BENTUK-BENTUK ALJABAR

(Pembelajaran Matematika SMP)

Oleh : H. Karso

FPMIPA UPI

A. Kalimat Matematika dalam Bentuk Aljabar Serta Unsur-unsurnya

Dalam pelajaran matematika pengertian kalimat matematika dibedakan dengan kalimat-kalimat biasa dalam bahasa sehari-hari. Dalam kalimat biasa sering dipilih kata-kata yang pantas, yang indah, kiasan, atau ungkapan yang kabur, dan kadang-kadang dipakai kata-kata yang bermakna ganda. Sebaliknya dalam kalimat matematika tidaklah demikian, tetapi kalimatnya haruslah lengkap, tidak kabur dan jelas.

1. Kalimat Matematika Tertutup

Dalam pelajaran matematika , kalimat matematika dibedakan menjadi dua, yaitu kalimat matematika tertutup dan kalimat matematika terbuka. Kalimat matematika tertutup atau **kalimat tertutup** disebut kalimat pernyataan atau disingkat **pernyataan**. Pernyataan adalah kalimat yang mempunyai nilai kebenaran, yaitu kalimat yang hanya benar saja atau salah saja, tidak dua-duanya pada saat yang sama, artinya tidak sekaligus benar dan salah. Untuk lebih jelasnya kita perhatikan beberapa contoh berikut.

Contoh 1 (Pernyataan yang benar)

a. Jumlah 5 dan 7 adalah 12.
b. Dalam setahun terdapat 12 bulan.
c. Jika $x = 2$, maka $3x = 6$.

Contoh 2 (Pernyataan yang salah)

a. Sebuah kubus mempunyai 8 buah bidang sisi.
b. $x - y = y - x, x \neq y$

c. Sungai Musi terdapat di Kalimantan

Contoh 3 (Bukan pernyataan)

a. Tutuplah pintu itu
b. Mudah-mudahan lulus ujian
c. Tiada yang tetap kecuali perubahan

2. Kalimat Matematika Terbuka

Perhatikanlah kalimat; “x adalah pembagi dari 12”. Kita belum dapat menyatakan apakah kalimat ini benar atau salah. Setelah “x” diganti dengan lambang bilangan asli, barulah kita dapat menentukan benar atau salahnya kalimat itu.

Jika lambang “x” diganti dengan lambang “4”, maka kalimat itu menjadi benar. Sedangkan jika “x” diganti dengan lambang “5” akan menjadi salah. Kalimat seperti “x adalah pembagi dari 12” adalah kalimat matematika terbuka atau kalimat terbuka, yaitu kalimat yang belum mempunyai nilai kebenaran artinya belum tentu benar dan salahnya. Kita perhatikan beberapa contoh kalimat terbuka lainnya.

Contoh 4

a. $\square + 2 = 9$
b. x adalah pembagi dari 12
c. y anggota bilangan genap

Catatan

Istilah-istilah lain untuk **pernyataan** adalah kalimat matematika tertutup, kalimat tertutup, kalimat deklaratif, statement, atai proposisi. Sedangkan istilah lain untuk kalimat yang **bukan pernyataan** adalah kalimat matematika terbuka atau kalimat terbuka. Namun ada beberapa akhli matematika dalam bukunya yang membedakan istilah pernyataan dan istilah proposisi. Hal ini berhubungan dengan pemakaiannya. Istilah pernyataan (*statement*) digunakan untuk menyatakan, sedangkan istilah proposisi (*proposition*) digunakan untuk kalimat tertutup. Akan tetapi pada umumnya para akhli matematika tidak membedakan pengertian pernyataan dan pengertian proposisi. Dalam modul ini istilah proposisi tetap diartikan sebagai kalimat tertutup, sedangkan kalimat pernyataan akan dipakai untuk keperluan tertentu umumnya sama seperti buku-buku lainnya, bahwa istilah kalimat pernyataan tidak dibedakan dengan pengertian proposisi.

3. Himpunan Penyelesaian

Kita perhatikan contoh 4 yang memuat tiga buah kalimat terbuka. Dari contoh ini tampak bahwa setiap kalimat terbuka memuat satu lambang atau lambang-lambang (huruf atau bangun) yang dapat diganti dengan lambing angota tertentu dari himpunan semestanya, demikian sehingga menjadi suatu pernyataan. Lambang itu disebut **variabel** atau **peubah**. Pada umumnya: lambang dari anggota semesta yang belum ditentukan dengan lengkap, jadi melambangkan anggota sembarang dari semestanya, disebut variable atau peubah.

Misalnya huruf x atau bangun $\square$ dalam kalimat di atas, juga “y” dalam kalimat “y adalah bilangan genap” merupakan variabel-variabel.

Sedangkan suatu lambang yang menunjuk pada anggota tertentu dari semestanya disebut **konstanta**. Misalnya “2” yang menunjuk pada bilangan 2, adalah suatu konstanta.

