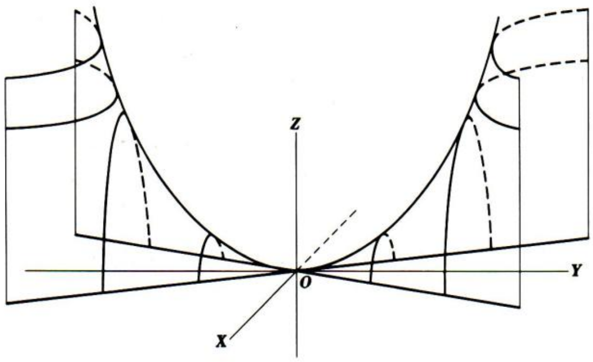


Gambar 12. 7(c)



Gambar 12. 7(d)





Gambar 12. 7(e)　　　　　　　　Gambar 12. 7(f)

Contoh 12. 14

Uraikanlah persamaan permukaan kuadratik berikut

$$3x^2 – 3y2 – z^2 + 42x + 144 = 0$$

Penyelesaian:

Dengan menyusun kembali suku-sukunya dan dengan melengkapkan kuadrat akan didapatkan:

$$3x^2 – 3y^2 – z^2 + 42x = - 144$$

$$\Leftrightarrow 3(x^2 + 14x) – 3y^2 – z^2 = - 144$$

$$\Leftrightarrow 3(x^2 + 14x + 49) – 3y^2 – z^2 = - 144 + 147$$

$$3\,(x + 7)^2 – y^2 - \frac{z^2}{3} = 1$$

Pergeseran sumbu dengan menggunakan persamaan

$$x' = x + 7$$

akan menghasilkan:

$$\frac{(x')^2}{1} - \frac{(y')^2}{1} - \frac{(z')^2}{3} = 1$$

Persamaan ini merupakan sebuah hiperboloida bercabang dua.

Sekarang kita akan mendiskusikan prosedur yang terkait dengan eliminasi suku hasil kali dari persamaan kuadrat dalam variabel x, y, dan z (permukaan kuadrik). Prosedur untuk mengidentifikasi kuadrik yang dirotasikan dari posisi standar serupa dengan prosedut untuk irisan kerucut (konik). Misalkan Q sebuah permukaan kuadrik yang persamaannya pada sistem koordinat xyz adalah

$$\mathbf{x}^t A \mathbf{x} + K \mathbf{x} + \mathbf{y} = 0 \quad \text{..} \quad (30)$$

Dalam hal ini kita ingin merotasikan sumbu koordinat xyz, untuk mendapatkan persamaan kuadrik pada sistem koordinat x' y' z' yang baru tidak mempunyai suku hasil kali. Hal ini bisa kita lakukan melalui beberapa langkah berikut ini.

Langkah 1. Carilah sebuah matriks P yang mendiagonalkan $\mathbf{x}^t A \mathbf{x}$ secara ortogonal.

Langkah 2. Jika perlu, tukarkanlah dua kolom dari matriks P, untuk mendapatkan det (P) = 1. Ini menjamin bahwa transformasi koordinat ortogonal

$$\mathbf{x} = P\,\mathbf{x'}, \text{ yaitu } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \quad \text{..} \quad (31)$$

adalah sebuah rotasi.

Langkah 3. Substitusikanlah (31) ke dalam (30). Dari sini akan mendapatkan sebuah persamaan untuk kuadrik pada koordinat x' y' z' tanpa suku hasil kali.

Teorema berikut merupakan ringkasan dari diskusi pembelajaran di atas.

Teorema 12. 3. (Teorema sumbu utama untuk R^3). Misalkan

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + gx + hy + iz + j = 0$$

adalah persamaan kuadrik Q, dan misalkan

$$\mathbf{x}^t A \mathbf{x} = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz$$

adalah bentuk kuadrik terasosiasi. Sumbu-sumbu koordinatnya dapat dirotasikan sehingga persamaan Q dalam sistem koordinat x' y' z' berbentuk

$$\lambda_1 (x')^2 + \lambda_2 (y')^2 + \lambda_3 (z')^2 + g'x' + h'y' + i'z' + j = 0$$

dengan λ_1, λ_2, dan λ_3 adalah nilai-nilai eigen matriks A. Rotasi tersebut dilakukan dengan mensubstitusikan

$$\mathbf{x} = P\,\mathbf{x'}$$

dengan P mendiagonalkan $\mathbf{x}^t A \mathbf{x}$ secara ortogonal dan det(P) = 1.

Contoh 12. 15

Diketahui permukaan kuadrik dengan persamaan

$$2x^2 + 3y^2 + 23\,z^2 + 72\,xz + 150 = 0.$$

Carilah **x =** P **x'** yang akan menghilangkan suku-suku hasil kali. Kemudian namailah kuadrik tersebut dan berikan pula persamaannya pada sistem kordinat x' y' z'.

Penyelesaian:

Bentuk matriks untuk persamaan kuadrat di atas adalah

$$\mathbf{x}^t\, A\, \mathbf{x} + 150 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (*)$$

dengan matriks A = $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 36 \\ 0 & 3 & 0 \\ 36 & 0 & 23 \end{bmatrix}$.

