NILAI EIGEN, VEKTOR EIGEN DAN DIAGONALISASI METRIKS

Pendahuluan

Modul yang ke-11 dari mata kuliah Aljabar Linear ini akan mendiskusikan beberapa konsep yang berguna bagi kita sebagai pengajar dan pendalaman dari materi-materi matematika di sekolah. Selain itu akan sangat bermanfaat pula bagi bagi kita ketika mempelajari materi-materi matematika lanjut dan penerapan-penerapan matematika dalam sain dan teknologi, termasuk Modul 12 (Penerapan Aljabar Linear).

Cakupan materi pembelajaran dalam modul ini meliputi nilai eigen (*eigen value*), vektor eigen (*eigen vector*) dan diagonalisasi sebuah matriks, termasuk diagonalisasi ortogonal dan matriks simetrik. Kesemua materi bahasan ini akan terkait dengan vektor, dan vektor-vektor tersebut muncul secara alami dalam sebuah getaran, sistem elektrik, genetik, reaksi kimia, mekanika kuantum, tekanan mekanis, geometri, reaksi kimia, geometri dan ekonomi. Sedangkan bahasan secara khusus tentang konsep vektor baik di ruang dua (R^2) maupun di ruang tiga (R^3) dan ruang n (R^n) telah kita pelajari dalam modul-modul sebelumnya.

Sebagai tujuan instruksional umum setelah Anda mempelajari materi dalam modul ini diharapkan dapat memahami nilai eigen, vektor eigen dan permasalahan diagonalisasi dari sebuah matriks. Sedangkan sebagai tujuan instruksional khususnya, diharapkan Anda dapat:

a. menentukan nilai eigen dan vektor eigen dari suatu matriks/ transformasi linear;
b. menentukan hasil diagonalisasi sebuah matriks.

Adapun susunan materi dalam modul ini terbagi menjadi dua kegiatan belajar sebagai berikut.

Kegiatan Belajar 1 : Nilai eigen, vektor eigen, persamaan karakteristik, dan polinom karakteristik dari suatu matriks.

Kegiatan Belajar 2: Diagonalisasi, diagonalisasi ortogonal dan diagonalisasi matriks-matriks simetris.

Petunjuk Belajar

Untuk dapat memahami modul ini dengan baik serta mencapai kompetensi yang diharapkan, gunakanlah strategi belajar berikut:

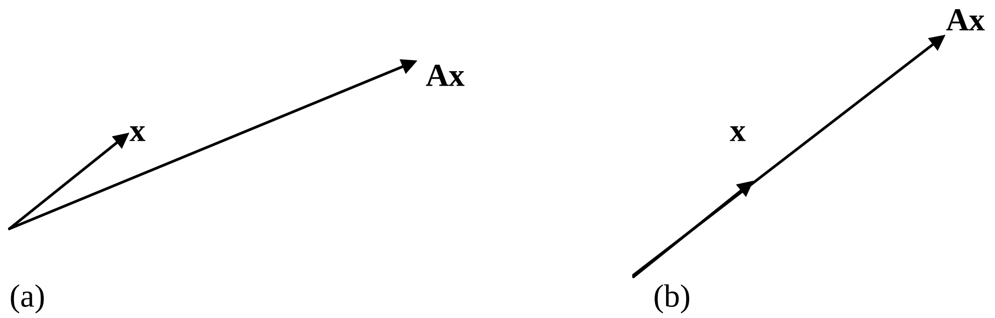
1. Sebelum membaca modul ini, cermati terlebih dahulu glosarium pada akhir modul yang memuat istilah-istilah khusus yang digunakan dalam modul ini.
2. Baca materi modul dengan seksama, tambahkan catatan pinggir, berupa tanda tanya, pertanyaan, konsep lain yang relevan, dan lain-lain sesuai dengan pemikiran yang muncul.
3. Cermati dan kerjakan soal-soal latihan dan tes formatif seoptimal mungkin, dan gunakan rambu-rambu jawaban untuk membuat penilaian tentang kemampuan pemahaman Anda.
4. Buatlah catatan khusus hasil diskusi dalam tutorial untuk digunakan dalam pembuatan tugas dan ujian akhir.
5. Usahakan Anda mempelajari beberapa buku sumber penunjang lainnya.

KEGIATAN BELAJAR 1
NILAI DAN RUANG EIGEN

A. Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Pada pembahasan pembelajaran yang lalu kita telah mendiskusikan vektor-vektor di R^2 dan R^3 (Modul 4) sampai vektor-vektor di R^n (Modul 5). Vektor-vektor tersebut muncul secara alamiah dalam kejadian vibrasi, elektrik, genetika, mekanika, kimiawi, ekonomi, dan konsep-konsep matematika lainnya. Khusus pada bagian ini kita akan menunjukkan bagaimana mencari vektor-vektor ini dan pada modul yang terakhir nanti akan mendiskusikan beberapa penerapannya.

Untuk lebih jelasnya kita perhatikan sebuah matriks A yang berukuran $n \times n$ dan sebuah vektor **x** pada R^n dan biasanya secara umum tidak ada hubungan antara vektor **x** dengan vektor **Ax** (Gambar 11. 1a). Namun, ada beberapa vektor **x** tak nol sehingga **x** dan **Ax** merupakan penggandaan satu sama lainnya (Gambar 11. 1b).



Gambar 11. 1

Sekarang kita akan meninjau ulang beberapa konsep yang telah kita diskusikan dalam pembelajran yang lalu untuk dikembangkan lebih lanjut.

Definisi 11. 1. Misalkan A adalah matriks $n \times n$, maka vektor **x** yang tidak nol di R^n disebut **vektor eigen** (*eigen vector*) dari A jika **Ax** adalah kelipatan skalar dari **x**, yaitu $\mathbf{Ax} = \lambda\,\mathbf{x}$ untuk suatu skalar λ. Skalar λ dinamakan **nilai eigen** (*eigen value*) dari A.

Contoh 11. 1

Matriks A = $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$, maka vektor $\mathbf{x}$ = $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ adalah vektor eigen dari matriks A, sebab **Ax** adalah kelipatan dari **x**, yaitu

$$\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 3\mathbf{x}.$$

Dalam hal ini $\lambda = 3$ adalah nilai eigen dari matriks A.

Contoh 11. 2

Diketahui matriks P = $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Vektor $\mathbf{x_1} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ dan $\mathbf{x_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ adalah vektor-vektor eigen dari matriks P, sebab

$$\mathrm{P}\mathbf{x_1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2\ \mathbf{x_1}$$

dan $$\mathrm{P}\mathbf{x_1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1\ \mathbf{x_2}$$

Nilai-nilai eigen dari matriks P adalah $\lambda_1 = 2$ dan $\lambda_2 = 1$.

Apakah setiap matriks A yang berukuran n $\times$ n selalu mempunyai vektor eigen dan nilai eigen? Berapa banyak vektor eigen dan nilai eigen yang dimiliki oleh sebuah matriks A yang berukuran n $\times$ n? Untuk menjawab pertanyaan-pertanyaan ini sekaligus memberikan penjelasan lebih lanjut dari dua contoh di atas, sehingga kita dapat dengan cepat dan tepat memberikan jawabannya, perhatikanlah uraian berikut dengan baik.

B. Persamaan Karakteristik

Untuk mencari nilai eigen dari matriks A yang berukuran n $\times$ n, maka kita perlu memperhatikan kembali definisi vektor eigen dan nilai eigen, yaitu $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Bentuk ini dapat kita tulis sebagai berikut:

$$\mathbf{Ax} = \lambda \, I \, \mathbf{x}.$$

$$\Leftrightarrow (\lambda I - A)\,\mathbf{x} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\Leftrightarrow (A - \lambda I)\,\mathbf{x} = 0$$

Supaya λ menjadi nilai eigen, maka harus ada penyelesaian yang tidak nol dari persamaan (1) ini. Menurut teorema dalam bahasan sebelumnya, maka persamaan (1) akan mempunyai penyelesaian tak nol (mempunyai penyelesaian non trivial) jika dan hanya jika:

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

Definisi 11. 2. Persamaan det (λ I – A) = 0 dengan λ sebagai variabel disebut **persamaan karakteristik** dari matriks A. Akar-akar atau skalar-skalar yang memenuhi persamaan ini adalah nilai-nilai eigen (nilai-nilai karakteristik) dari matriks A. Det $(\lambda I - A) \equiv f(\lambda)$ yaitu berupa polinom dalam λ yang dinamakan **polinom karakteristik**.

Dari pemahaman definisi di atas, jelas bahwa jika A adalah matriks $n \times n$, maka persamaan karakteristik dari matriks A mempunyai derajat n dengan bentuk

$$\det(\lambda I - A) = f(\lambda) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n = 0$$

Menurut teorema dasar aljabar kita dapatkan bahwa persamaan karakteristik tersebut mempunyai paling banyak n penyelesaian yang berbeda (Ingat metode Horner dan persamaan pangkat tinggi). Jadi, suatu matriks yang berukuran $n \times n$ paling banyak mempunyai n-nilai eigen yang berbeda.

Setelah kita memperhatikan uraian di atas, tentunya para pembaca berharap untuk meninjau ulang Contoh 11. 1 atau Contoh 11. 2 di atas sehingga kita mendapatkan nilai-nilai eigen dari matriks 2×2 dengan menyelesaikan persamaan karakteristiknya

Contoh 11. 3

Carilah nilai-nilai eigen dari matriks $Q = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

Penyelesaian:

Polinom karakteristik dari matriks Q adalah

$$\det(\lambda\, I - Q) = \det\left\{\lambda\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}3 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix}\right\}$$

$$= \det\begin{bmatrix}\lambda-3 & -2\\ 1 & \lambda\end{bmatrix}$$

$$= \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

dan persamaan karakteristik dari matriks Q adalah

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

Penyelesaian dari persamaan ini adalah $\lambda_1 = 1$ dan $\lambda_2 = 2$.