Apabila dalam suatu kalimat terbuka, semua peubah di dalamnya diganti dengan konstanta, maka didapat suatu kalimat pernyataan yang dapat mempunyai nilai benar atau salah.

Misalnya, semestanya adalah himpunan bilangan asli. Jika dalam kalimat “$x + 2 < 7$” variabel “x” diganti dengan “1”, “2”, “3”, “4” maka kalimat terbuka itu menjadi pernyataan yang benar. Bilangan-bilangan yang dinyatakan oleh pengganti-pengganti yang menjadi kalimat terbuka itu menjadi pernyataan yang benar disebut **penyelesaian**. Dikatakan pula bilangan itu **memenuhi kalimat terbuka tersebut**. Himpunan dari semua penyelesaian suatu kalimat terbuka disebut **himpunan penyelesaian**. Jadi, {1, 2, 3, 4} adalah himpunan penelesaian dari kalimat terbuka “$x + 2 < 7$”.

Jika semesta dari “$x + 2 = 2$” adalah himpunan bilangan b**u**lat, maka himpunan penyelesaiannya adalah { 0 }. Jika semestanya himpunan bilangan asli, maka himpunan penyelesaian “$x + 2 = 2$” adalah Ø, sebab tak ada satu pun bilangan asli yang memenuhi “$x + 2 = 2$”.

B. Operasi pada Bentuk Aljabar

Dalam mendiskusikan operasi pada bentuk-bentuk Aljabar, ada beberapa hal yang perlu untuk dipahami dengan baik, karena operasi-operasi dalam bentuk aljabar menjadi dasar yang penting dalam memahami bahasan-bahasan berikutnya. Operasi-operasi pada bentuk aljabar mancakup operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian dalam bentuk-bentuk aljabar termasuk bentuk-bentuk penyederhanaan dan aplikasinya.

1. Penjumlahan dan Pengurangan Suku-suku serta Bentuk-bentuk Sejenis

Tentunya kita telah mengenal bentuk-bentuk seperti $9x – 15x$, dan $10y – 5 – 3y + 6$, dan sebagainya. Sekarang akan dipelajari bagaimana cara menyederhanakannya. Menyederhanakan suatu bentuk ialah mencari bentuk lain yang sama artinya dengan bentuk semula tetapi bentuknya lebih sederhana. Untuk menyederhanakan bentuk-bentuk itu digunakan sifat-sifat seperti:

(i) sifat komutatif penjumlahan dan perkalian

$a + b = b + a$

$ab = ba$

(ii) sifat asosiatif penjumlahan dan perkalian

$(a + b) + c = a + (b + c)$

$(ab)c = a (bc)$

(iii) sifat distributif perkalian terhadap penjumlahan

$ab + ac = a (b + c)$; a disebut faktor persekutuan.

Bagaimana dengan sifat komutatif pengurangan, asosiatif pengurangan dan sifat distributif perkalian terhadap pengurangan?

Contoh 5

Sederhanakanlah $3x^3 + 4x^2 + x^3 – 2x^2$.

Penyelesaian:

$3x^3 + 4x^2 + x^3 - 2x^2 = 3x^3 + x^3 + 4x^2 - 2x^2$ (hukum komutatif penjumlahan)

$= (3 + 1)x^3 + (4 - 2)x^2$ (hukum distributif perkalian terhadap penjumlahan/pengurangan).

$= 4x^3 + 2x^2$

Dalam pelaksanannya, beberapa langkah boleh dilampaui.

Contoh 6

Tentukan jumlah dari

$4x^2 - 3xy - 2y^2$ dan $-7x^2 + 5xy - 8y^2$.

Penyelesaian: $4x^2 - 3xy - 2y^2 + (-7x^2 + 5xy - 8y^2)$

$= 4x^2 - 3xy - 2y^2 -7x^2 + 5xy - 8y^2$

$= 4x^2 -7x^2 - 3xy + 5xy - 2y^2 -8y^2$

$= -3x^2 + 2xy - 10y^2$

Perhatikanlah bagaimana mengelompokkan suku-suku sejenis sehingga hukum distributif dapat dipakai dengan mudah. Lihatlah baris kedua dari bawah. Dalam pelaksanaannya, baris tersebut boleh dihapus. Pengelompokan itu dilakukan dalam pikiran saja dan tidak perlu ditulis.

Contoh 7

Kurangkanlah $3x - 4$ dari $2x + 5$

Penyelesaian: $(2x + 5) - (3x - 4)$

$= 2x + 5 -1 (3x - 4)$

$= 2x + 5 - 3X + 4$

$= -x + 9$

Catatan

Bentuk seperti $x^3 -3x^2 + 4x + 5$ dinamakan suku banyak atau polinom dengan satu peubah.