Nilai-nilai eigen dari A adalah $\lambda = -25$, $\lambda = 3$, dan $\lambda = 50$. Vektor-vektor ortogonak dari ruang-ruang eigen yang bersesuaian denga nilai-nilai tersebut berturut-turut:

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{dan} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Jadi kita dapatkan matriks yang mendiagonalisasi A secara ortogonal, yaitu

$$P = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

dan

$$P^t\, A\, P = \begin{bmatrix} -25 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 50 \end{bmatrix}.$$

Karena det (P) = 1 (buktikan), maka transformasi koordinat ortogonal **x** = P **x'** adalah sebuah rotasi. Dengan mensubstitusikan ungkapan ini pada persamaan (*) maka kita dapatkan

$$(P\,\mathbf{x}')^t\;\; A\,(P\,\mathbf{x}') + 150 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\mathbf{x}')^t\,(\,P^t\, A\, P)\,\mathbf{x}' + 150$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -25 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} + 150 = 0$$

$$\Leftrightarrow 25(x')^2 - 3(y')^2 - 50(z')^2 - 150 = 0$$

Persamaan permukaan kuadrik ini merupakan persamaan hiperboloida cabang dua.

Selanjutnya untuk lebih memantapkan pemahaman Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 2 di atas, cobalah kerjakan soal-soal Latihan 2 berikut.

Latihan 2

1. Coba Anda selidiki, manakah yang merupakan bentuk kuadrat
   a) $3x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 - 3x_1x_3$.
   b) $(x_1 - 2x_2)^2$.
   c) $x_1^2 - 7x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2x_3$.

2. Carilah bentuk kuadrat yang diasosiasikan dari persamaan-persamaan kuadrat berikut
   a) $x^2 - 4xy + 4y^2 - 7x + 2y + 7 = 0$.
   b) $6xy = 8$.

3. Carilah matriks simetris yang merupakan bentuk kuadrat dari persamaan
   $y^2 + 7x - 8y - 5 = 0$.

4. Sebutkan nama persamaan irisan kerucut tersebut dan sebutkan pula persamaannya dalam sistem koordinat yang ditranslasikan.
   $$2x^2 + y^2 - 12x - 4y + 18 = 0.$$

5. Tentukan persamaan translasi yang akan menempatkan kuadrik
   $$9x^2 + 36y^2 + 4z^2 - 18x - 144y - 24z + 153 = 0$$
   pada kedudukan standar, dan berikanlah nama pada kuadrik tersebut.

Setelah Anda mencoba mengerjakan soal-soal Latihan 1 di atas, bandingkanlah jawabannya dengan petunjuk jawaban berikut.

Petunjuk jawaban Latihan 2

1. a) $3x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 - 3x_1x_3$ adalah bentuk kuadrat dalam variabel-variabel x_1, x_2, dan x_3 dengan koefisien-koefisien x_1^2 adalah 3, x_2^2 adalah -2, dan x_3^2 adalah 1, x_1x_2 adalah 0, x_1x_3 adalah -3 dan x_2x_3 adalah 0.

   b). $(x_1 - 2x_2)^2 = x_1^2 - 4\,x_1x_2 + 4\,x_2^2$ adalah bentuk kuadrat dengan x sama dengan a = 1, b = -2, dan c = 2, lihat (16).

   c). $x_1^2 - 7x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2x_3$ bukan bentuk kuadrat, sebab memuat suku $x_1x_2x_3$ (perkalian tiga variabel).

2. Dari (15) dan (16), jelas bahwa bentuk kuadrat haruslah salah satu dari koefisien a, b, c tidak sekaligus nol., berarti

   a) $x^2 - 4xy + 4y^2$ dengan a = 1, b = -2, dan c = 4

   b) 6xy dengan a = c = 0 dan b = 3

3. Bentuk kuadrat dari persamn kuadrat $y^2 + 7x - 8y - 5 = 0$ adalah y^2, berarti a = b = 0 dan c = 1, sehingga matriks simetri yang merupakan bentuk kuadrat adalah:

   $$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Karena persamaan kuadrat $2x^2 + y^2 - 12\,x - 4y + 18 = 0$ memuat suku-suku x^2, x, y^2, dan y tanpa suku hasil kali (xy), maka grafiknya berupa irisan kerucut yang digeser keluar dari posisi standar tetapi tidak dirotasi. Irisan kerucut ini bisa dibawa ke posisi standar dengan digeser sumbu-sumbu koordinatnya secara ketat. Untuk mendaptkannya dilakukan dengan mengelompokkan suku-suku yang memuat x, suku-suku yang memuat y, dan dilanjutkan dengan melengkapkan kuadrat, yaitu:

   $$2x^2 + y^2 - 12\,x - 4y + 18 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x^2 - 12x) + (y^2 - 4y) + 18 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x^2 - 6x) + (y^2 - 4y) = -18$$

Dengan melengkapkan kuadrat pada dua ungkapan dalam kurung, maka kita dapatkan

$$2(x^2 - 6x + 9) + (y^2 - 4y + 4) = -18 + 18 + 4$$

$$\Leftrightarrow 2(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$$

Jika kita menggeser sumbu-sumbu koordinat berdasarkan persamaan pergeseran (translasi)