Jadi, nilai-nilai eigen dari matriks Q adalah 1 dan 2

Contoh 11. 4

Diketahui untuk $A = \begin{bmatrix}4 & 0 & 1\\ -2 & 1 & 0\\ -2 & 0 & 1\end{bmatrix}$

Carilah: a) Persamaan karakteristik dari matriks A

b) Nilai-nilai eigen dari matriks A

Penyelesaian:

a) Persamaan karakteristik dari matriks A adalah

$$\det(\lambda\, I - A) = \det\begin{bmatrix}\lambda-4 & 0 & 1\\ 2 & \lambda-1 & 0\\ 2 & 0 & \lambda-1\end{bmatrix} = 0$$

$$\text{atau } \det(A - \lambda\, I) = \det\begin{bmatrix}4-\lambda & 0 & 1\\ -2 & 1-\lambda & 0\\ -2 & 0 & 1-\lambda\end{bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (4-\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda & 0\\ 0 & 1-\lambda\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}-2 & 1-\lambda\\ -2 & 0\end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (4-\lambda)\,(1-\lambda)^2 + 2(1-\lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow (4-\lambda)\,(1-2\lambda+\lambda^2)\,(2-2\lambda) = 0$$

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\,\lambda - 6 = 0$$

b) Untuk mencari nilai-nilai eigen dari matriks A harus mencari akar-akar atau nilai-nilai λ yang memenuhi persamaan pangkat tiga:

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Untuk menyelesaikan persamaan ini, kita perlu terlebih dahulu memahami persamaan pangkat tinggi dengan akar-akar bulat yang telah kita pelajari di SLTA. Untuk itu tentunya kita masih ingat bahwa secara sederhana dapat memanfaatkan kenyataan tentang semua penyelesaian bilangan bulat (jika himpunan penyelesaian $\neq 0$)dari persamaan polinom dengan koefisien-koefisien bilangan bulat.

$$a_n \lambda^n - a_{n-1} \lambda^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$$

- harus atau pasti merupakan pembagi dari suku konstanta a_0. Jadi, penyelesaian-penyelesaian bilangan bulat yang mungkin dari persamaan (2) adalah pembagi-pembagi dari 6, yaitu ± 1, ± 2, ± 3, dan ± 6. Selanjutnya substitusikan nilai-nilai ini berturut-turut pada persamaan (2) sehingga kita dapatkan akar-akarnya, dan tentunya memerlukan bantuan teorema sisa atau metode horner untuk persamaan pangkat tinggi. Dalam hal ini $\lambda = 1$ memenuhi persamaan (2), sebab $1^3 - 6 \cdot 1^2 + 11 \cdot 1 - 6 = 0$.
- Sebagai akibatnya $(\lambda - 1)$ haruslah merupakan factor dari ruas kiri persamaan (2). Dengan bantuan teorema sisa, yaitu membagi persamaan (2) oleh $(x - 1)$ kita dapatkan dua nilai λ lainnya, yaitu $\lambda_2 = 2$ dan $\lambda_3 = 3$, sehingga akar dari persamaan (2), yaitu $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, dan $\lambda_3 = 3$ adalah nilai-nilai eigen dari matriks A.
- Untuk menyelesaikan persamaan (2) dapat pula dilakukan dengan bantuan metode Horner, dengan langkah pertama sema seperti di atas yaitu sampai mendapatkan $\lambda_1 = 1$ dan langkah berikutnya sebagai berikut:

	1	-6	11	-6	(koefisien-koefisien persamaan (2)
$\lambda_1 =$		1	-5	6	+
	1	-5	6	0	

$(\lambda - 1)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = 0$

$(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, dan $\lambda_3 = 3$

adalah nilai-nilai eigen dari matriks A.

Contoh 11. 5 Carilah nilai-nilai eigen dari matriks T = $\begin{bmatrix} -2 & -7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

Penyelesaian:

Seperti kedua contoh di atas, maka persamaan karakteristik dari matrik T adalah

det (A - λ I) = det $\begin{bmatrix} -2-\lambda & -7 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$ = 0

$\Leftrightarrow$ (-2 – λ)(2 – λ) – (1)(-7) = 0

$\Leftrightarrow \lambda^2 + 3 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda = \pm \sqrt{-3} = \pm\, i \sqrt{3}$.

$\lambda_1 = \sqrt{3}\, i \quad \text{dan} \lambda_2 = -\sqrt{3}\, i$

(nilai-nilai eigennya adalah bilangan imajiner).

Karena nilai-nilai eigen dari matriks T adalah bilangan imajiner, sedangkan menurut definisi λ adalah skalar atau bilangan real. Maka matriks T tidak mempunyai nilai eigen.

Catatan:

Dari contoh 11. 5 kita mendapatkan nilai-nilai eigen kompleks dari matriks yang real. Hal ini akan membawa kita untuk meninjau kemungkinan ruang-ruang vektor kompleks, yaitu ruang-ruang vektor dengan skalar-skalarnya nilai kompleks. Diskusi kita untuk ruang-ruang vektor kompleks dengan nilai-nilai eigen kompleks akan dijumpai dalam kesempatan lain. Dalam kesempatan sekarang akan dibatasi pada contoh-contoh dengan nilai eigen yang real.

Sekarang kita perhatikan teorema berikut yang merupakan ikhtisar dari hasil-hasil yang telah diperoleh melalui diskusi materi pembelajaran di atas.

Teorema 11. 1. Jika A adalah suatu matriks n $\times$ n dan λ adalah suatu bilangan real, maka pernyataan-pernyataan berikut ini adalah ekuivalen

(a) λ adalah nilai-nilai eigen dari matriks A.

(b) Sistem persamaan (λ I – A)**x** = 0 mempunyai penyelesaian tak trivial (non trivial).

(c) Ada vektor x yang tidak nol dalam R^n sedemikian sehingga $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$.

(d) λ adalah suatu penyelesaian real dari persamaan karakteristik det $(\lambda I - A) = 0$

Bukti:

Kita akan memperlihatkan bahwa (a), (b), (c), dan (d) ekuivalen satu sama lainnya dengan membuktikan urutan implikasi (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (d) $\Rightarrow$ (a).

(a) $\Rightarrow$ (b). Karena λ adalah nilai-nilai eigen dari matriks A, maka menurut definisi nilai eigen berlaku: $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ dengan x tak nol.

$\Leftrightarrow \lambda I \mathbf{x} - A\mathbf{x} = 0$

$\Leftrightarrow (\lambda I - A)\mathbf{x} = 0$

Karena x tak nol maka sistem persamaan linear homogen $(\lambda I - A)\mathbf{x} = 0$ Harus mempunyai penyelesaian non-trivial.

(b) $\Rightarrow$ (c). Karena $(\lambda I - A)\mathbf{x} = 0$ maka

$\Leftrightarrow A\mathbf{x} = \lambda I \mathbf{x}$

$\Leftrightarrow A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$

(c) $\Rightarrow$ (d). Karena $A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$

$\Leftrightarrow A\mathbf{x} = \lambda I \mathbf{x}$

$\Leftrightarrow (\lambda I - A) \mathbf{x} = 0$

Karena ada **x** tidak nol, maka sistem persamaan linear homogen $(\lambda I - A) \mathbf{x} = 0$ haruslah det $(\lambda I - A) = 0$ dengan λ adalah suatu penyelesaian realnya.

(d) $\Rightarrow$ (a). Karena λ adalah penyelesaian real dari persamaan det $(\lambda I - A) = 0$, maka λ adalah penyelesaian dari persamaan karakteristik det $(\lambda I - A) = 0$ atau dengan kata lain λ adalah nilai eigen dari matriks A.

C. Ruang Eigen

Setelah kita memahami bagaimana mencari nilai-nilai eigen hubungannya dengan persamaan karakteristik, maka sekarang akan beralih ke masalah untuk mencari vektor eigen. Menurut definisi terdahulu bahwa vektor eigen dari matriks A yang bersesuaian dengan nilai eigen λ adalah vektor x yang tidak nol dan haruslah memenuhi $A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$. Dengan kata lain, secara ekuivalen tentunya vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen λ adalah vektor yang tak nol dalam ruang penyelesaian (λ I – A) **x** = 0. Ruang penyelesaian ini kit anamakan sebagau **ruang eigen** (*eigen space*) dari matriks A yang bersesuaian dengan nilai eigen λ. Apakah ruang eigen ini membentuk basis?.

Definisi 11. 3. Ruang penyelesaian dari sistem persamaan linear (λ I – A) **x** = 0 atau (A - λ I) **x** = 0 dinamakan **ruang eigen** dari matriks A yang berukuran n $\times$ n.

Sekarang kita perhatikan beberapa contoh, bahwa vektor-vektor eigen suatu matriks akan membentuk suatu basis untuk ruang eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen dari matriks tersebut.

Contoh 11. 6.

Diketahui matriks seperti dalam contoh 11. 4, yaitu

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Carilah basis untuk ruang eigen dari matriks A.

Penyelesaian:

Telah diselesaiakn dalam Contoh 11. 4 di atas, bahwa dari persamaan karakteristik

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$$

didapat tiga buah nilai eigen matriks A, yaitu

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \text{dan } \lambda_3 = 3.$$

Sebagai konsekwensinya akan kita dapatkan tiga buah ruang eigen dari matriks A. Menurut definisi,

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

adalah vektor eigen dari matriks A yang bersesuaian dengan λ jika dan hanya jika **x** adalah suatu penyelesaian non trivial dari sistem persamaan linear homogen:

$(\lambda I - A)\,\mathbf{x} = 0$ atau $(A - \lambda I)\,\mathbf{x} = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4-\lambda & 0 & 1 \\ -2 & 1-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Untuk λ_1 = 1, maka (3) menjadi:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Leftrightarrow 3x_1 + x_3 = 0$

$-2x_1 = 0$

$-2x_1 = 0$

$\Leftrightarrow x_1 = 0$

$x_2 = t \in R$

$x_3 = 0$

Vektor-vektor eigen A yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = 1$ adalah vektor tak nol yang berbentuk

$$X = \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} t\,.$$

Jadi, vektor $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ merupakan suatu basis untuk ruang eigen dari matriks A yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = 1$.

Untuk λ_2 = 2, maka (3) menjadi

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$4x_1 + x_3 = 0$

$-2x_1 - x_2 = 0$

$-2x_1 - x_3 = 0$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ -2 & -1 & 0 & \vdots & 0 \\ -2 & 0 & -1 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} b_2 + b_1 \\ b_3 + b_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

$\Leftrightarrow 2x_1 \qquad + x_3 = 0$

$\qquad -x_2 \quad + x_3 = 0$

$\Leftrightarrow x_1 = -\frac{1}{2} x_3$

$\quad x_2 = x_3$

$\Leftrightarrow x_1 = -\frac{1}{2} t$, $x_2 = t$, $x_3 = t \in R$

Jadi, vektor-vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_2 = 2$ adalah vektor-vektor tak nol yang berbentuk

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}t \\ t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

sehingga

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

adalah basis untuk ruang eigen matriks A yang bersesuaian dengan $\lambda_2 = 2$.

Untuk $\lambda_3 = 3$, maka (3) menjadi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\quad x_1 \quad + x_3 = 0$

$\Leftrightarrow -2x_1 - 2x_2 \quad = 0$

$\quad -2x_1 - 2x_3 \quad = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ -2 & -2 & 0 & \vdots & 0 \\ -2 & 0 & -2 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2b_1 + b_2 \\ 2b_1 + b_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & -2 & 2 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{2}b_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

$\Leftrightarrow x_1 \quad + x_3 = 0$

$-x_2 \quad - x_3 = 0$

$\Leftrightarrow x_1 = - x_3 = -t$

$x_2 = x_3 = t$

$x_3 = t \in R$

Vektor eigen untuk $\lambda_3 = 3$ adalah

$$x = \begin{bmatrix} -t \\ t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} t$$

Jadi vektor

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

adalah basis untuk ruang eigen matriks A yang bersesuaian dengan $\lambda_3 = 3$.

D. Nilai Eigen, Vektor Eigen dan Transformasi Linear

Sekarang kita akan mendiskusikan materi pengayaan tentang nilai eigen dan vektor eigen. Dalam hal ini kita akan melihat bagaimana hubungan antara nilai eigen dan transformasi linear.

Definisi 11. 4. Skalar k dinamakan **nilai eigen** dari transformasi linear T: V → V jika ada vektor x yang tidak nol dalam V sehingga T**x** = λ**x**. Vektor x dinamakan **vektor eigen T** yang bersesuaian dengan λ. Secaa ekuivalen, maka vektor eigen T yang bersesuaian dengan nilai eigen λ adalah vektor tak nol dalam ruang eigen T.