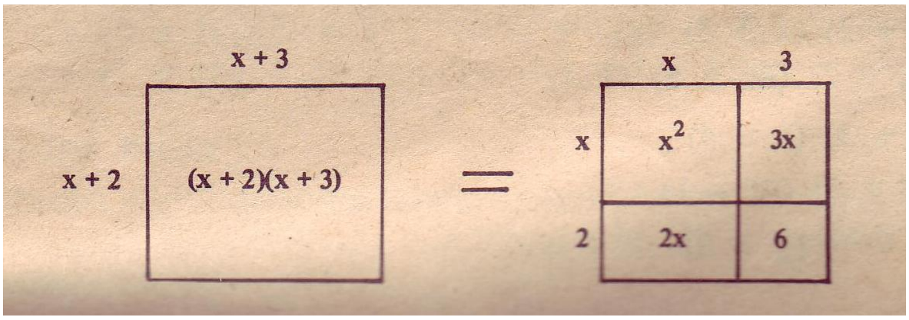
Bentuk $3x^2y + 2xy^2 + 4y – 7$ disebut suku banyak atau polinom dengan dua peubah. Suku banyak dengan tiga suku disebut suku tiga atau trinom misalnya $3x^2 - 4x + 1$.

2. Menyatakan Perkalian Faktor-faktor sebagai Penjumlahan Suku-suku

Seperti telah dipelajari bentuk yang mempunyai dua suku seperti x + 2 atau x + 3 disebut sukudua atau binom. Kita dapat menghitung hasil perkalian suku dua dengan memakai hukum distributif sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
&(x + 2) (x + 3)\\
&= x(x + 3) + 2(x + 3)\\
&= x^2 + 3x + 2x + 6\\
&= x^2 + 5x + 6
\end{aligned}
$$

Hasil itu dapat juga diperoleh dengan menggambar persegipanjang yang lebarnya (x + 2) satuan dan panjangnya (x + 3) satuan. Kemudian persegipanjang itu dibagi seperti tampak pada Gambar. 1



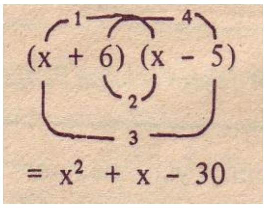
Gambar. 1

Contoh 8

$$
\begin{aligned}
&(2x – 4)(3x – 7)\\
&= 2x(3x -7) – 4x(3x – 7)\\
&= 6x^2 – 14x – 12x + 28\\
&= 6x^2 – 26x + 28
\end{aligned}
$$

Jelaslah perkalian dus sukudua, menghasilkan suku banyak yang mempunyai 4 suku yang dua suku diantaranya seringkali dapat diperoleh denga mencongak (dipikirkan saja). Perhatikan perkalian berikut ini.

$$(x + 6)\ (x - 5)$$



Hasil perkalian "dalam" yaitu (2) dan perkalian "luar" yaitu (3) dijumlahkan menghasilkan suku tengah: $6x - 5x = x$.

Jika perkalian dua suku banyak dinyatakan sebagai perkalian beberapa suku, maka dikatakan bahwa perkalian itu dijabarkan dan dijumlahkan itu disebut **hasil penjabaran** dari perkalian tersebut.

3. Dua Pengkuadratan yang Penting

Perkalian dua buah bentuk pengkuadratan berikut:

a. $(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$

$$= a(a + b) + b(a + b)$$

$$= a^2 + ab + ab + b^2$$

b. $(a - b)^2 = (a - b)(a - b)$

$$= a(a - b) - b(a - b)$$

$$= a^2 - ab - ab + b^2$$

Perhatikanlah benar-benar

$(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$

$(a - b)^2 = (a - b)(a - b)$

Hasil pengkuadratan itu adalah:

Suku pertama adalah kuadrat suku pertama duasuku yang dikuadratkan, suku tengah adalah duakali hasil perkalian kedua suku. Suku ketiga adalah kuadrat suku kedua.

Contoh 9

$(x + 5)^2$

$= x^2 + 2(x)(5) + 5^2$

$= x^2 + 10x + 25$

Contoh 10

$(2x - 3y)^2$

$= (2x)^2 + 2(2x)(-3y) + (-3y)^2$

$= 4x^2 - 12xy + 9y^2$

Ingatlah bahwa:

Bilangan positif dikalikan bilangan negatif hasilnya merupakan bilangan negatif.

Hasil perkalian dua bilangan negatif merupakan bilangan positif.

4. Identitas atau Kesamaan (Equality)

Kalimat $2x = 6$ merupakan kalimat terbuka. Kalimat itu menjadi benar jika "x" diganti dengan "3" dan salah jika diganti dengan lambing lain. Kalimat $y^2 \times y = y^3$ adalah kalimat yang benar untuk semua pengganti "y" yang berupa bilangan nyata. Kalimat semacam itu disebut identitas.

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ dan $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ juga merupakan identitas.