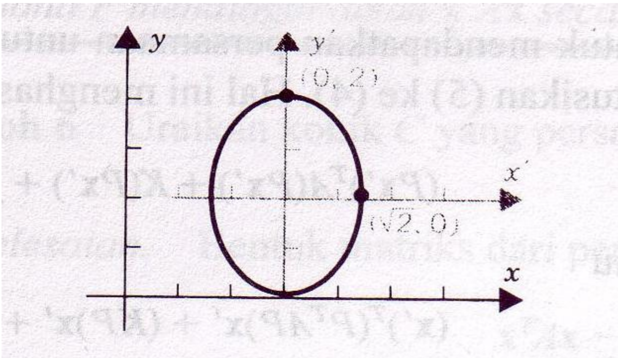
$$x' = x - 3,\ y' = y - 2$$

maka persamaan yang terakhir menjadi

$$2\ e'^2 + y'^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{x'^2}{2} + \frac{y'^2}{4} = 1$$

yang merupakan persamaan ellips dalam posisi standar pada sistem koordinat x'y' dengan O'(3 , 2). Sketsa grafik ellips ini terlihat pada Gambar 12. 8



Gambar 12. 8

5. Dengan mengelompokkan kembali suku-sukunya dan dengan melengkapkan kuadrat kita dapatkan

$$9x^2 + 36y^2 + 4z^2 - 18x - 144y - 24z + 153$$

$$\Leftrightarrow\ 9x^2 + 36y^2 + 4x^2 - 18x - 144y - 24z = -153$$

$$\Leftrightarrow\ 9(x^2 - 2x) + 36(y^2 - 4y) + 4(z^2 - 6z) = -153$$

$$\Leftrightarrow\ 9(x^2 - 2x + 1) + 36(y^2 - 4y + 4) + 4(z^2 - 6z + 9) = -153 + 9 + 144 + 36$$

$$\Leftrightarrow\ 9(x-1)^2 + 36(y-2)^2 + 4(z-3)^2 = 36$$

Pergeseran sumbu-sumbu dengan menggunakan persamaan geseran (translasi).

$$x' = x - 1,\ y' = y - 2,\ \text{dan } z' = z - 3$$

akan menghasilkan:

$$\frac{(x')^2}{4} + \frac{(y')^2}{1} + \frac{(z')^2}{9} = 1$$

Persamaan ini merupakan sebuah ellipsoida

Selanjutnya, buatlah rangkuman dari Kegiatan Belajar 2 di atas, kemudian dengan alternatif rangkuman berikut.

Rangkuman

1. Sebuah persamaan yang berbentuk $ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ dengan a, b, c, …, f adalah bilangan-bilangan real dengan a, b, dan c tidak sekaligus nol, dinamakan sebuah **persamaan kuadrat dalam x dan y**. Sedangkan pernyataan $ax^2 + 2bxy + cy^2$ dinamakan **bentuk kuadratis terasosiasi** (*associated uadratic form*) atau bentuk kuadrat dalam 2 variabel.

2. Bentuk kuadrat dalam n variabel $x_1, x_2, ..., x_n$ adalah suatu ekspresi yang dapat ditulis sebagai berikut: $(x_1, x_2, ..., x_n)\ A = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ dengan A adalah suatu matriks $n \times n$ yang simetris. Jika kita misalkan matriks $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ maka bisa ditulis secara lebih ringkas dalam bentuk $\mathbf{x}^t\ A\ \mathbf{x}$. Matriks A yang simetris ini dinamakan matriks **dari benruk kuadrat $\mathbf{x} \in$** A **x**.

3. Misalkan $x^t\ A\ x$ adalah bentuk kuadrat dalam variable-variabel $x_1, x_2, ..., x_n$ dengan A simetris. Jika P mendiagonalkan A secara ortogonal dan jika variabel-

variabel baru y_1, y_2, ..., y_n ddidefinisikan oleh persamaan x = Py, maka dengan mensubstitusikan persamaan ini ke dalam x^t A x menghasilkan x^t A x = y' D y = $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$ dengan λ_1, λ_2, λ_n adalah nilai-nilai eigen dari A dan D = P^t A P. Matriks P pada teorema ini dinamakan **mendiagonalkan secara ortogonal bentuk kuadrat** atau **mereduksi bentuk kuadrat menjadi suatu jumlah kuadrat.**

4. Bentuk umum persamaan kuadrat dalam variabel x dan y, yaitu $ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ grafiknya dinamakan **bentuk-bentuk kerucut** atau **konik** (*conics*), atau dikenal pula sebagai **irisan kerucut** atau **penampang kerucut**, atau **bagian kerucut** (*conic section*). Irisan-irisan kerucut yang paling penting adalah ellips, lingkaran, hiperbola, dan parabola. Irisan-irisan kerucut ini disebut **irisan-irisan kerucut yang tidak mengalami degenerasi** (*nondegenerate conics*). Jika benda dalam **posisi standar** (*standard position*) relatif terhadap sumbu-sumbu koordinat. Irisan-irisan kerucut sisanya disebut **mengalami degerasi** (*degenerate*) yang mencakup titik-titik tunggal dan pasangan-pasangan garis.