Dari definisi ini dapat diperlihatkan, bahwa jika V adalah ruang vektor yang berdimensi berhingga dan λ adalah nilai eigen dari matriks T untuk transformasi linear T: V → V terhadap sebarang basis B, maka

$$T(\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{x})$$
$$[T(\mathbf{x})]_B = [\lambda(\mathbf{x})]_B$$
$$A[\mathbf{x}]_B = \lambda[\mathbf{x}]_B$$

Hal ini berarti:

1. Nilai eigen λ dari T adalah nilai eigen matriks A
2. Vektor x adalah vektor eigen T yang bersesuaian dengan λ jika dan hanya jika matriks koordinat-koordinatnya $[x]_B$ adalah vektor eigen A yang bersesuaian dengan λ.

Untuk lebih memahami penjelasan definisi di atas, kita perhatikan contoh berikut ini.

Contoh 11. 7

Misalkan T: $P_2 \rightarrow P_2$ yang didefinisikan (dirumuskan) oleh

$$T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (4a_0 + a_2) + (-2a_0 + a_1)x + (-2a_0 + a_2)x^2.$$

Carilah: a) nilai-nilai eigen T

b) basis-basis untuk ruang eigen T.

Penyelesaian:

Basis standar (basis baku) untuk P_2 adalah B = {1, x, x^2},

$T(1) = 4 – 2x – 2x^2 = 4 – 2x – 2x^2$

$T(x) = 0 + x + 0x^2 = \quad x$

$T(x^2) = 1 + 0x + 1x^2 = 1 \quad + x^2$

$$[T(1)]_B = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}, [T(1x)]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ dan } [T(x^2)]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Jadi matriks T terhadap basis B standar B = {1, x, x^2} adalah

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nilai eigen dari T adalah nilai eigen dari matriks A, yaitu $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, dan $\lambda_3 = 3$ (Contoh 11. 4). Juga telah didapatkan dari Contoh 11. 6 di atas bahwa ruang eigen A yang bersesuaian dengan $\lambda = 1$ mempunyai basis $\{u_1\}$, ruang eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_2 = 2$ mempunyai basis $\{u_2\}$, dan ruang eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_3 = 3$ mempunyai basis $\{u_3\}$ dengan

$$u_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{dan } u_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Matriks-matriks ini adalah matriks-matriks koordinat terhadap basis standar B yang berbentuk

$$p_1 = x,\ p_2 = \frac{1}{2} + x + x^2 \text{ dan } p_3 = -1 + x + x^2$$

Jadi, basis-basis untuk ruang eigen T yang bersesuaian dengan

$\lambda_1 = 1$ adalah $\{x\}$, yang bersesuaian dengan

$\lambda_2 = 2$ adalah $\{\frac{1}{2} + x + x^2\}$, dan yang bersesuaian dengan

$\lambda_3 = 3$ adalah $\{-1 + x + x^2\}$.

Selanjutnya untuk memantapkan pemahaman Anda tentang materi pembelajaran **Kegiatan Belajar 1** di atas, cobalah kerjakan soal-soal **Latihan 1** berikut ini.

Latihan 1

1. Carilah persamaan karakteristik dari matriks A = $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$.

2. Carilah nilai-nilai eigen matriks A dari soal nomor satu di atas.

3. Carilah basis-basis untuk ruang eigen dari matriks A pada soalnomor satu di atas.
4. Diketahui $T : P_1 \rightarrow P_1$ yang didefinisikan atau dirumuskan oleh:

$$T(a_0 + a_1x) = (2a_0 - a_1) + (-2a_0 + 3a_1)x.$$

Tentukanlah nilai-nilai eigen T.

5. Tentukan basis untuk ruang eigen T dari soal nomor empat di atas.

Setelah Anda mencoba mengerjakan soal-soal **Latihan 1** di atas, bandingkanlah jawabannya dengan petunjuk jawaban berikut.

Petunjuk Jawaban Latihan 1

1. $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$.

   Karena $(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 8 & -1-\lambda \end{bmatrix}$, maka polinom karakteristik dari A adalah:

$$\text{Det } (A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 8 & -1-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 3.$$

   Jadi, persamaan karakteristik dari A adalah $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$.

2 Persamaan karakteristik matriks A dari soal nomor 1, adalah:

   $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0.$

   $\Leftrightarrow (\lambda + 1)(\lambda - 3) = 0$

   $\Leftrightarrow \lambda_1 = -1$ atau $\lambda_2 = 3$.

   Jadi, nilai-nilai eigen dari matriks A adalah

$$\lambda_1 = -1 \text{ atau } \lambda_2 = 3.$$

3. Pandang sistem persamaan linear homogen

   $(A - \lambda I)x = 0$ dengan $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

   $\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 8 & -1-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Jika λ = -1 (dari jawaban soal nomor 2), maka sistem persamannya menjadi

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Leftrightarrow 4x_1 = 0$

$8x_2 = 0$

$\Leftrightarrow x_1 = 0$

$x_2 = t \in R$

Vektor eigen dari matriks A adalah vektor tak nol x, yaitu:

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} t$$

Jadi $\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ adalah basis untuk ruang eigen matriks A yang bersesuian dengan $\lambda = -1$.

Jika λ = 3, maka sistem persamaannya menjadi:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 8 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Leftrightarrow 8x_1 - 4x_2 = 0$

$\Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{2}x_2$ atau $x_2 = 2x_1$

$\Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{2}t$, $x_2 = t \in R$ atau $x_2 = 2t$, $x_1 = t \in R$.

Vektor eigen dari matriks A adalah vektor x, yaitu:

$$x = = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & t \\ 1 & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} t$$

atau

$$x = \begin{bmatrix} 2t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} t$$

Jadi $\left\{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ atau $\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ adalah basis untuk ruang eigen matriks A yang bersesuian dengan $\lambda = 3$.

4. $T : P_1 \to P_1$ dengan rumus:

   $T(a_0 + a_1x) = (2a_0 - a_1) + (-2a_0 + 3a_1)x$..

   Basis standar P_1 adalah $B = \{1, x\}$, maka

   $T(1) = 2 - 2x$

   $T(x) = -1 + 3x$

   $[\ T(1)\ ]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ dan $[\ T(x_2)\ ] = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

   Jadi, matriks T terhadap basis B adalah:

   $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

   Persamaan karakteristik matriks A adalah

   $\text{Det}\,(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -2 & 3-\lambda \end{bmatrix} = 0$

   $\Leftrightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$

   $\Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 4) = 0$

   Jadi, nilai-nilai eigen dari T adalah nilai eigen dari A, yaitu $\lambda = 1$ dan $\lambda = 4$.

5. Misal $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ adalah vektor eigen dari A dan x adalah penyelesaian dari sistem persamaan linear

   $(A - \lambda I)\ x = 0$ atau $(A - \lambda I)x = 0$

   $\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -2 & 3-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

   Untuk $\lambda = 1$, sistem persamaan menjadi:

   $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow\ \ x_1 - \ \ x_2 = 0$

$\quad 2x_1 + 2x_2 = 0$

$\Leftrightarrow x_1 = x_2$

$\Leftrightarrow x_1 = t$

$\quad x_2 = t \in R.$

Akibatnya vektor eigen A yang bersesuaian dengan $\lambda = 1$ adalah

$$x = = \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} t$$

sehingga $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ adalah basis untuk ruang eigen A yang bersesuian dengan $\lambda = 1$.

Untuk λ = 4, sistem persamaan linearnya menjadi:

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Leftrightarrow\ \ 2x_1 - \ \ x_2 = 0$

$\quad -2x_1 + x_2 = 0$

$\Leftrightarrow x_1 = -\frac{1}{2}x_2$ atau $x_2 = -2x_1$

$\Leftrightarrow x_1 = -\frac{1}{2}t$, $x_2 = t \in R$. atau $x_1 = t \in R$, $x_2 = -2t$.

Akibatnya vektor eigen A yang bersesuaian dengan $\lambda = 4$ adalah

$$x = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} t \quad \text{atau} \quad x = \begin{bmatrix} 1t \\ -2t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} t$$

Jadi, basis untuk ruang eigen T yang bersesuian dengan $\lambda = 1$ adalah $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$, dan bais untuk ruang eigen T yang bersesuaian dengan $\lambda = 4$ adalah $\left\{\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ atau $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}\right\}$.

Selanjutnya buatlah rangkuman materi bahasan **Kegiatan Belajar 1**, kemudian bandingkanlah dengan alternative rangkuman berikut.

Rangkuman

1. Jika A matriks m $\times$ n, maka vektor x yang tidak nol di R^n disebut **vektor eigen** (*eigen vector*) dari A jika **Ax** adalah kelipatan skalar dari **x**, yaitu **Ax** = λ **x** untuk suatu skalar λ. Skalar λ dinamakan **nilai eigen** (*eigen value*) dari A.

2. Persamaan det (λ I – A) = 0 dengan λ sebagai variabel disebut **persamaan karakteristik** dari matriks A. Akar-akar atau skalar-skalar yang memenuhi persamaan ini adalah nilai-nilai eigen (nilai-nilai karakteristik) dari matriks A. Det(λ I – A) $\equiv$ f(λ) yaitu berupa polinom dalam λ yang dinamakan **polinom karakteristik**.

3. Jika A adalah suatu matriks n $\times$ n dan λ adalah suatu bilangan real, maka pernyataan-pernyataan berikut ini adalah ekuivalen
   (a) λ adalah nilai-nilai eigen dari matriks A.
   (b) Sistem persamaan (λ I – A)**x** = 0 mempunyai penyelesaian tak trivial (non trivial).
   (c) Ada vektor x yang tidak nol dalam R^n sedemikian sehingga A**x** = λ**x**.
   (d) λ adalah suatu penyelesaian real dari persamaan karakteristik det (λ I – A) = 0

4. Ruang penyelesaian dari sistem persamaan linear (λ I – A) x = 0 atau (A - λ I) **x** = 0 dinamakan ruang eigen dari matriks A yang berukuran n $\times$ n.

5. Skalar k dinamakan **nilai eigen** dari transformasi linear T: V $\rightarrow$ V jika ada vektor x yang tidak nol dalam V sehingga T**x** = λ**x**. Vektor x dinamakan **vektor eigen T** yang bersesuaian dengan λ. Secaa ekuivalen, maka vektor eigen T yang bersesuaian dengan nilai eigen λ adalah vektor tak nol dalam ruang eigen T.

Untuk mengetahui tingkat pemahaman Anda tentang bahasan Kegiatan Belajar 1, cobalah kerjakan dengan sebaik-baiknyasoal-soal berikut sebagai evaluasi formatifnya.

Tes Formatif 1

Petunjuk:

Pilihlah salah satu jawaban yang paling tepat dari beberapa alternatif jawaban yang diberikan.