Untuk membuktikan bahwa suatu bentuk persamaan merupakan identitas, maka perlu ditunjukkan bahwa bentuk ruas kiri dapat dijadikan sama dengan bentuk ruas kanan.

Contoh 11

Buktikanlah $(p + q)^2 - 4pq = (p - q)^2$ merupakan identitas.

Bukti: Ruas kiri $= (p + q)^2 - 4pq$

$= p^2 + 2pq + q^2 - 4pq$

$= p^2 - 2pq + q^2$

$= (p - q)^2$

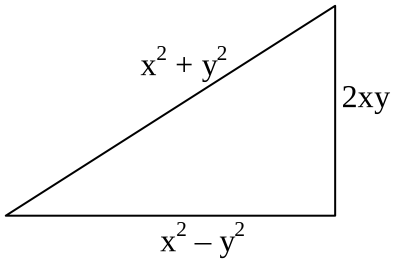
= ruas kanan.

Karena ruas kiri dapat diubah bentuknya menjadi sama dengan bentuk ruas kanan maka persamaan tersebut merupakan identitas.

Contoh 12

Suatu himpunan yang terdiri dari 3 bilangan asli yang menyatakan ukuran panjang sisi-sisi segitiga siku-siku, dinamakan **tigaan Pythagoras** atau **tripel**

Pythagoras. Tunjukkan bahwa $x^2 + y^2$, $x^2 - y^2$, dan 2xy dengan $x > y$ selalu menghasilkan tigaan Pythagoras (lihat Gambar. 2).



Gambar. 2

Bukti: Untuk membuktikanya maka harus ditunjukkan $(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2$

Ruas kiri

$= (x^2 + y^2)^2$

$= x^4 + 2x^2y^2 + y^4$

Ruas kanan

$= (x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2$

$= x^4 - 2x^2y^2 + y^4 + 4x^2y^2$

$= x^4 + 2x^2y^2 + y^4$

Ternyata $(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2$ adalah suatu identitas. Jika x dan y merupakan bilangan-bilangan asli dengan $x > y$ maka $x^2 + y^2$, $x^2 - y^2$, dan 2xy selalu merupakan tigaan Pythagoras.

Misalnya jika x = 2 dan y = 1, maka:

$x^2 + y^2 = 2^2 + 1^2 = 5$

$x^2 - y^2 = 2^2 - 1^2 = 3$

$2xy = 2 \times 2 \times 1 = 4$

Jadi, panjang sisi-sisi segitiga siku-siku itu adalah: 3, 4, dan 5.

C. Menguraikan Bentuk Aljabar ke dalam Faktor-faktornya

Masih terkait dengan operasi-operasi pada bentuk-bentuk aljabar, maka bahasan lanjutannya adalah bagaimana menguraikan bentuk-bentuk aljabar ke dalam faktor-faktornya. Dalam bahasan berikut hanyalah mencakup beberapa konsep dasar tentang faktorisasi bentuk-bentuk aljabar yang bersifat elementer dan pemakaiannya akan banyak kita jumpai dalam bahasan-bahasan berikutnya.

1. Faktor

Tentunya Anda masih ingat dengan hukum distributif, dan hukum tersebut dapat dinyatakan sebagai berikut:

$ab + ac = a(b + c)$ untuk setiap a, b dan $c \in R$.

Hukum di atas menunjukkan dengan cara bagaimana jumlah suku-suku yang mempunyai faktor persekutuan dapat dinyatakan sebagai perkalian. Jadi faktor a pada setiap suku ruas kiri dapat dipindahkan sebagai faktor persekutuan dari seluruh bentuk tesebut, seperti tampak pada ruas kanan.

Contoh 13

Faktorkanlah $x^2yz + xy^2z + xyz^2$

Penyelesaian:

Faktor persekutuan terbesar dari ketiga suku itu adalah xyz. Jika tiap suku dibagi xyz terdapat faktor lain $(x + y + z)$ sehingga:

$$x^2yz + xy^2z + xyz^2 = xyz\,(x + y + z).$$

Catatan: Dalam perkalian, pemakaian faktor-faktor seringkali dapat mempermudah perhitungan, misalnya:

$$\begin{aligned}(34 \times 57) + (34 \times 43) &= 34(57 + 43)\\ &= 34 \times 100\\ &= 3400\end{aligned}$$

2. Selisih Dua Kuadrat

Sekarang kita perhatikan jika a dan b masing-masing bilangan real sembarang, maka dengan hukum distributif didapat:

$$\begin{aligned}(a - b)(a + b) &= a(a + b) - b(a + b)\\ &= a^2 + ab - ab - b^2\\ &= a^2 - b^2\end{aligned}$$

Jadi, $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

Pada ruas kiri terdapat selisih dua kuadrat dan pada ruas kanan terdapat perkalian dua faktor.

Contoh 14

Faktorkanlah $2x^2 – 18y^2$.