5. Jika kita amati irisan kerucut pada posisi standar ternyata persamaannya tidak memuat suku-suku hasil kali (suku-suku xy). Keberadaan suku-suku xy dalam persamaan irisan kerucut yang tidak mengalami degenerasi, menunjukkan bahwa irisan kerucut itu diputar (dirotasikan dari posisi standarnya). Juga tidak ada irisan kerucut dalam posisi standar yang sekaligus memuat suku x^2 dan x atau suku-suku y^2 dan y secara bersamaan. Jika tidak ada suku hasil kali, munculnya kedua pasangan ini dalam persamaan suatu irisan kerucut *nondegenerate* menunjukkan bahwa irisan kerucut itu dipindahkan atau digeser (ditranslasika) dari posisi standar.

6. Grafik-grafik dari persamaan-persaman kuadrat dalam x, y, dan z kita namakan **kuadrik** (*quadric*) atau **permukaan kuadrik** (*quadric surfaces*). Sebuah kuadrik yang persamaan dan sketsa grafiknya ditunjukkan dalam Gambar 12. 7

dikatakan berada dalam kedudukan standar relatif terhadap sumbu-sumbu koordinat. Munculnya satu atau lebih suku hasil kali xy, xz, dan yz dalam persamaan sebuah kuadrik menunjukkan bahwa kuadrik dirotasikan ke luar dari posisi standar. Sedangkan munculnya dua suku yaitu suku-suku x^2 dan x, suku-suku y^2 dan y, atau suku-suku z^2 dan z dalam sebuah persaman kuadrik tampak suku hasil kali menunjukkan bahwa kuadrik tersebut digeser dari posisi standar.

7. Misalkan $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + gx + hy + iz + j = 0$ adalah persamaan kuadrik Q, dan misalkan $\mathbf{x}^t A \mathbf{x} = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz$ adalah bentuk kuadrik terasosiasi. Sumbu-sumbu koordinatnya dapat dirotasikan sehingga persamaan Q dalam sistem koordinat x' y' z' berbentuk $\lambda_1 (x')^2 + \lambda_2 (y')^2 + \lambda_3 (z')^2 + g'x' + h'y' + i'z' + j = 0$ dengan λ_1, λ_2, dan λ_3 adalah nilai-nilai eigen matriks A. Rotasi tersebut dilakukan dengan mensubstitusikan $\mathbf{x} = P\,\mathbf{x'}$ dengan P mendiagonalkan $\mathbf{x}^t A \mathbf{x}$ secara ortogonal dan $\det(P) = 1$.

Untuk mengetahui tingkat penguasan Anda, kerjakanlah soal-soal Tes Formatif 2 berikut dengan memberi tanda silang (X) di muka pernyataan yang paling tepat.

Tes Formatif 2

1. Bentuk kuadrat yang diasosiasikan dari persamaan kuadrat $x^2 - xy + 5x + 8y - 3 = 0$ adalah
   A. $x^2 - xy + 5x + 8y$
   B. $x^2 - xy$
   C. $x^2 + 5x + 8y$
   D. $x^2 - xy - 3$

2. Di anatara berikut yang bukan merupakan bentuk kuadrat terasosiasi
   A. $x_1^2 - 6x_2^2 + x_1 - 5x_2$
   B. $x_1^2 - \sqrt{2}\, x_1x_2$
   C. $(x_1 - x_3)^2 + 2(x_1 + 4x_2)^2$
   D. $x_1x_2 - 3\, x_1x_3 + 2x_2x_3$

3. Matriks simetris yang merupakan bentuk kuadrat dari persamaan kuadratis $4x^2 - 2y^2 = 7$ adalah

A. $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ C. $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ D. $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

4. Matriks simetris yang merupakan matriks bentuk kuadrat dari $\mathbf{x}^t A \mathbf{x}$ dengan bentuk kuadratnya $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$ adalah

A. $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ C. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ D. $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$

5. Bentuk kuadrat dalam variabel yang baru dari penggantian variabel yang mereduksi bentuk kuadrat $2x_1x_2$ adalah

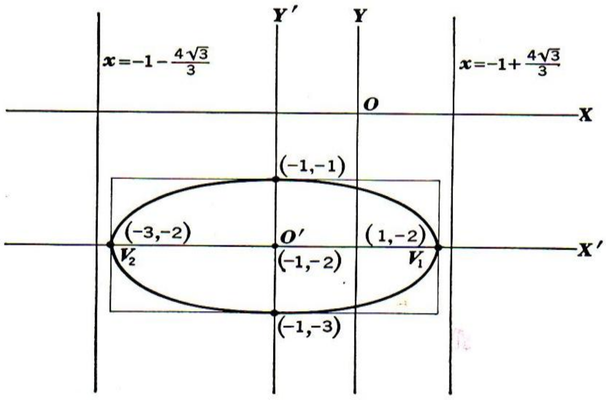
A. $y_1^2 + y_2^2$ C. $2y_1^2 + y_2^2$

B. $y_1^2 - 2y_2^2$ D. $y_1^2 - y_2^2$

6. Gambar 12. 9 berikut merupakan sketsa grafik dari persamaan

A. $x^2 + 4y^2 + 2x - 16y + 13 = 0$ C. $x^2 + 4y^2 + 2x + 16y - 13 = 0$

B. $x^2 + 4y^2 - 2x + 16y + 13 = 0$ D. $x^2 + 4y^2 + 2x + 16y + 13 = 0$



Gambar 12. 9

7. Grafik persamaan kuadrat $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 = 0$ menyatakan sebuah bentuk irisan kerucut