1. Persamaan karakteristik dari matriks A = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ adalah

   A. $\lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0$

   B. $\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$

   C. $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$

   D. $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$

2. Nilai eigen dari matriks A = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ adalah λ =

   A. 1

   B. 2

   C. -1

   D. -2

3. Basis untuk ruang eigen dari matriks A = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ adalah

   A. $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

   B. $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

   C. $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

   D. $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

4. Salah satu vektor eigen dari matriks A = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ adalah x =

A. $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

D. $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

5. Vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen λ terbesar dari matriks

A = $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ adalah **x** =

A. $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

D. $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

6. Nilai-nilai eigen dari matriks

A = $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

A. $\lambda = 1$ dan $\lambda = 5$

B. $\lambda = 1$ dan $\lambda = -5$

C. $\lambda = -1$ dan $\lambda = -5$

D. $\lambda = -1$ dan $\lambda = 5$

7. Vektor-vektor eigen dari matriks

$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ yang bersesuaian dengan nilai eigen λ terbesar adalah

A. $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

D. $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

8. Nilai-nilai eigen dari T dengan transformasi linear $T : P_2 \rightarrow P_2$ yang didefinisikan oleh $T(a + bx + cx^2) = (3a – 2b) + (-2a + 3b)x + (5c)x^2$

A. $\lambda = 1$ dan $\lambda = -5$

B. $\lambda = -1$ dan $\lambda = -5$

C. $\lambda = -1$ dan $\lambda = 5$

D. $\lambda = 1$ dan $\lambda = 5$

9. Vektor-vektor eigen yang merupakan basis untuk ruang eigen T yang bersesuaian dengan nilai eigen terbesar dari transformasi linear $T : P_2 \rightarrow P_2$ yang dirumuskan oleh $T(a + bx + cx^2) = (3a – b) + (-2a + 3b)x + (5c)x^2$ adalah

A. $-1 – x$ dan $-x^2$

B. $-1 – x$ dan x^2

C. $1 – x$ dan x^2

D. $1 – x$ dan $–x^2$

10. Nilai-nilai eigen dan T dengan transformasi linear $T : M_{22} \rightarrow M_{22}$ yang didefinisikan oleh

$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2c & a+c \\ b-2c & d \end{bmatrix}$ adalah

A. $\lambda = 1$, $\lambda = -1$ dan $\lambda = 2$

B. $\lambda = 1$, $\lambda = -1$ dan $\lambda = -2$

C. $\lambda = 1$, $\lambda = -2$ dan $\lambda = 2$

D. $\lambda = -1$, $\lambda = -2$ dan $\lambda = 2$

Balikan dan Tindak Lanjut

Sebagai umpan balik dan tindak lanjutnya, cocokanlah jawaban Anda dengan **Kunci Jawaban Tes Formatif 1** yang ada di bagian akhir modul ini. Hitunglah jumlah jawaban Anda yang benar. Kemudian gunakan rumus di bawah ini untuk engetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 1.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{jumlah jawaban Anda yang benar}}{10} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan yang Anda capai :

90% - 100% = Baik sekali

80% - 89% = Baik

70% - 79% = Cukup

< 70% = Kurang.

Kalau Anda mencapai tingkat penguasaan 80% ke atas, Anda dapat meneruskannya pada Kegiatan Belajar kedua. **Bagus !** Tetapi bila tingkat penguasaan Anda masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum Anda kuasai. Selamat belajar, semoga berhasil.

KEGIATAN BELAJAR 2

DIAGONALISASI MATRIKS

A. Diagonalisasi

Pada bahasan pembelajaran berikut kita akan mendiskusikan masalah mencari suatu baris untuk R^n yang terdiri dari vektor-vektor eigen dari suatu matriks A yang diketahui berukuran $n \times n$. Basis-basis ini dapat dipakai untuk menelaah sifat-sifat geometris dari matriks A dan sekaligus dipakai untuk menyederhanakan berbagai perhitungan numerik yang melibatkan matriks A. Basis-basis sangat penting dalam berbagai penerapan aljabar linear, dan beberapa diantaranya akan kita diskusikan dalam bahasan pembelajaran modul berikutnya.

Seperti telah kita ketahui dalam bahasan modl-modul sebelumnya tentang matriks, bahwa salah satu teoremanya adalah pengkombinasian banyak persamaan menjadi satu. Cara penulisan sistem persamaan linear yang terdiri dari m persamaan dengan n variabel menjadi sebuah persamaan matriks telah kita pelajari dalam Modul 2 (Sistem Persamaan Linear). Sedangkan cara menyelesaikan sistem persamaan linear $AX = \mathbf{b}$ dengan A matriks berukuran $n \times n$ yang invertibel dapat dilakukan dengan bantuan matriks A^{-1}, sehingga terjadi pengkombinasian $A^{-1}AX = A^{-1}\mathbf{b}$ atau $X = A^{-1}\mathbf{b}$.

Berdasarkan ide yang sama seperti di atas, maka dalam bagian ini kita akan mengkombinasikan persamaan nilai eigen untuk beberapa vektor eigen yang berlainan ke dalam persamaan matriks yang tunggal. Untuk lebih jelasnya kita perhatikan penjelasan berikut ini.

Pandang matriks A berukuran $n \times n$ dengan vektor-vektor eigen (yang bebas linear) $u_1, u_2, \dots, u_k$ yang bersesuaian dengan nilai-nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$. Sebagai akibatnya maka

$$Au_1 = \lambda_1 u_1,\ Au_2 = \lambda_2 u_2,\ \dots,\ Au_k = \lambda_k u_k$$

atau

$$Au_r = \lambda_r u_r \text{ dengan } r = 1, 2, \dots, k. \quad \dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

Vektor-vektor u_i dapat dikelompokkan menjadi bentuk matriks $n \times k$, yang ditulis sebagai matriks partisi

$$P = (u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_k)$$

Dengan u_i adalah kolom ke-i dari P. Selanjutnya persamaan (1) dapat ditulis menjadi bentuk:

$$AP = (Au_1 \quad Au_2 \quad \dots \quad Au_k)$$
$$= (u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_k)\, D$$

dengan D adalah matriks diagonal $k \times k$ dengan unsur-unsurnya $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$. Jadi kita dapatkan

$$AP = PD \text{ atau } PD = AP \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (2)$$

Bentuk ini merupakan bentuk yang ringkas dari persamaan nilai eigen untuk k vektor eigen.

Sekarang misalkan matriks A yang berukuran $n \times n$ mempunyai n vektor eigen, sehingga $k = n$. Akibatnya matriks P menjadi berukuran $n \times n$, dengan kolom-kolomnya vektor-vektor eigen (yang bebas linear), dan P tentunya invertibel. Selanjutnya dengan mengalikan persamaan (2) oleh P^{-1} dari sebelah kiri kita dapatkan:

$$D = P^{-1}A\,P \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (3)$$

Dengan demikian jika suatu matriks A yang berukuran $n \times n$ mempunyai n vektor eigen yang bebas linear, maka terdapat matriks P yang inverstibel dan matriks diagonal D sehingga D dapat difaktorkan dalam bentuk persamaan (3). Keadaan ini dinamakan A dapat **didiagonalkan** (*diagonalizable*).

Definisi 11. 5. Suatu matriks persegi (matriks bujursangkar) A dinamakan **dapat didiaginalkan** (dapat didiagonalisasi) jika ada suatu matriks P yang invertibel sedemikian rupa sehingga P^{-1} A P adalah suatu matriks diagonal, matriks P dikatakan **mendiagonalkan A** (**mendiagonalisasi**) matriks A.

Dari penjelasan dan definisi di atas, jelaskah bahwa masalah diagonalisasi dari suatu vektor A yang berukuran $n \times n$ adalah ekuivalen dengan pertanyaan: ”Apakah ada matriks P yang invertibel sehingga P^{-1} A P adalah matriks diagonal D?”. Prosedur berikut menunjukkan bahwa masalah vektor-vektor igen dan asalahan diaginalisasi adalah setara. Dengan kata lain prosedur berikut adalah tahapan untuk mendiagonalkan matriks yang berukuran $n \times n$.

Tahap 1. Carilah n vektor eigen yang bebas linear dari matriks A yang berukuran $n \times n$. Misalnya $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Tahap 2. Bentuklah matriks P yang mempunyai $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sebagai vektor-vektor kolomnya.

Tahap 3. Matriks $D = P^{-1} A P$ adalah matriks diagonal dengan $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sebagai unsur-unsur diagonal yang berurutannya dan λ_i adalah nilai-nilai eigen yang bersesuaian dengan p_i untuk I = 1, 2, 3, …, n.

Contoh 11. 8

Diketahui matriks A = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$.

Carilah: a) matriks P yang mendiagonalisasi A.

b) matriks diagonal $D = P^{-1} A P$.

Penyelesaian:

a) Persamaan karakteristik matriks A

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

$$\Leftrightarrow \det \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 0 \\ -6 & \lambda + 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0$$

$\lambda_1 = 1$ dan $\lambda_2 = -1$ (nilai-nilai eigen A)

Untuk $\lambda_1 = 1$, sistem persamaan linear homogennya

$(\lambda I - A)x = O$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Leftrightarrow -6x_1 + 2x_2 = 0$

$\Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{3} x_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & = \frac{1}{3}t \\ x_2 = t \in R \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}t \\ 1t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix} t\,.$$

Jadi, basis untuk ruang eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = 1$ adalah $p_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$.

Untuk $\lambda_2 = -1$, sistem persamaan linear homogennya:

$$(\lambda\, I - A\,)x = O$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 & = 0 \\ -6x_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & = 0 \\ x_2 = t \in R \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} t\,.$$

Jadi, basis untuk ruang eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = -1$ adalah $p_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Dengan demikian kita dapatkan bahwa (p_1, p_2) adalah bebas linear, sehingga

$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ akan mendiagonalkan matriks A.

b) Mencari matriks diagonal sekaligus sebagai pemeriksaan bahwa $D = P^{-1}A\,P$.

$$D = P^{-1}AP = 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Catatan: Dalam contoh ini tidak ada urutan yang diistimewakan untuk kolom-kolom P. Karena unsur-unsur diagonal ke-i dan $D = P^{-1}A\ P$ adalah nilai-nilai eigen untuk vektor kolom dari matriks P, maka dengan mengubah urutan kolom-kolom matriks P hanyalah mengubah urutan nilai-nilai eigen pada diagonal untuk $D = P^{-1}AP$. Jadi seandainya matriks Pnya ditulis seperti berikut:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Maka kita akan memperoleh matriks diagonal $D = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Contoh 11. 9

Carilah matriks P yang mendiagonalkan matriks a = $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Penyelesaian:

Dari contoh 11. 4, nilai-nilai eigen matriks A adalah $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ dan $\lambda_3 = 3$.

Kemudian dari contoh 11. 6 telah diperoleh vektor-vektor bebas linear:

$$p_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ p_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \text{dan } p_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

berturut-turut bersesuaian dengan nilai-nilai eigen $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ dan $\lambda_3 = 3$ dari matriks A. Jadi, matriks yang mendiagonalisasi matriks A adalah

$$P = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Untuk memeriksa bahwa P adalah matriks yang mendiagonalisasi matriks A dapat dilakukan dengan menentukan matriks diagonal D = P^{-1}A P dengan unsur-unsur diagonal utamanya adalah nilai-nilai eigen dari matriks A yang urutannya adalah nilai-nilai eigen dari matriks A yang urutannya sesuai urutan vektor-vektor kolom matriks P, yaitu:

$$D = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & - \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 4 \\ -6 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Catatan: Mencari P^{-1} dari P (lihat Modul 3 Kegiatan Belajar 2, Invers Matriks).

Contoh 11. 10

Perlihatkan bahwa matriks A = $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ tidak dapat didiagonalisasi .