Penyelesaian:

$2x^2 – 18y^2 = 2(x^2 – 9y^2)$

$= 2 [x^2 – (3y)^2]$

$= 2(x – 3y)(x + 3y)$

Ingatlah bahwa setiap faktor persekutuan harus dipisahkan lebih dahulu.

3. Bentuk Kuadrat dan Faktor-faktornya

Dalam bahasan-bahasan yang terdahulu kita telah mempelajari cara menyatakan perkalian faktor-faktor sebagai penjumlahan dengan menggunakan hukum distributif.

Misalnya: $(x – 3)(x – 5)$

$= x(x – 5) – 3(x – 5)$

$= x^2 – 5x – 3x + 15$

$= x^2 -8x + 15$

Sekarang kita pelajari cara-cara memfaktorkan bentuk-bentuk kuadrat yang bentuknya $ax^2 + bx + c$.

Terlebih dahulu kita bicarakan untuk $a = 1$.

Karena $(x – 3)(x – 5) = x^2 – 8x + 15$

maka $x^2 – 8x + 15 = (x – 3)(x – 5)$

Perhatikanlah bahwa: $15 = (-3)(-5)$ dan $-8 = (-3) + (-5)$.

Demikian pula karena:

$(x + 5)(x – 2) = x^2 + 3x - 10$

maka $x^2 + 3x – 10 = (x + 5)(x – 2)$

Ternyata bahwa: $-10 = (5)(-2)$ dan $3 = (5) + (-2)$

Kesimpulan:

1) Suku konstanta (suku tetap) atau disingkat konstanta dalam bentuk kuadrat sama dengan hasil perkalian konstanta-konstanta dalam kurung. Jika tanda pada konstanta pada bentuk kuadrat positif, maka tanda konstanta-konstanta dalam kurung keduanya positif atau keduanya negatif. Sedangkan jika tanda pada konstanta negatif, maka konstanta dalam kurung harus berlawanan.
2) Koefisien dari x pada bentuk kuadrat sama dengan jumlah konstanta-konstanta dalam kurung.

Kedua hal tersebut di atas dapat ditulis dalam pernyataan:

$$x^2 + (p + q)x + pq = (x + p)(x + q).$$

Contoh 16

Faktorkanlah: $x^2 – 8x + 12$

Penyelesaian:

Lebih dahulu harus didapat dua bilangan yang hasil-kalinya 12 dan jumlahnya -8. Bilangan-bilangan yang memenuhi hal tersebut adalah -6 dan -2.

Jadi, $x^2 – 8x + 12= (x – 6)(x – 2)$.

Contoh 17

Faktorkanlah: $x^2 – 2x - 24$

Penyelesaian:

Harus didapat dua bilangan yang hasilnya -24 dan jumlahnya -2. Bilangan-bilangan itu adalah -6 dan 4, sebab $(-6) \times 4 = - 24$ dan $(-6) + 4 = -2$ sehingga $x^2 – 2x – 24 = (x – 6)(x + 4)$.

Selanjutnya kta pelajari cara-cara memfaktorkan bentuk kuadrat $ax^2 + bx + c$ dengan $a \neq 1$.

Perhatikan $(2x + 3)(4x – 5) = 2x(4x – 5) + 3 \times (4x – 5)$

$$= 2 . 4x^2 – 2 . 5x + 3.4x – 3. 5$$

$$= 2. 4x^2 + (3. 4 - 2. 5)x – 3. 5$$

$$= 8x^2 + 2x – 15.$$

Karena itu: $8x^2 + 2x – 15$ atau $2. 4x^2 + (3. 4 - 2. 5)x – 3. 5 = (2x + 3)(4x – 5)$.

Perhatikanlah bahwa faktor-faktor itu dapat ditentukan dengan:

a. Menentukan suku dengan x di dalam kurung demikian sehingga hasilnya $8x^2$.

b. Menentukan faktor-faktor dari suku tetap dalam bentuk kuadrat, yaitu -15, demikian sehingga jumlah dari “perkalian dalam” (3×4) dengan “perkalian luar” $(-5 \times 2x$ adalah 2x.

Contoh 18

Faktorkanlah: $12y^2 – 23y + 10$

Penyelesaian:

a. Faktor-faktor dari $12y^2$ adalah 12y dan y; 6y dan 2y; 4y dan 3y.

b. Faktor-faktor dari 10 adalah 10 dan 1; 5 dan 2; -10 dan -1; -5 dan -2.