   A. ellips
   B. lingkaran
   C. titik
   D. hiperbola

8. Nama dan persamaan irisan kerucut berikut dalam sistem koordinat yang ditranslasikan dari persamaan $2x^2 - 3y^2 + 6x + 20y - 41 = 0$

   A. hiperbola $\dfrac{(y')^2}{\frac{419}{18}} + \dfrac{(x')^2}{\frac{419}{12}} = 1$

   B. ellips $\dfrac{(y')^2}{\frac{419}{18}} - \dfrac{(x')^2}{\frac{419}{12}} = 1$

   C. hiperbola $\dfrac{(y')^2}{\frac{419}{18}} - \dfrac{(x')^2}{\frac{419}{12}} = 1$

   D. ellips $\dfrac{(y')^2}{\frac{419}{18}} + \dfrac{(x')^2}{\frac{419}{12}} = 1$

9. Persamaan dan nama permukaan kuadrik akibat pergeseran dari persamaan $4x^2 + 36y^2 - 9z^2 - 16x - 216y + 304 = 0$ sehingga menempatkan pada kedudukan standar adalah

   A. $\dfrac{(x')^2}{9} + (y')^2 - \dfrac{(z')^2}{4} = 1$ (hiperbola cabang satu)

   B . $\dfrac{(x')^2}{9} + (y')^2 + \dfrac{(z')^2}{4} = 1$ (hiperbola cabang dua)

   C. $\dfrac{(x')^2}{9} + (y')^2 - \dfrac{(z')^2}{4} = 1$ (hiperbola cabang dua)

D. B . $\frac{(x')^2}{9} + (y')^2 + \frac{(z')^2}{4} = 1$ (hiperbola cabang satu)

10. Persamaan permukaan kuadrik akibat suatu rotasi **x** = P **x**' terhadap persamaan persamaan $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4xy + 4xz + 4yz - 3 = 0$

A. $\frac{(x')^2}{\frac{3}{2}} + \frac{(y')^2}{\frac{3}{2}} + \frac{(z')^2}{\frac{3}{8}} = 1$

B. $\frac{(x')^2}{\frac{3}{2}} + \frac{(y')^2}{\frac{3}{8}} + \frac{(z')^2}{\frac{3}{8}} = 1$

C. $\frac{(x')^2}{\frac{3}{8}} + \frac{(y')^2}{\frac{3}{2}} + \frac{(z')^2}{\frac{3}{8}} = 1$

D. $\frac{(x')^2}{\frac{3}{8}} + \frac{(y')^2}{\frac{3}{2}} + \frac{(z')^2}{\frac{3}{2}} = 1$

Balikan dan Tindak Lanjut

Sebagai umpan balik dan tindak lanjutnya, cocokanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 2 yang ada di bagian akhir modul ini. Hitunglah jumlah jawaban Anda yang benar. Kemudian gunakan rumus di bawah ini untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 2.

Rumus :

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{jumlah jawaban Anda yang benar}}{10} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan yang Anda capai :

90% - 100% = Baik sekali

80% - 89% = Baik

70% - 79% = Cukup

< 70% = Kurang.

Kalau Anda mencapai tingkat penguasaan 80% ke atas, Anda dapat meneruskannya pada modul berikutnya. **Bagus !** Tetapi bila tingkat penguasaan Anda masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi Kegiatan Belajar 2, terutama bagian yang belum Anda kuasai. Selamat belajar, semoga berhasil.

KUNCI JAWABAN TES FORMATIF

Modul 12

Tes Formatif 1

1. C Bentuk matriks dari sistem

$y_1' = 4y_1$

$y_2' = -3y_2$

adalah

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow Y' = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} Y$$

2. B Penyelesaian dari sistem

$y_1' = 4y_1$

$y_2' = -3y_2$

adalah

$y_1 = c_1 e^{4x}$

$y_2 = c_2 e^{-3x}$

$$\Leftrightarrow Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{4x} \\ c_2 e^{-3x} \end{bmatrix}$$

3. D Dari syarat awal yang diberikan, kita dapatkan

$2 = y_1(0) = c_1 e^0 = c_1$

$5 = y_2(0) = c_2 e^0 = c_2$

sehingga penyelesaian yangmemenuhi syarat awal adalah

$y_1 = 2 e^{4x}$, $y_2 = 5 e^{-3x}$

atau dalam notasi matriks,

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 e^{4x} \\ 5 e^{-3x} \end{bmatrix}$$

4. D Karena sistemnya

$y_1' = y_1 + y_2$

$y_2' = 4y_1 - 2y_2$

maka matriks koefisien dari sistem ini adalah

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

Persamaan karakteristik dari matriks A adalah

$\det(\lambda I - A) = 0$

$\Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda - 6 = 0$ (buktikan).

Jadi nilai-nilai eigen dari matriks A adalah $\lambda_1 = 2$ dan $\lambda_2 = -3$.

Misal sebuah vektor eigen dari A adalah

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

yang merupakan penyelesaian non trivial dari $(\lambda I - A) = 0$, atau

$$\begin{bmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -4 & \lambda - 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Jika $\lambda = 2$, sistem menjadi

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Leftrightarrow x_1 - x_2 = 0$

$\Leftrightarrow x_1 = t$

$x_2 = t \in R$

sehingga $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} t$

Jadi sebuah basis untuk ruang eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = 2$ adalah

$$p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Demikian pula Anda dapat menunjukkan bahwa

$$p_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ 1 \end{bmatrix}$$

adalah sebuah basis untuk ruang eigen yang bersesuaian dengan λ_2= -3.