Bukti:

Persamaan karakteristik matriks A adalah det (A – λI) = 0.

$$\det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow (2 - \lambda)(2 - \lambda) = 2$

$\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$ (nilai-nilai eigen matriks A)

Untuk $\lambda = 2$, sistem persamaan linear homogennya:

$(A - \lambda I)\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Leftrightarrow x_1 = 0$, $x_2 = t \in R$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} t$$

Basis untuk ruang eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 2$ adalah vektor yang bebas linear, yaitu

$$p = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Karena basis ruang eigen berdimensi satu suatu matriks A tidak mempunyai dua vektor eigen yang bebas linear, sehingga A tidak dapat didiagonalisasi.

Perlu diketahui, bahwa dari ketiga contoh terakhir di atas tadi (contoh 11. 8, 11. 9, dan 11. 10) kita beranggapan bahwa vektor-vektor kolom dari matriks P yang disusun dari vektor-vektor basis dari berbagai ruang eigen dari matriks A adalah bebas linear. Teorema berikut akan membahas asumsi tersebut.

Teorema 11. 2. Jika $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_k$ adalah vektor-vektor eigen dari matriks A yang bersesuaian dengan nilai-nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_k$ yang berbeda, maka $\{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_k\}$ adalah himpunan yang bebas linear.

Bukti:

Misalkan $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_k$ adalah vektor eigen dari A yang bersesuaian dengan nilai-nilai eigen yang berbeda $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_k$. Untuk mendapatkan kontradiksinya, kita mengasumsikan vektor-vektor $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_k$ tak bebas linear, sehingga dapat disimpulkan bahwa $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_k$ bebas linear.

Karena berdasarkan definisi, suatu vektor eigen tentunya tidak nol, maka $\{v_1\}$ bebas linear. Misalkan r adalah bilangan bulat terbesar sehingga $\{v_1, v_2, v_3, \ldots,$

v_k}bebas linear. Karena kita mengasumsikan bahwa $\{v_1, v_2, v_3, \ldots , v_k\}$ tak bebas linear, maka r memenuhi $1 \leq r < k$. Lebih jauh berdasarkan definisi r, maka $\{v_1, v_2, v_3, \ldots , v_k\}$ tak bebas linear. Jadi, terdapat skalar-skalar $c_1, c_2, \ldots, c_{r+1}$ yang tidak semuanya nol, sehingga

$$c_1v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_{r+1}v_{r+1} = \mathbf{0} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Dengan mengalikan kedua ruas persamaan (1) oleh A dan dengan menggunakan

$$Av_1 = \lambda_1 v_1,\ Av_2 = \lambda_2 v_2,\ \ldots ,\ Av_{r+1} = \lambda_{r+1} v_{r+1}$$

kita dapatkan:

$$c_1 \lambda_1 v_1 + c_2 \lambda_2 v_2 + \ldots + c_{r+1} \lambda_{r+} v_{r+1} = \mathbf{0} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Selanjutnya dengan mengalikan kedua ruas persamaan (1) dengan λ_{r+1} dan mengurangi persamaan (2) dengan persamaan yang didapatkan, maka kita akan mendapatkan

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_{r+1})v_1 + c_2(\lambda_2 - \lambda_{r+1})v_2 + \ldots + c_r(\lambda_r - \lambda_{r+1})v_r = \mathbf{0}$$

Karena $\{v_1, v_2, \ldots , v_r\}$ adalah himpunan yang bebas linear, maka persamaan ini mengimplikasikan bahwa:

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_{r+1})v_1 = c_2(\lambda_2 - \lambda_{r+1})v_2 = \ldots = c_r(\lambda_r - \lambda_{r+1})v_r = \mathbf{0}$$

dan karena $\lambda_1, \lambda_2, \ldots , \lambda_{r+1}$) masing-masing berbeda, maka kita dapatkan:

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_r = 0 \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Dengan mensubstitusikan nilai ini pada persamaan (1), maka akan didapatkan

$$c_{r+1}v_{r+1} = \mathbf{0}$$

Karena vektor eigen v_{r+1} tidak nol, maka

$$c_{r+1} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Persamaan (3) dan (4) kontradiksi dengan fakta bahwa $c_1, c_2, \ldots , c_{r+1}$ tidak semuanya nol.

Sebagai implikasi dari teorema 11. 2 ini, kita mendapatkan hasil penting berikut ini.

Teorema 11. 3. Jika suatu matriks A berukuran $n \times n$ mempunyai nilai-nilai eigen yang berbeda-beda, maka A dapat didiagonalisasi .

Bukti:

Jika $v_1, v_2, \ldots, v_n$ adalah vektor-vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai-nilai eigen yang berbeda $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, maka menurut teorema 11. 2 haruslah $v_1, v_2, \ldots, v_n$ bebas linear. Jadi, A dapat didiagonalisasi,

Contoh 11. 11

Kita perhatikan kembali matriks Q dan A dalam contoh 11. 4 dan 11. 6, yaitu:

$$Q = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

dengan nilai-nilai eigen yang berbeda, yaitu $\lambda_1 = 1$ dan $\lambda_2 = 2$, sehingga Q dapat diagonalisasi. Jadi

$$D = P^{-1}Q\,P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Untuk suatu matriks P yang invertibel. Demikian pula

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dengan nilai-nilai eigen yang berbeda, yaitu $\lambda_1 = 1$ dan $\lambda_2 = 2$, dan $\lambda_3 = 3$, maka A dapat diagonalisasi, dan matriks

$$D = P^{-1}A\,P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

dengan matriks P invertbel. Jika diinginkan matriks P ini dapat dicari dengan menggunakan metode seperti yang ditunjukkan dalam contoh-contoh diagonalisasi (contoh 11.8, 11.9, dan 11. 10).

B. Diagonalisasi Ortogonal

Sekarang kita akan mendiskusikan bagaimana mencari suatu basis ortonormal dengan hasil kali dalam Euclid yang terdiri dari vektor-vektor eigen dari suatu matriks A yang berukuran $n \times n$. Sedangkan untuk menunjang pembahasan materi ini adalah pemahaman tentang matriks-matriks simetris dan pengertian ortogonal yang telah kita pelajari dari modul sebelumnya.

Untuk lebih jelasnya kita perhatikan dua masalah berikut yang ekuivalen.

1. Masalah vektor eigen ortonormal

   Jika diketahui suatu matriks A yang berukuran $n \times n$, apakah ada suatu basis ortonormal untuk R^n dengan hasil kali dalam (Euclid) yang terdiri dari vektor-vektor eigen dari matriks A?

2. Masalah diagonalisasi ortogonal

   Jika diketahui suatu matriks A yang berukuran $n \times n$, apakah ada suatu matriks diagonal P sedemikian sehingga matriks $D = P^{-1} A P = P^t A P$ adalah matriks diagonal?

Sebagai akibat dari permasalahan ini mendorong kita untuk membuat definisi berikut.

Definisi 11. 6. Matriks A yang berukuran $n \times n$ dinamakan dapat **didiagonalisasi secara ortogonal** jika terdapat matriks P yang ortogonal, dan matriks P dikatakan **mendiagonalisasi A secara ortogonal**.

Dari definisi dan dua permasalahan di atas ada dua pelajaran yang perlu mendapat perhatian kita, yaitu

1. Matriks manakah yang dapat didiagonalisasi secara ortogonal?
2. Bagaimana kita mencari suatu matriks ortogonal untuk melakukan diagonalisasi?

Sehubungan dengan pertanyaan-pertanyaan di atas, maka tentunya tidak ada harapan lagi bagi kita untuk mendiagonalisasi suatu matriks A, kecuali jika matriks A adalah matriks simetris. (yaitu $A = A^t$). Untuk melihat mengapa hal tersebut demikian adanya, misalkan

$$P^t A P = D \quad \text{...} \quad (1)$$

Dengan P adalah matriks ortogonal dan D adalah matriks diagonal. Karena P ortogonal, maka

$$P^t P = P^t P = I$$

sehingga persamaan (1) bisa kita tulis dalam bentuk:

$$A = P\ D\ P^t \quad \text{..} \quad (2)$$

Karena D matriks diagonal, maka $D = D^t$, sehingga dengan mentranspos kedua ruas dari persamaan (2) didapatkan

$$A^t = (P\ D\ P^t)^t = (P^t)^t\ D^t\ P^t = P\ D\ P^t = A$$

sehingga A pastilah merupakan matriks simetris (lihat Modul 1 Kegiatan Belajar 2).

Sekarang kita perhatikan teorema berikut merupakan alat utama untuk menentukan apakah sebuah matriks dapat didiagonalisasi secara ortogonal. Teorema berikut juga menunjukkan bahwa setiap matriks simetris, pada kenyataannya dapat didiagonalisasi secara ortogonal. Perlu pula diketahui bahwa pada teorema ini dan teorema berikutnya dari bahasan ini, pengertian ortogonal akan berarti ortogonal berkenaan dengan hasil kali dalam Euclid. (*Euclidean inner product*) seperti telah dubahas dalam Modul 4 dan Modul 5.

Teorema 11. 4. Jika A adalah suatu matriks $n \times n$, maka pernyataan berikut adalah ekuivalen.

(a) A dapat didiagonalisasi secara ortogonal.

(b) A merupakan suatu himpunan n vector eigen yang ortonormal

(c) A adalah matriks simetrik.

Bukti:

(a) $\Rightarrow$ (b). Karena A dapat didiagonalisasi, maka terdapat matriks yang ortogonal, sedemikian hingga P^{-1} A P adalah matriks diagonal. Seperti telah diperlihatkan pada bahasan yang lalu bahwa n vektor kolom dari P adalah vektor-vekor eigen dari A. Karena P ortogonal, maka vektor-vektor kolom ini ortonormal (Teorema 2. 5 Modul 9 Kegiatan Belajar 2), sehingga A mempunyai n vektor eigen yang ortonormal.

(b) $\Rightarrow$ (a). Misalkan A mempunyai himpunan n vektor eigen yang ortonormal $\{p_1, p_2, ..., p_n\}$. Seperti telah diperlihatkan bahwa untuk P dengan vektor-vektor eigen ini sebagai kolom-kolomnya akan mendiagonalisasi A.

Karena vektor-vektor eigen ini ortonormal, maka P ortogonal sehingga akan mendiagonalisasi A secara ortogonal.

(a) $\Rightarrow$ (c). Pada pembuktian (a) $\Rightarrow$ (b) kita telah memperlihatkan bahwa suatu matriks A berukuran n $\times$ n dapat didiagonalisasi oleh matriks P yang berukuran n $\times$ n secara orthogonal yang kolom-kolomnya membentuk himpunan ortonormal dari vector-vektor eigen matriks A. Selanjutnya, misalkan O matriks diagonal, maka

$$D = P^{-1} A P$$

Jadi,

$$A = P D P^{-1}$$

atau karena P orthogonal, maka

$$A = P D P^{t}.$$

Dengan demikian,

$$A^{t} = (P D P^{t})^{t} = P D^{t} P^{t} = P D P^{t} = A$$

yang menunjukkan bahwa matriks A adalah matriks simetris.

(c) $\Rightarrow$ (a). Bukti bagian ini di luar ruang lingkup bahasan pembelajaran modul ini, dan pembuktiannya akan diabaikan.

Sekarang kita beralih ke masalah mencari prosedur untuk mendapatkan matriks P yang ortogonal untuk mendiagonalisasi matriks simetris. Namun sebelumnya kita perlu suatu teorema kritis yang berikut sebagai kunci yang berkaitan dengan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks-matriks simetris.