Dari faktor-faktor itu yang tandanya sesuai dicoba sehingga jumlah dari perkalian dalam dan perkalian luar adalah -23y. Yang sesuai adalah (-2)(4y) dengan (-5)(3y) sehingga:

$$(-5)\ (3y)$$

$$12y^2 – 23y + 10 = (4y – 5)(3y – 2)$$

$$(-2)\ (4y)$$

4. Pemakaian Faktor untuk menyederhanakan Pecahan

Sebagaimana telah diketahui, bahwa kita dapat menyederhanakan $\frac{14}{20}$ dengan memfaktorkan 14 dan 20 sebagai berikut:

$$\frac{14}{20} = \frac{2 \times 7}{2 \times 10} = \frac{7}{10}.$$

Dengan cara yang sama, yaitu dengan memfaktorkan pembilangdan penyebut suatu pecahan dalam aljabar, kita dapat menyederhanakan suatu pecahan.

Contoh 19

Sederhanakan $\frac{2x-6}{x^2+x-12}$ jika x $\neq$ -4 dan x $\neq$ 3.

Penyelesaian:

$$\frac{2x-6}{x^2+x-12}=\frac{2(x-3)}{(x+4)(x-3)}=\frac{2}{x+4}$$

Selanjutnya kita hanya membicarakan bentuk pecahan yang penyebutnya tidak nol.

Contoh 20

Sederhanakan $\frac{a^2-b^2}{b-a}$

Penyelesaian:

Cara I: Lawan atau negatif dari b – a ialah – (b – a) atau a – b.

Jadi, $\frac{a^2-b^2}{b-a}=\frac{a^2-b^2}{-(a-b)}=-\frac{(a-b)(a+b)}{a-b}=-(a+b)$

Cara II: Lawan atau negatif dari a^2-b^2 ialah $-(a^2-b^2)$ atau b^2-a^2.

Jadi, $\frac{a^2-b^2}{b-a}=-\frac{b^2-a^2}{b-a}=-\frac{(b-a)(b+a)}{b-a}=-(b+a)=-(a+b)$

Kita dapat menyedehanakan $\frac{2}{5}+\frac{1}{4}$ dengan menyamakan penyebutnya, yaitu sebagai berikut:

$$\frac{2}{5}+\frac{1}{4}=\frac{2\times4}{5\times4}+\frac{1\times5}{4\times5}=\frac{8}{20}+\frac{5}{20}=\frac{8+5}{20}=\frac{13}{20}$$

Proses tersebut dapat digunakan pula pada bentuk pecahan aljabar.

Contoh 21

Sederhanakan $\frac{2}{x+4}-\frac{x-5}{x^2+7x+12}$.

Penyelesaian:

$$\frac{2}{x+4}-\frac{x-5}{x^2+7x+12}=\frac{2}{x+4}-\frac{x-5}{(x+4)(x+3)}$$

$$=\frac{2(x+3)}{(x+4)(x+3)}-\frac{(x-5)}{(x+4)(x+3)}$$

$$=\frac{2(x+3)-(x-5)}{(x+4)(x+3)}$$

$$=\frac{2x+6-x+5}{(x+4)(x+3)}$$

$$=\frac{x+11}{(x+4)(x+3)}$$

D. Kemungkinan Kesalahan Konsep dalam Pembelajaran Bentuk-bentuk Aljabar

Ada suatu catatan yang perlu kita ketahui sehubungan dengan kesalahan konsep dalam pembelajaran logika matematika di sekolah. Hal ini penting untuk kita ketahui sebagai antisipasi sekaligus sebagai pengelaman yang berharga bagi setiap calon guru maupun guru matematika. Namun tentu saja tidak semua kesalahan atau kemungkinan kesalahan konsep dapat kita diskusikan di sini. Dalam hal ini hanyalah suatu contoh kesalahan konsep yang bersifat mendasar, sehingga mengakibatkan fatalnya pembelajaran matematika yang bermakna.

Berdasarkan temuan penulis mengkaji buku-buku matematika sekolah yang banyak beredar di lapangan ada beberapa buku yang penulis pandang telah terjadi kesalahan konsep yang sangat mengganggu dan merugikan bagi guru dan peserta didik yang mempelajari matematika, khususnya untuk konsep-konsep yang sedang kita diskusikan sekarang ini. Misalnya tentang konsep kalimat matematika tertutup (pernyataan/ preposisi) dan kalimat matematika terbuka.

Ada beberapa buku yang mendefinisikan kalimat terbuka (bukan preposisi) adalah kalimat matematika yang memuat variabel.

Contoh 22

a. x + 2 = 5

b. Ia adalah seorang guru matematika

c. $y^2 + y - 6 = 0$

d. $x + 2 \geq 5$

e. $(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$

f. $x + 2 > x + 5$

Contoh-contoh (a), (b), (c), dan (d) memang memuat variable. Contoh (a) variabelnya adalah x, contoh (b) variabelnya adalah “ia”, contoh (c) varabelnya adalah y dan contoh (d) variabelnya adalah x. Contoh-contoh (a), (b), (c), dan (d) adalah kalimat terbuka, karena belum mempunyai nilai kebenaran. Contoh (a) dan (c) adalah bentuk persamaan (*equation*) sedangkan contoh (d) adalah bentuk pertidaksamaan (*inequation*). Sedangkan contoh (e) dan (f) walaupun memuat variable yaitu x, bukanlah kalimat terbuka, tetapi kedua-duanya adalah kalimat tertutup, sebab mempunyai nilai kebenaran. Contoh (e) selalu benar untuk berbagai variabel x. Jadi contoh (e) adalah kalimat matematika tertutup yang bernilai benar. Contoh (f) adalah kalimat tertutup yang nilai kebenarannya salah, sebab untuk berbagai variabel x akan selalu bernilai salah. Contoh (f) adalah sebuah bentuk ketidaksamaan (*inequality*).