Jadi matriks yang mendiagonalisasi A adalah

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

dan matriks diagonalnya adalah

$$D = P^{-1} A P = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya dengan mensubstitusikan

Y = P U dan Y' = P U'

Menghasilkan 'sistem diagonal" yang baru, yaitu

$$U' = D U = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} U$$

$\Leftrightarrow u_1' = 2u_1$

$u_2' = -3u_2$

Dari persamaan (2) penyelesaian dari sistem ini adalah

$u_1 = c_1 e^{2x}$

$u_2 = c_2 e^{-3x}$

$$\Leftrightarrow U = \begin{bmatrix} c_1 e^{2x} \\ c_2 e^{-3x} \end{bmatrix}$$

sehingga persamaan Y = P U menghasilkan penyelesaian baru untuk Y, yaitu

$$\Leftrightarrow Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 e^{2x} \\ c_2 e^{-3x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{2x} - \frac{1}{4} c_2 e^{-3x} \\ c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x} \end{bmatrix}$$

$\Leftrightarrow y_1 = c_1 e^{2x} - \frac{1}{4} c_2 e^{-3x}$

…..................... (*)

$y_2 = c_1 e^{2x} + \frac{1}{4} c_2 e^{-3x}$

5. B Jika mensubstitusikan syarat awal pada penyelesaian dari sistem pada soal nomor 4 di atas (*), maka

$c_1 - \frac{1}{4} c_2 = 1$

$c_1 + \ c_2 = 6$

Dengan menyelesaikan sistem ini, maka kita dapatkan

$c_1 = 2$, $c_2 = 4$

sehingga penyelesaian dari sistem pada soal nomor 4 (*) menjadi

$y_1 = 2\, e^{2x} - \ e^{-3x}$

$y_2 = 2\, e^{2x} + 4\, e^{-3x}$

6. A Sejalan dengan petunjuk dan yang diketahui, misalkan $y_1 = y$ dan $y_2 = y'$, maka

$y_1' = y_2$ dan $y_2' = y'' = y' + 6y = 6y_1 + y_2$

Dari bentuk terakhir ini kita dapatkan sebuah sistem berikut

$y_1' = \qquad y_2$

$y_2' = 6y_1 + y_2$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$

7. D Karena $\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow Y' = A\, Y$

maka

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$$

dengan nilai-nilai eigen dari matriks A adalah

$\lambda_1 = 2$ dan aa $\lambda_2 = -3$ yang berturut-turut berkorespondensi dengan basis untuk ruang eigen yang direntang (dibangun) oleh vektor-vektor

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ dan } \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{(buktikan).}$$

Jadi kita dapatkan matriks

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

yang mendiagonalisasi matriks P, dan matriks diagonalnya adalah

$$D = P^{-1} A P = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{(buktikan).}$$

Dengan mensubstitusikan

$$Y = PU \text{ dan } Y' = P U'$$

Menghasilkan sistem diagonal yang baru, yaitu:

$$U' = D U = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} U$$

$$\Leftrightarrow u_1' = -2u_1$$

$$u_2' = 3u_2$$

Dari persaman (2), penyelesaian dari sistem ini adalah

$$u_1 = c_1 e^{-2x}$$

$$u_2 = c_2 e^{3x}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{u} = \begin{bmatrix} c_1 e^{-2x} \\ c_2 e^{3x} \end{bmatrix}$$

Jadi persamaan Y = P U menghasilkan Y sebagai penyelesaian yang baru

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 e^{-2x} \\ c_2 e^{3x} \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow y_1 = -c_1 e^{-2x} + c_2 e^{3x}$$

$$y_2 = 2c_1 e^{-2x} + 3c_2 e^{3x}$$

Karena telah diperlihatkan di depan bahwa $y_1' = y_2$, dan karena $y_1 = y$, maka

$$y = -c_1 e^{-2x} + c_2 e^{3x}$$

Karena c_1 dan c_2 adalah sebarang bilangan, maka suatu jawaban yang benar dapat ditulis dalam bentuk

$$y = a e^{-2x} + b e^{3x}.$$

8. C Karena $f(x) = x^2$, maka

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\, dx = \frac{8}{3}\pi^2$$

Dengan menggunakan Contoh 12. 4 dan beberapa integrasi parsial atau tabel integras=l, maka kita dapatkan (buktikan)

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \text{ Cos } (kx)\, dx = -\frac{2}{k\pi}\int_0^{2\pi} x \text{ Sin } (kx)\, dx = \frac{4}{k^2}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \text{ Sin } (kx)\, dx = -\frac{(2\pi)^2}{k\pi}\int_0^{2\pi} x \text{ Cos } (kx)\, dx = -\frac{4}{k}$$

untuk k = 1, 2, ...