Teorema 11. 5. Jika A adalah suatu matriks simetris, maka vektor-vektor eigen dari ruang eigen yang berbeda akan ortogonal.

Bukti:

Misal λ_1 dan λ_2 adalah nilai-nilai eigen yang berbeda dari matriks simetris A yang berukuran n $\times$ n, dan misalkan x_1 dan x_2 adalah vektor-vektor eigen yang bersesuaian berturut-turut dengan λ_1 dan λ_2. Karena x_1 dan x_2 merupakan vektor-

vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen λ_1 dan λ_2, maka tentunya untuk matriks A berlaku:

$$A\ x_1 = \lambda_1\ x_1 \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

$$A\ x_2 = \lambda_2\ x_2 \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Dari persamaan (1)

$$(A\ x_1)^t = (\lambda_1\ x_1)^t$$

$$\Leftrightarrow x_1^t\ A^t = \lambda_1\ x_1^t$$

$$\Leftrightarrow x_1^t\ A = \lambda_1\ x_1^t \qquad \text{(karena A simetrik)}$$

$$\Leftrightarrow x_1^t\ A\ x_2 = \lambda_1\ x_1^t\ x_2 \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

(kedua ruas dikalikandengan x_2).

Selanjutnya kedua ruas persamaan (2) dikalikan dengan x_1^t dan dari sebelah kir sehingga kita dapatkan:

$$x_1^t\ A\ x_2 = \lambda_2\ x_1^t\ x_2 \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Dari persamaan (3) dan (4)

$$\lambda_1 x_1^t\ A\ x_2 = \lambda_2\ x_1^t\ x_2$$

$$\Leftrightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)\ (x_1^t\ x_2) = 0 \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Namun $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$, karena λ_1 dan λ_2 dianggap berbeda. Jadi dari persamaan (5) kita dapatkan bahwa: $x_1^t\ x_2 = 0$, atau $x_1 \cdot x_2 = 0$ atau x_1 ortogonal terhadap x_2 (terbukti).

Sebagai implikasi dari Teorema 11. 5 ini, maka kita dapatkan prosedur berikut untuk mendiagonalisasi suatu matriks simetris secara ortogonal.

Tahap 1. Carilah suatu basis untuk setiap ruang eigen dari matriks A.

Tahap 2.Terapkan proses Gran-Schmidt pada setiap basis-basis ini untuk mendapatkan suatu basis ortonormal untuk setiap ruang eigen.

Tahap 3. Bentuklah matriks P yang kolom-kolomnya adalah vektor-vektor basis yang disusun pada tahap 2, dan matriks inilah yang mendiagonalisasi A secara ortogonal.

Prosedur ini dan Teorema 11. 5 memastikan bahwa vektor eigen dari ruang eigen yang **berbeda** adalah ortogonal, sedangkan penerapan proses Gram-Schmidt memastikan bahwa vektor-vektor eigen yang didapatkan dalam ruang eigen yang

sama adalah ortonormal. Jadi keseluruhan himpunan vektor eigen yang didapat melalui prosedur ini adalah ortonormal.

Contoh 11. 12

Diketahui matriks A = $\begin{bmatrix} -7 & 24 \\ 24 & 7 \end{bmatrix}$.

a) Carilah matriks P yang mendiagonalisasi A secara ortogonal.

b) Tentukanlah matriks P^{-1} A P.

Penyelesaian:

a) Persamaan karakteristik matriks A adalah

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\Leftrightarrow \det \begin{bmatrix} -7-\lambda & 24 \\ 24 & 7-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 625 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \pm\ 25.$$

Jadi, nilai-nilai eigen dari matriks A adalah $\lambda_1 = 25$ dan $\lambda_2 = -25$.

Misal x = $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

Adalah vektor eigen A yang bersesuaian dengan λ jika dan hanya jika x adalah penyelesaian non trivial dari sistem persamaan linear:

$$(A - \lambda I) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -7-\lambda & 24 \\ 24 & 7-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{...} (1)$$

Untuk $\lambda_1 = 25$, maka persamaan (1) menjadi

$$\begin{bmatrix} -32 & 24 \\ 24 & -18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -32x_1 + 24x_2 = 0 \\ 24x_1 - 18x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 4x_1 - 3x_2 = 0$$

$\Leftrightarrow x_1 = \frac{3}{4}t \quad , \quad x_2 = t.$

Jadi vektor eigen A yang bersesuaian dengan $\lambda = 25$ adalah

$$x_1 = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ 1 \end{bmatrix}$$

membentuk basis untuk ruang tiga. Dengan menerapkan proses Gram-Schmidt akan menghasilkan vektor eigen ortonormal, yaitu

$$v_1 = \frac{x_1}{|\,x_1\,|} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix}, \text{ sebab } |\,x_1\,| = \frac{5}{4}.$$

Untuk λ_1 = -25, akan didapatkan vektor eigen yang merupakan basis untuk ruang eigen, yaitu

$$x_2 = \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{(silakan dicoba dicari).}$$

(Silakan dicoba dicari dengan cara yang sama seperti untuk λ_1), sehingga dengan proses Gram-Schmidt dapat diubah menjadi vektor eigen yang ortonormal, yaitu:

$$v_2 = \frac{x_2}{|\,x_2\,|} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix}, \text{ sebab } |\,x_2\,| = \frac{5}{3}.$$

Akhirnya dengan menggunakan v_1 dan v_2 sebagai vektor-vektor kolom, maka kita dapat matriks yang mendiagonalisasi A secara ortogonal, yaitu:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}.$$

b) Menentukan matriks $P^{-1} A P = 1 \cdot \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & 24 \\ 24 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 15 & 20 \\ 20 & -15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & -25 \end{bmatrix}$$

matriks ini adalah matriks diagonal dengan unsur-unsur diagonal utamanya adalah nilai-nilai eigen dari matriks A.

Selanjutnya untuk lebih memantapkan pemahaman Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 2 di atas, cobalah kerjakan soal-soal **Latihan 2** berikut.

Latihan 2

1. Selidiki, apakah matriks berikut dapat didiagonalisasi A = $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

2. Carilah matriks P yang mendiagonalisasi matriks A = $\begin{bmatrix} -14 & 12 \\ -20 & 17 \end{bmatrix}$.

3. Tentukanlah matriks diagonal P^{-1} A P dengan A adalah matriks pada soal latihan nomor dua di atas.

4. Diketahui matriks A = $\begin{bmatrix} -2 & 0 & -26 \\ 0 & -3 & 0 \\ -36 & 0 & -23 \end{bmatrix}$.

   Carilah matriks yang mendiagonalisasi A secara ortogonal.

5. Tentukanlah matriks untuk diagonal D = P^{-1} A P dengan P adalah matriks yang mendiagonalisasi matriks A secara ortogonal untuk A pada soal nomor empat di atas.

Setelah Anda mencoba mengerjakan soal-soal **Latihan 2** di atas, bandingkanlah jawabannya dengan petunjuk jawaban berikut.

Petunjuk jawaban Latihan 2

1. A = $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Persamaan karakteristik matriks A adalah:

det (A – λ I) x = 0

$$\Leftrightarrow \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow (3-\lambda)(2-\lambda) = 0$

$\lambda_1 = 3$ dan $\lambda_2 = 2$ adalah nilai-nilai eigen A.

Misal vektor eigen A yang bersesuaian dengan λ adalah **x** = $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, maka

x adalah penyelesaian non trivial dari sistem persamaan linear

(A – λ I) x = 0

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{...} \quad (1)$$

Untuk $\lambda_1 = 3$, maka persamaan (1) ini menjadi

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} t,\ t \in R.$$

Jadi, vektor yang membentuk sebuah baris untuk ruang eigen matriks A yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = 3$ adalah $p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Untuk $\lambda_2 = 2$, maka persamaan (1) ini menjadi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = t \end{cases}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t,\ t \in R.$$

Jadi, vektor yang membentuk basis untuk ruang eigen matriks A yang bersesuaian dengan $\lambda_2 = 2$ adalah $p_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Karena basis ruangnya berdimensi dua, maka A yang berukuran 3×3 tidak mempunyai tiga vektor eigen yang bebas linear, sehingga tidak dapat didiagonalisasi.

2. $A = \begin{bmatrix} -14 & 12 \\ -20 & 17 \end{bmatrix}$.

Persamaan karakteristiknya:

$\det (A - \lambda I) = 0$

$$\det \begin{bmatrix} -14-\lambda & 12 \\ -20 & 17-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0.$

Nilai-nilai eigennya adalah $\lambda_1 = 1$ dan $\lambda_2 = 2$

Untuk $\lambda_1 = 1$, sistem persamaan linearnya

$(A - \lambda I)\, x = 0$

$$\begin{bmatrix} -16 & 12 \\ -20 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow 4x_1 - 3x_2 = 0$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ 1 \end{bmatrix} t.$$

Basis untuk ruang eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = 1$ adalah

$$p_1 = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Analog untuk $\lambda_2 = 2$ akan didapatkan

$$p_2 = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(Silakan, dibuktikan).

Jadi, matriks yang mendiagonalisasi matriks A adalah:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{4} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Karena matriks yang mendiagonalisasi matriks A adalah matriks P pada soal nomor dua di atas, maka matriks diagonalnya

$D = P^{-1} A P$

$$= \begin{bmatrix} 20 & -15 \\ -20 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -14 & 12 \\ -20 & 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{4} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 20 & -15 \\ -20 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{4} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Matriks ini adalah matriks diagonal dari matriks A, sebab unsur-unsur diagonal utamanya berturut-turut adalah nilai-nilai eigen dari matriks A.

4. $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -36 \\ 0 & -3 & 0 \\ -36 & 0 & -23 \end{bmatrix}$.

Dari persamaan karakteristik matriks A, kita daptkan nilai-nilai eigen matriks A, yaitu: $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 25$, $\lambda_3 = -50$ (buktikan).

Vektor-vektor basis untuk ruang-ruang eigen matriks A yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 25$, $\lambda_3 = -50$ berturut-turut adalah

$$u_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ u_2 = \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ u_3 = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ (buktikan).}$$

Dengan menggunakan proses Gram-Schmidt terhadap $\{u_1\}$, $\{u_2\}$, dan $\{u_3\}$, akan menghasilkan vektor-vektor eigen matriks A yang ortonormal, yaitu:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ v_2 = \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} \\ 0 \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix},\ \text{dan } v_3 = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ 0 \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix} \quad \text{(buktikan).}$$

Akhirnya dengan menempatkan v_1, v_2, dan v_3 sebagai vektor-vektor kolom, maka kita dapatkan matriks P yang mendiagonalisasi matriks A secara ortogonal, yaitu

$$P = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

5. Karena matriks P ini mendiagonalisasi matriks A secara ortogonal, maka matriks diagonal D = P^{-1} A P

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & -36 \\ 0 & -3 & 0 \\ -36 & 0 & -23 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 \\ -20 & 0 & 15 \\ -30 & 0 & -50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & -50 \end{bmatrix}$$

Unsur-unsur diagonal utama dari matriks diagonal D = P^{-1} A P adalah nilai-nilai eigen matriks A (urutannya boleh saja berbeda-beda).

Selanjutnya, buatlah rangkuman dari Kegiatan Belajar 2 di atas, kemudian dengan alternatif rangkuman berikut.