Jadi, tidaklah tepat kalau mendefinisikan kalimat matematika terbuka sebagai kalimat matematika yang memuat variabel, karena ada kalimat matematika tertutup yang memuat variabel. Nampaknya akan lebih tepat jika mendefinisikan kalimat terbuka sebagai kalimat yang tidak (yang belum) mempunyai nilai kebenaran, artinya kalimat yang tidak benar ataupun tidak salah. Sedangkan lawannya adalah kalimat matematika tertutup (preposisi), yaitu kalimat matematika yang mempunyai nilai kebenaran, artinya kalimat yang sudah pasti benarnya atau sudah pasti salahnya, tidak dua-duanya pada saat yang sama.

Demikianlah sedikit catatan tentang kesalahan konsep yang terjadi dalam pembelajaran bentuk-bentuk aljabar di SMP. Malahan tidak menutup kemungkinan masih ada kesalahan-kesalahan konsep yang mungkin pernah ditemukan oleh para pembaca. Oleh karenanya melalui diskusi-diskusi baik dengan sesama guru matematika di sekolah maupun dalam kegiatan musyawarah guru mata pelajaran matematika (MGMP) ada baiknya membahas permasalahan miskonsepsi sesuai pengalaman kita masing-masing.

Malahan ada baiknya pula model-model pembelajaran yang bersifat inovasi seperti telah didiskusikan di atas untuk dicoba baik dalam mengatasi miskonsepsi maupun untuk bahasan-bahasan lainnya. Akan lebih baik lagi kalau kegiatan semacam ini dijadikan sebagai kegiatan penelitian tindakan kelas (*classroom action research*). Kegiatan penelitian tindakan kelas (PTK) ini merupakan salah satu jenis karya ilmiah dalam pengembangan profesi yang akan memberikan dampak positif kepada kita sebagai guru matematika yang professional.

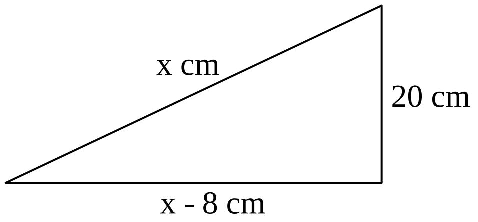
Selanjutnya untuk lebih memantapkan pemahaman Anda terhadap materi **Kegiatan Belajar 1** ini, cobalah kerjakan soal-soal **Latihan 1** berikut.

Latihan 1

1. Nyatakanlah himpunan penyelesaian dari kalimat-kalimat terbuka berikut dengan variabel pada himpunan yang bersangkutan.
   a. x habis dibagi 6; x variabel pada himpunan A = {3, 6, 9, 12, 15}
   b. $n + 3 = 11 – n$; n variabel pada E = {1, 2, 3, …, 10}

2. Jabarkan dan sederhanakan
   a. $(x – 1)(x – 2)$
   b. $(a – b)(a^2 + ab + b^2)$

3. Pada Gambar. 3 pakailah Teorema Pythagoras untuk membentuk persamaan dalam x. Selesaikanlah persamaan itu dan tentukanlah panjang sisi segitiga.



Gambar. 3

4. Faktorkanlan
   a. $a^2 - 7a - 30$
   b. $2x^2 + 7x + 3$

5. Sederhanakanlah
   a. $\dfrac{4a^2 - 9}{2a + 3}$
   b. $\dfrac{x}{x + y} + \dfrac{y}{x - y}$

Setelah Anda mengerjakan soal-soal Latihan 1 di atas, bandingkanlah jawabannya dengan petunjuk (rambu-rambu) jawaban berikut.

Petunjuk Jawaban Latihan 1

1. a. Pengganti $x \in \{3, 6, 9, 12, 15\}$ yang habis dibagi 6 adalah 6 dan 9.
   Jadi, HP = {6, 9}.
   b. $n + 3 = 11 - n$
   $2n = 11 - 3$
   $n = 4$
   Karena $n \in \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$, maka HP = {4}

2. a. $(x - 3)(x - 2) = x(x - 2) - 3(x - 2)$
   $= x^2 - 2x - 3x + 6$
   $= x^2 - 5x + 6$
   b. $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a(a^2 + ab + b^2) - b(a^2 + ab + b^2)$
   $= a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3$
   $= a^3 - b^3$.