Jadi aproksimasi kuadrat terkecil pada x^2 di $[0 , 2\pi]$ dengan menggunakan polinom trigonometris yang berorde $\leq$ 3 adalah

$$x^2 \approx \frac{4}{3}\pi^2 + 4 \text{ Cos } x + \text{Cos } 2x + \frac{4}{9} \text{ Cos } 3x - 4\pi \text{ Sin } x$$

$$- 2\pi \text{ Sin } 2x - \frac{4}{3}\pi \text{ Sin } 3x.$$

9. C Ruang W yang dibangun dari polinom-polinom dalam bentuk $a_0 + a_1 x$ pada selang [0 , 1] mempunyai basis {1 , x}. Dengan proses Gram-Schmidt akan menghasilkan basis ortonormal $\{1, \sqrt{3}\ (2x - 1)\}$. Oleh karena itu proyeksi ortogonal dari e^x pada W adalah

$$\begin{aligned} \text{proy}_{\,W}\, e^x &= \langle e^x , 1 \rangle 1 + \langle e^x, \sqrt{3}(2x-1) \rangle \sqrt{3}(2x-1) \\ &= e - 1 + \sqrt{3}(3 - e)\, [\sqrt{3}(2x-1)] \\ &= (4e - 10) + (18 - 6e)x. \end{aligned}$$

10. C Deret Fourier dari $f(x) = \pi - x$ adalah

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1} (a_k \text{ Cos } kx + b_k \text{ Sin } kx)$$

dengan

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (\pi - x)\, dx = 0$$

dan

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(\pi - x)\ \text{Cos}\ (kx)\ dx = 0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(\pi - x)\ \text{Sin}\ (kx)\ dx = \frac{2}{k}$$

untuk k = 1, 2, ...

Jadi deret Fourier yang diperlukan adalah $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k}\ \text{Sin}\ (kx)$

Perhatikan bahwa ini adalah konsisten dengan dihasilkan pada Contoh 12. 4(b).

Tes Formatif 2

1. B Bentuk kuadrat dari persamaan berikut

$x^2 - xy + 5x + 8y - 3 = 0$

adalah $x^2 - xy$ dengan a = 1, b = $\frac{1}{2}$, dan c = 0

2. A Yang bukan bentuk koordinay terasosiasi adalah $x_1^2 - 6x_2^2 - x_1 - 5x_2$, sebab masih memuat suku-suku x_1 dan x_2. Bentuk ini merupakan persaman kuadrat.

3. C Bentuk kuadrat dari persamaan kuadrat $4x^2 - 2y^2 = 7$ adalah $4x^2 - 2y^2$

$$4x^2 - 2y^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

sebab a = 4, b = 0 dan c = -2, sehingga

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

4. D $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = x' A x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

Koefisien	Kedudukan dalam matriks A
$x_1x_2 = 1$	$a_{12} = a_{21} = \frac{1}{2}$
$x_1x_3 = 1$	$a_{13} = a_{31} = \frac{1}{2}$
$x_2x_3 = 1$	$a_{23} = a_{32} = \frac{1}{2}$

5. D Bentuk kuadrat $2x_1x_2$ dapat kita tulis dalam bentuk

$x^t A x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ (lihat (16) dan (17))

Persamaan karakteristik matriks A adalah

$\det(\lambda I - A) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0,$

sehingga vektor-vektor eigen dari matriks A adalah $\lambda_1 = 1$ dan $\lambda_2 = -1$

Untuk $\lambda_1 = 1$, maka sistem persamaan linearnya

$(\lambda I - A)\, x = 0$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow x_1 - x_2$

$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} t.$

Dengan proses Gram-Schmidt didapatkan basis ortonormal

$$v_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Untuk λ_2 = -1 didapatkan $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ t (buktikan), sehingga basis ortonormalnya

$$v_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad \text{atau} \quad v_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Jadi matriks yang mendiagonalisasi ortogonal matriks simetris A adalah

$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ (matriks yang mendiagonalisasi bentuk koordinat $2x_1x_2$).

Dengan mensubstitusikan $\mathbf{x}$ = P $\mathbf{y}$ yang menghilangkan suku-suku hasil kali adalah

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_2$$

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} y_2$$

Bentuk kuadrat yang baru adalah

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow y_1^2 - y_2^2$$

6. D $x^2 + 4y^2 + 2x + 16y + 13 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 4y^2 + 2x + 16y = - 13$

$\Leftrightarrow (x^2 + 2x) + (4y^2 + 16y) = -13$

$\Leftrightarrow (x^2 + 2x) + 4(y^2 + 4y) = -13$

$\Leftrightarrow (x^2 + 2x + 1) + 4(y^2 + 4y + 16) = -13 + 1 + 16$

$\Leftrightarrow (x + 1)^2 + 4(y + 2)^2 = 4$

Sumbu-sumbu koordinatnya digeser dengan persamaan pergeseran

$$x' = x + 3 \quad \text{dan} \quad y' = y + 2$$

sehingga kita dapatkan

$$(x')^2 + 4(y')^2 = 4$$

$$\frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{1} = 1$$

Persamaan ini adalah persamaan ellips dalam posisi pada sistem x'y' dengan O'(-1 , -2), k = 2 dan l = 1.

7. C $x^2 + y^2 – 2x – 4y + 5 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 – 2x + 1 + y^2 – 4y + 4 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 0$

Bentuk ini merepresentasikan sebuah titik (1 , 2), yaitu bentuk irisan kerucut imajiner (*imaginary conic*).