Rangkuman

1. Suatu matriks persegi (matriks bujursangkar) A dinamakan **dapat didiaginalkan** (dapat didiagonalisasi) jika ada suatu matriks P yang invertibel sedemikian rupa sehingga P^{-1} A P adalah suatu matriks diagonal, matriks P dikatakan **mendiagonalkan A** (**mendiagonalisasi**) matriks A.

2. Tahapan untuk mendiagonalkan matriks yang berukuran n $\times$ n.

   Tahap 1. Carilah n vektor eigen yang bebas linear dari matriks A yang berukuran n $\times$ n. Misalnya p_1, p_2, ... , p_n.

   Tahap 2. Bentuklah matriks P yang mempunyai p_1, p_2, ... , p_n sebagai vektor-vektor kolomnya.

Tahap 3. Matriks $D = P^{-1} A P$ adalah matriks diagonal dengan $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ sebagai unsur-unsur diagonal yang berurutannya dan λ_i adalah nilai-nilai eigen yang bersesuaian dengan p_i untuk I = 1, 2, 3, …, n.

3. Untuk memeriksa bahwa P adalah matriks yang mendiagonalisasi matriks A dapat dilakukan dengan menentukan matriks diagonal $D = P^{-1}AP$ dengan unsur-unsur diagonal utamanya adalah nilai-nilai eigen dari matriks A yang urutannya adalah nilai-nilai eigen dari matriks A yang urutannya sesuai urutan vektor-vektor kolom matriks P

4. Jika $v_1, v_2, v_3, ..., v_k$ adalah vektor-vektor eigen dari matriks A yang bersesuaian dengan nilai-nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, ..., \lambda_k$ yang berbeda, maka $\{v_1, v_2, v_3, ..., v_k\}$ adalah himpunan yang bebas linear.

5. Jika suatu matriks A berukuran $n \times n$ mempunyai nilai-nilai eigen yang berbeda-beda, maka A dapat didiagonalisasi .

6. Matriks A yang berukuran $n \times n$ dikatakan dapat **didiagonalisasi secara ortogonal** jika terdapat matriks P yang ortogonal, dan matriks Pdikatakan **mendiagonalisasi A secara ortogonal**.

7. Jika A adalah suatu matriks $n \times n$, maka pernyataan berikut adalah ekuivalen.
   (a) A dapat didiagonalisasi secara ortogonal.
   (b) A merupakan suatu himpunan n vektor eigen yang ortonormal
   (c) A adalah matriks simetrik.

8. Jika A adalah suatu matriks simetris, maka vektor-vektor eigen dari ruang eigen yang berbeda akan ortogonal.

9. Prosedur untuk mendiagonalisasi suatu matriks simetris secara ortogonal.

Tahap 1. Carilah suatu basis untuk setiap ruang eigen dari matriks A.

Tahap 2. Terapkan proses Gran-Schmidt pada setiap basis-basis ini untuk mendapatkan suatu basis ortonormal untuk setiap ruang eigen.

Tahap 3. Bentuklah matriks P yang kolom-kolomnya adalah vektor-vektor basis yang disusun pada tahap 2, dan matriks inilah yang mendiagonalisasi A secara ortogonal.

Untuk mengetahui tingkat penguasan Anda, kerjakanlah soal-soal **Tes Formatif 2** berikut dengan memberi tanda silang (X) di muka pernyataan yang paling tepat.

Tes Formatif 2

1. Jika matriks A = $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ maka matriks A

   A. dapat didiagonalisasi.

   B. ruang eigennya berdimensi dua.

   C. tidak dapat didiagonalisasi.

   D. mempunyai dua vektor eigen bebas linear.

2. Matriks P yang mendiagonalisasi matriks A = $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ adalah

   A. $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

   C. $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

   B. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

   D. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

3. Matriks diagonal D = P^{-1} A P dari matriks A = $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ adalah

A. $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

D. $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

4. Kemungkinan lain dari bentuk P yang dapat mendiagonalkan matriks A pada soal nomor dua di atas adalah

A. $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

D. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

5. Jika memilih matriks yang mendiagonalisasi matriks A pada soal nomor dua di atas adalah matriks P = $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ mata matriks diagonal D = P^{-1} A P adalah

A. $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

D. $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

6. Jika T: $R^2 \rightarrow R^2$ adalah operator linear yang didefinisikan oleh

$T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1 + 4x_2 \\ 2x_1 + x_2 \end{bmatrix}$, maka sebuah basis untuk R^2 relatif terhadap matriks T diagonal adalah

A. $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

D. $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

7. Jika T: $P_1 \rightarrow P_1$ operator linear yang didefinisikan oleh

$T(a_0 + a_1x) = a_0 + (a_0 - a_1)\, x$

Maka matriks koordinat terhadap B yang bersesuaian dengan nilai eigen positif adalah

A. $\left\{\frac{1}{3}x + 1\right\}$

B. $\left\{\frac{1}{3} + x\right\}$

C. $\{x - 3\}$

D. $\{3 - x\}$

8. Sebuah basis untuk P_1 terhadap matriks T diagonal dari transformasi linear T: $P_1 \rightarrow P_1$ yang dirumuskan pada soa nomor 7 di atas adalah

A. $\left\{\frac{1}{3}x + 1, x\right\}$

B. $\left\{\frac{1}{3} + x, x\right\}$

C. $\{x - 3, x\}$

D. $\{3 - x, x\}$

9. Sebuah matriks yang mendiagonalisasi secara ortogonal matriks $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ dengan $b \neq 0$ adalah P =

A. $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$

D. $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$

10. Matriks diagonal $D = P^{-1} A P$ dari matriks $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ dengan $b \neq 0$ yang didiagonalisasi secara ortogonal oleh P pada soal nomor 9 di atas adalah

A. $\begin{bmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a-b \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a+b \end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} a-b & 0 \\ 0 & a-b \end{bmatrix}$

D. $\begin{bmatrix} 0 & a+b \\ a-b & 0 \end{bmatrix}$

Balikan dan Tindak Lanjut

Sebagai umpan balik dan tindak lanjutnya, cocokanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 2 yang ada di bagian akhir modul ini. Hitunglah jumlah jawaban Anda yang benar. Kemudian gunakan rumus di bawah ini untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 2.

Rumus :

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{jumlah jawaban Anda yang benar}}{10} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan yang Anda capai :

90% - 100% = Baik sekali

80% - 89% = Baik

70% - 79% = Cukup

< 70% = Kurang.

Kalau Anda mencapai tingkat penguasaan 80% ke atas, Anda dapat meneruskannya pada modul berikutnya. **Bagus !** Tetapi bila tingkat penguasaan Anda masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi Kegiatan Belajar 2, terutama bagian yang belum Anda kuasai. Selamat belajar, semoga berhasil.

KUNCI JAWABAN TES FORMATIF

Modul 11

Tes Formatif 1

1. D det(A – λ I) = det $\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}$ = 0

$\Leftrightarrow (1-\lambda)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$

2. A Akar-akar dari persamaan karakteristik

$\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$ (dari soal nomor satu)

$\Leftrightarrow (1-\lambda)(1-\lambda) = 0$

$\lambda = 1$

3. C Misal vektor $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ adalah suatu vektor eigen dari matriks A yang bersesuaian dengan nilai eigen λ = 1 (dari soal nomor dua di atas), maka

$(A - \lambda I)\,\mathbf{x} = 0$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow 0\,x_1 + 0\,x_2 = 0$

$0\,x_1 + 0\,x_2 = 0$

$\Leftrightarrow x_1 = t \in R$

$x_2 = s \in R$

$\Leftrightarrow \mathbf{x} = \begin{bmatrix} t \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} s\,.$

Jadi $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ adalah basis untuk ruang eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 1$.

4. B $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (dari soal nomor 3)

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 1$.

5. B det $(\lambda I - A)$ = det $\begin{bmatrix} \lambda - 1 & -5 \\ -1 & \lambda - 5 \end{bmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 5) - 5 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda^2 - 6\lambda = 0$

$\Leftrightarrow \lambda(\lambda - 6) = 0$

$\lambda = 0, \ \lambda = 6$

Karena nilai eigen terbesar dari matriks A adalah $\lambda = 6$, maka untuk vektor eigen $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ tak nol berlaku $(\lambda I - A)\, x = 0$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow 5x_1 - 5x_2 = 0$

$\Leftrightarrow -x_1 + x_2 = 0$

$\Leftrightarrow x_1 = x_2$

$\Leftrightarrow x_1 = t$

$x_2 = t \in R$

Jadi $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} t = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, t = 1$

Dari definisi nilai eigen dan vektor eigen (definisi 11. 1)

$A\,\mathbf{x} = \lambda\,\mathbf{x}$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix} = 6\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ adalah vektor eigen A yang bersesuaian dengan x = 6.

6. A Persamaan karakteristik matriks A

det (λ I – A) = 0

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix}\lambda-3 & 2 & 0\\ 2 & \lambda-3 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-5\end{bmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow$ Menurut baris ketiga (minor dan kofaktor)

$$\Leftrightarrow \lambda - 5 \begin{vmatrix}\lambda-3 & 2\\ 2 & \lambda-3\end{vmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow (\lambda - 5)\ \{\ \lambda - 3)^2 - 4\} = 0$

$\Leftrightarrow (\lambda - 5)\ \{\ \lambda^2 - 6\lambda + 9 - 4\} = 0$

$\Leftrightarrow (\lambda - 5)\ \{\ (\lambda - 5)\ (\lambda\ - 1\} = 0$

$\Leftrightarrow (\lambda - 5)^2\ (\lambda\ - 1\} = 0$

Jadi, $\lambda_1 = 5$ dan $\lambda_2 = 1$ adalah nilai-nilai eigen dari matriks A.

7. C Misal vektor eigen $\mathbf{x} = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$ adalah penyelesaian non linear dari (λ I – A) = 0, yaitu dari $\begin{bmatrix}\lambda-3 & 2 & 0\\ 2 & \lambda-3 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$.

Nilai eigen terbesar dari A adalah $\lambda = 5$ (dari soal nomor 6)

$$\begin{bmatrix}2 & 2 & 0\\ 2 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{`}\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

Dengan menyelesaikan sistem persamaan linear homogen ini akan didapatkan $x_1 = -s$, $x_2 = s$, $x_3 = t$ (buktikan).

Jadi, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -s \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s \\ s \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t$

Jadi vektor-vektor eigen dari A yang bersesuaian dengan $\lambda = 5$ (nilai eigen terbesar dari A) adalah $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, untuk x = t = 1.

(Silakan diperiksa dengan menggunakan definisi vektor eigen dan nilai eigen (definisi 11. 5)).

8. D Matriks T terhadap basis standar B = $\{1, x, x^2\}$ adalah

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Nilai-nilai eigen dari T adalah nilai-nilai eigen dari A, yaitu $\lambda_1 = 1$ dan $\lambda_2 = 5$ (soal nomor 6)

9. B Dari soal nomor 7 di atas telah didapatkan bahwa vektor-vektor eigen A (yang membentuk basis ruang eigen A) yang bersesuaian dengan nilai eigen terbesar $\lambda = 5$ adalah

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ dan } \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Matriks-matriks ini adalah matriks koordinat terhadap basis B = $\{1, x, x^2\}$ yang berbentuk $p_1 = -1 - x$ dan $p_2 = x^2$.