$\lambda_1 = 1$ dan $\lambda_2 = -1$ (nilai-nilai eigen A)

8. B Jika kita melakukan melengkapkan pada persamaan $2x^2 – 3y^2 + 6x + 20y + 41 = 0$ maka kita dapatkan bentuk:

$$2(x^2 + 3x + \frac{9}{4}) – 3(y^2 - \frac{20}{3}y + \frac{100}{9}) = -41 - \frac{9}{2} - \frac{100}{3}$$

$\Leftrightarrow 2(x + \frac{3}{2})^2 - 3(y - \frac{10}{3})^2 = -\frac{419}{6}$

$\Leftrightarrow 12(x + \frac{3}{2})^2 - 18(y')^2 = -419$

Ini adalah persamaan hiperbola dengan persamaan

$$\frac{(y')^2}{\frac{419}{18}} - \frac{(x')^2}{\frac{419}{12}} = 1.$$

9. D Dengan mengelompokkan dan melengkapkan kuadrat suku-sukunya, maka didapatkan

$4x^2 + 36y^2 - 9z^2 - 16x - 216y + 304 = 0$

$4(x^2 - 4x + 4) + 36(y^2 - 6y + 9) - 9z^2 = -304 + 16 + 324$

$4(x - 2)^2 + 36(y - 3)^2 - 9z^2 = 36$

$\frac{(x-2)^2}{9} + (y-3)^2 - \frac{z^2}{4} = 1$

akan menghasilkan

$$\frac{(x')^2}{9} + (y')^2 - \frac{(z')^2}{4} = 1$$

yang menyatakan persamaan sebuah hiperboloida cabang satu.

10. A Bentukmatriks untuk persaman kuadrik

$$4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4xy + 4xz + 4yz - 3 = 0$$

adalah

$$x^t A x - 3 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (*)$$

dengan

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Nilai-nilai eigen dari A adalah $\lambda = 2$ dan $\lambda = 8$ dengan matriks yang mendiagonalisasi A secara ortogonal adalah (buktikan)

$$P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

Karena det (P) = 1, maka transformasi koordinat ortogonal **x** = P **x**’ adalah sebuah rotasi. Selanjutnya dengan mensubstitusikan ungkapan ini pada (*) kita dapatkan

$$(P\,x')^t\,A\,(P\,x') - 3 = 0$$

$$(x')^t\,(P^t\,A\,P)\,x' - 3 = 0$$

Karena

$$P^t\,A\,P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix},$$

maka

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x')^2 + 2(y')^2 + 8\,(z')^2 = 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x')^2}{\frac{3}{2}} + \frac{(y')^2}{\frac{3}{2}} + \frac{(z')^2}{\frac{3}{8}} = 1 \qquad \text{(ellipsoida)}$$

Glosarium

. **Aproksimasi**, **hampiran**, *aproximation* adalah pendekatan yang terbaik yang mendekati nilai atau fungsi yang sebenarnya.

. **Bentuk kuadrat terasosiasi**, *associated quadratic form*, adalah persamaan kuadrat dengan x dan y sebagai variabel dalam bentuk $ax^2 + 2bxy + cy^2$ untuk a, b, dan c bilangan real yang tidak sekaligus nol.

. **Galat**, **deviasi**, *error* atau *deviation*, adalah kesalahan atau penyimpangan dari nilai yang sebenarnya.

. **Konik, irisan kerucut, penampang kerucut,** *conic* atau *conic section* adalah irisan antara bidang datar dengan kerucut lingkaran tegak yang dapat berupa titik, garis, lingkaran, parabola, ellips, atau hiperbola.

. **Kuadrik** (*quadric*), **permukaan kuadrik** (*quadric surfaces*) adalah grafik dari persamaan kuadrat dalam tiga variabel.

. **Masalah nilai awal**, *initial value problem* adalah masalah menyelesaikan suatu persamaan diferensial yang memenuhi syarat awal.

. **Penyelesaian umum**, *general soluion*, adalah bentuk khusus suatu fungsi yang menjadi penyelesaian dari suatu persamaan diferensial yang mempunyai tak hingga banyak penyelesaian.

. **Penyelesaian khusus**, *paticular solution* adalah solusi dari penyelesaian umum suatu persamaan diferensial disebabkan keberadaan syarat tambahan.

. **Persamaan kuadrat dalam x dan y**, *quadratic equation x and y* adalah persamaan dalam x dan y sebagai variabel-variabelnya dan paling tinggi variabelnya berderajat dua.

. **Syarat awal**, *initial condition* adalah sebuah syarat tertentu yang menentukan nilai penyelesaian pada sebuah titik.

DAFTAR PUSTAKA

Ayres, Frank, JR.Ph.D, (1982). *Theory and Problems of Matrices*, Singapore: Schaum's Outline, Mc-Graw Hill Book Company.

Anton Howard, (1987), *Elementary Linear Algebra*, 5th Edition New York: John Wiley & Sons.

Larry Smith. (1998). *Linear* Algebra. Gottingen: Springer.

Raisinghania & Aggarwal, R.S, (1980), *Matrices*, New Delhi: S.Chan & Company Ltd.

Roman Steven (1992). *Advanced Linear Algebra*, New York, Berlin, Herdelberg, London, Paris, Tokyo, Hongkong, Barcelona, Budapest: Springer-Velag.

Seymour Lipschutz. (1981). *Linear Algebra*, Singapore: Schaum's Outline, Mc-Graw Hill Book Company.