$p_1 = -1 - x$ dan $p_2 = x^2$ adalah vektor-vektor eigen dari T atau dari A yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_1 = 5$ (terbesar, sebab $\lambda_2 = 1$).

10. B Matriks T terhadap basis standar

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \text{ adalah } A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Persamaan karakteristik matriks A

$(A - \lambda I) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

Dengan menghitung determinan menurut baris ke-4 atau kolom ke-4 secara minor dan kofaktor, akan didapatkan (buktikan)

$(\lambda - 1)^2 (-\lambda - 2) (\lambda + 1) = 0.$

Jadi nilai-nilai eigen matriks T adalah nilai-nilai eigen untuk A yaitu

$\lambda = 1$, $\lambda = -2$, dan $\lambda = -1$.

Tes Formatif 2

1. C $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

Nilai-nilai eigen matriks A adalah $\lambda_1 = -1$ (buktikan), dan penyelesaian dari $(A - \lambda I)\, x = 0$ adalah: $2x_1 - 2x_2 = 0$

sehingga penyelesaiannya adalah

$x_1 = t$, $x_2 = t$ (buktikan)

atau

$$x = \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} t.$$

Karena ruang eigen ini berdimensi satu, maka A tidak mempunyai dua vektor eigen bebas linear, sehingga tidak dapat didiagonalisasi.

2. A $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

Persamaan karakteristik matriks A adalah $(\lambda - 1)\ (\lambda - 5)^2$ (buktikan), sehingga nilai-nilai eigen dari A adalah $\lambda_1 = 5$ dan $\lambda_2 = 2$.

Dari persamaan $(\lambda\ I - A)\ \mathbf{x} = 0$ atau $(A - \lambda\ I)\ \mathbf{x} = 0$ kita dapatkan vektor-vektor $p_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ dan $p_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ yang membentuk sebuah basis untuk ruang eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 5$ dan vektor $p_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Adalah sebuah bais untuk ruang eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 1$ (buktikan). Jadi, matriks P yang mendiagonalkan A adalah:

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3. B Dari soal nomor dua di atas, kita dapatkan

$$D = P^{-1}\ A\ P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. D Nilai-nilai eigen dari matriks A dapat saja ditukar, yaitu $\lambda_1 = 1$ dan $\lambda_2 = 5$, sehingga vektor

$$p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

adalah basis untuk ruang eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = 1$, dan vektor-vektor

$$p_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ dan } p_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

adalah basis untuk ruang eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_2 = 5$. Jadi untuk yang mendiagonalisasi A adalah

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5. A Dengan alasan yang sama seperti jawaban nomor lima di atas, maka jika

memilih $P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ akan didapatkan matriks diagonal:

$$D = P^{-1}\, A\, P = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

(buktikan)

6. D $T: R^2 \rightarrow R^2$

$$t \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1 + 4x_2 \\ 2x_1 + x_2 \end{bmatrix}$$

Basis standar di R^2

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

maka:

$$T\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

$$T\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}=4\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+1\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

$$\left[T\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right]_B=\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$$

$$\left[T\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right]_B=\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}$$

sehingga matriks standar untuk T terhadap basis B adalah

$$A=\begin{bmatrix}3&4\\2&1\end{bmatrix}$$

Nilai-nilai eigen matriks A adalah λ_1 = 5 dan λ_2 = -1 (buktikan), sehingga vektor

$$p_1=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$$

adalah vektor basis untuk ruang eigen A yang bersesuaian dengan λ_1 = 5 dan vektor

$$p_2=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$$

adalah vektor basis untuk ruang eigen A yang bersesuaian dengan λ_2 = -1.

Jadi sebuah basis untuk R^2 relatif terhadap matriks T diagonal adalah

$$\left\{\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\right\}.$$

Catatan:

x = $\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$ t, untuk t_1 = 1, maka p_1 = $\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$

dapat juga t_1 = -1 sehingga p_1 = $\begin{bmatrix}-2\\-1\end{bmatrix}$ dan sebagainya

x = $\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$ t, untuk t_1 = 1, maka p_2 = $\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$

atau untuk t = -1 maka $p_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ dan sebagainya.

7. B Diketahui: $T: P_1 \rightarrow P_1$

dengan $T(a_0 + a_1x) = a_0 + (a_0 - a_1)\, x$

Basis standar untuk P adalah B = {1, x}, maka

T(1) = 1 + 6x dan

T(x) = -1x

$[\ T(1)\ ]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}$ dan

$[\ T(x)\ ]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

Matriks T terhadap basis terhadap basis standar B adalah

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$

Persamaan karakteristik untuk A adalah:

$\det (A - \lambda I) = 0$

$\Leftrightarrow \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 6 & -1-\lambda \end{bmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow (1 - \lambda)\, (-1 - \lambda) = 0$

$\lambda_1 = 1$ dan $\lambda_2 = -1$ (nilai-nilai eigen A)

Untuk $\lambda_1 = 1$ (positif), sistem persamaan linearnya

$(A - \lambda I)\, \mathbf{x} = 0$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow 6x_1 - 2x_2 = 0$

$\Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{3}\ t$

$x_2 = t$

Jadi, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix} t$

Sebuah vektor basis untuk $\lambda_1 = 1$ adalah $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$.

Matriks koordinat terhadap B yang bersesuaian dengan vektor eigen yang positif adalah $p_1 = \frac{1}{3} + x$.

8. B Untuk $\lambda_2 = -1$, sistem persamaan linear

$(A - \lambda\ I)\ \mathbf{x} = 0$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow 2x_1 = 0$

$6x_2 = 0$

$\Leftrightarrow x_1 = 0$

$x_2 = t$

Jadi $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} t.$

Vektor basis untuk $\lambda_2 = -1$ adalah $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ dan matriks koordinat terhadap B adalah

$$p_2 = x.$$

Jadi sebuah basis untuk P, terhadap matriks T diagonal adalah $\left\{ \frac{1}{3} + x,\ x \right\}$.

9. A $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$, $b \neq 0$

Persamaan karakteristik matriks A adalah

$\det(A - \lambda I) = 0$

$\Leftrightarrow \det \begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ b & a-\lambda \end{bmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow (a - \lambda)^2 - b^2 = 0$

$\Leftrightarrow \{(a - \lambda) + b\} \{(a - \lambda) - b\} = 0$

$\lambda_1 = a + b$ dan $\lambda_2 = a - b$ adalah nilai-nilai eigen matriks A

Jika $\lambda_1 = a + b$, maka persamaan linearnya

$(A - \lambda I) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -b & b \\ b & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow x_1 - x_2 = 0$

$\Leftrightarrow x_1 = t$, $x_2 = t$

$x = \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} t$

Jadi $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ adalah vektor eigen matriks A yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = a + b$, dan vektor

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

adalah vektor basis untuk ruang eigen matriks A yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = a + b$. Dengan menerapkan proses Gram-Schmidt terhadap $\{u_1\}$ akan menghasilkan vektor eigen ortonormal

$$v_1 = \frac{u_1}{|u_1|} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

Analog untuk λ_2 = a – b akan memberikan vektor eigen ortonormal

$$V_2 = \frac{u_2}{|\,u_2\,|} = \begin{bmatrix} -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \quad \text{(buktikan).}$$

Dengan menggunakan v_1 dan v_2 sebagai vektor-vektor kolom, maka kita dapatkan

$$P = \begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{2} & -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Yang mendiagonalisasi matriks A secara ortogonal.

10. A Karena dari soal nomor 9 di atas

$$P = \begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{2} & -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Maka matriks diagonal dari matriks

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$$

adalah

$$D = P^{-1}\,A\,P$$

$= P^{t}\,A\,P$ (Karena P ortonormal, sebab $v_1, v_2 = 0$, $|\,v_1\,| = |\,v_1\,| = 1$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{2} & -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a-b \end{bmatrix}$$

matriks ini adalah matriks diagonal P dari matriks A dengan unsur-unsur diagonal utamanya adalah nilai-nilai eigen dari matriks A.

Glosarium

. **Dapat dibalik**, invertibel, *invertible* adalah penamaan terhadap suatu matriks persegi yang mempunyai invers (determinannya tidak nol).

. **Diagonalisasi**, *diagonalizable* adalah suatu istilah yang digunakan terhadap suatu matriks persegi yang memenuhi persyaratan tertentu sesuai definisinya.

. **Matriks diagonal** adalah matriks persegi yang unsur-unsur pada diagonal utamanya ada yang tidal nol.

. **Matriks identitas** adalah matriks persegi yang unsur-unsur diagonal utamanya adalah 1 sedangkan unsur-unsur lainnya adalah nol.

. **Matriks persegi**, matriks kuadrat, matriks bujursangkar adalah matriks yang banyaknya unsur-unsur pada baris sama dengan banyaknya unsur-unsur pada kolomnya.

. **Matriks simetrik** adalah matriks persegi yang transposnya sama dengan dirinya sendiri.

. **Nilai eigen**, *eigen value*, nilai karakteristik adalah suatu istilah berupa nilai (skalar) dari suatu matriks persegi yang memenuhi definisi tertentu.

. **Ortogonal** adalah suatu istilah untuk menyatakan bahwa vektor-vektor dalam himpunan tersebut saling tegak lurus.

. **Ortonormal** adalah suatu istilah untuk menyatakan bahwa himpunan vektor-vektor dalam suatu himpunan itu saling tegaklurus dan panjangnya (besarnya) adalah sama yaitu satu satuan.

. **Persamaan karakteristik** suatu persamaan dengan variabel-variabelnya adalah nilai-nilai karakteristik yang memenuhi definisi tertentu.

. **Polinom karakteristik** suatu polinom dengan variabel-variabelnya adalah nilai-nilai karakteristik dan memenuhi definisi tertentu.

. **Ruang eigen**, *eigen space* adalah ruang penyelesaian dari persamaan karakteristik dengan variabel-variabelnya nilai-nilai karakteristik dari suatu matriks.

. **Tak trivial**, *non trivial* adalah suatu istilah yang digunakan untuk menyatakan bahwa suatu sistem persamaan linear mempunyai penyelesaian yang tidak semuanya nol.

. **Trase**, *trace* adalah jumlah unsur-unsur pada diagonal utama dari suatu matriks persegi.

. **Vektor eigen** (*eigen vector*) adalah suatu istilah berupa vektor di R^n yang kelipatannya merupakan perkalian dengan suatu matriks persegi dan memenuhi definisi tertentu.

DAFTAR PUSTAKA

Ayres, Frank, JR.Ph.D, (1982). *Theory and Problems of Matrices*, Singapore: Schaum's Outline, Mc-Graw Hill Book Company.

Anton Howard, (1987), *Elementary Linear Algebra*, 5th Edition New York: John Wiley & Sons.

Larry Smith. (1998). *Linear* Algebra. Gottingen: Springer.

Raisinghania & Aggarwal, R.S, (1980), *Matrices*, New Delhi: S.Chan & Company Ltd.

Roman Steven (1992). *Advanced Linear Algebra*, New York, Berlin, Herdelberg, London, Paris, Tokyo, Hongkong, Barcelona, Budapest: Springer-Velag.

Seymour Lipschutz. (1981). *Linear Algebra*, Singapore: Schaum's Outline, Mc-Graw Hill Book Company.