3. Menurut Teorema Pythagoras (dari Gambar. 3)
   $x^2 = (20)^2 + (x - 8)^2$
   $x^2 = 400 + x^2 - 16x + 64$
   $16x = 464$

$x = 29$

Jadi, sisi-sisi segitiga tersebut adalah 29 cm, 20 cm, dan (29 – 8) cm = 21 cm.

4. a. Dicari dua bilangan yang hasil kalinya -30 dan jumlahnya -7. Bilangan-bilangan itu adalah -10 dan 3, sebab (10) × 3 = -30 dan (-10) + 3 = -7, sehingga

$$\begin{aligned} a^2 - 7a - 30 &= a^2 - 10a + 3a - 30 \\ &= (a^2 - 10a) + (3a - 30) \\ &= a(a - 10) + 3(a - 10) \\ &= (a + 3)(a - 10) \end{aligned}$$

perkalian dalam

b. $2x^2 + 7x + 3 = (2x \ldots.\ )\ (x \ldots.\ )$

perkalian luar

Faktor-faktor dari $2x^2$ adalah 2x dan x

Faktor-faktor dari 3 adalah 1 dan 3 atau -1 dan -3

Dari faktor-faktor itu yang tandanya sesuai dicoba dalam kurung, sehingga jumlah dalam kurung dari perkalian dalam dan perkalian luar adalah 7x.

Jadi, $2x^2 + 7x + 3 = (2x + 1)\ (x + 3)$, atau dapat pula diselesaikan seperti berikut.

$2x^2 + 7x + 3 =$

Dicari dua bilangan yang hasil kalinya 2 × 3 = 6 dan jumlahnya adalah 7. Bailangan-bilangan itu adalah 1 dan 6, sebab 1 × 6 = 6 dan 1 + 6 = 7, sehingga

$$\begin{aligned} 2x^2 + 7x + 3 &= 2x^2 + x + 6x + 3 \\ &= (2x^2 + x)\ (6x + 3) \\ &= x(2x + 1) + 3(2x + 1) \\ &= (x + 3)(2x + 1) \\ &= (2x + 1)(x + 3) \end{aligned}$$

5. a. $\dfrac{4a^2 - 9}{2a + 3} = \dfrac{(2a - 3)(2a + 3)}{(2a - 3)} = 2a + 3$

b. $\dfrac{x}{x + y} + \dfrac{y}{x - y} = \dfrac{x(x - y)}{(x + y)(x - y)} + \dfrac{y(x + y)}{(x + y)(x - y)}$

$$= \frac{x(x - y) + y(x + y)}{(x + y)(x - y)}$$

$$= \frac{x^2 - xy + xy + y^2}{(x + y)(x - y)}$$

$$= \frac{x^2 + y^2}{(x + y)(x - y)}$$

$$= \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$$

Selanjutnya buatlah rangkuman dari uraian materi Kegiatan Belajar 1 di atas, kemudian bandingkanlah dengan alternatif rangkuman berikut.

Rangkuman

1. **Kalimat matematika tertutup (Pernyataan)**

   Pernyataan atau preposisi atau kalimat matematika tertutup adalah kalimat matematika yang mempunyai nilai kebenaran, artinya sudah pasti benarnya atau sudah pasti salahnya dan tidak mempunyai dua arti. Sedangkan lawannya adalah kalimat matematika terbuka atau bukan pernyataan atau bukan preposisi, yaitu kalimat yang belum mempunyai nilai kebenaran, artinya belum mempunyai kepastian benar atau salah.

2. **Variabel atau peubah**

   Variabel atau peubah adalah lambang-lambang berupa huruf atau bangun yang dapat diganti dengan lambang anggota tertentu dari himpunan semestanya, sehingga dapat menjadikan kalimat matematika terbuka menjadi kalimat matematika tertutup.

3. **Penyelesaian atau Himpunan Penyelesaian**

   Penyelesaian adalah bilangan yang dapat menggantikan variabel dalam kalimat matematika terbuka, sehingga menjadikan kalimat matematika terbuka menjadi kalimat matematika tertutup dan benar. Sedangkan himpunan semua penyelesaian dari suatu kalimat matematika terbuka disebut himpunan penyelesaian (HP) atau himpuna jawaban (HJ).

4. Menyederhanakan Bentuk-bentuk Aljabar

Menyederhanakan suatu bentuk aljabar ialah mencari bentuk lain yang sama artinya dengan bentuk semula, tetapi bentuknya lebih sederhana. Untuk menyederhanakan bentuk-bentuk aljabar dapat dilakukan dengan (a) penjumlahan dan pengurangan suku-suku serta bentuk-bentuk sejenis, (b) menyatakan perkalian faktor-faktor sebagai penjumlahan suku-suku, (c) menggunakan aturan pengkuadratan penjumlahan atau pengurangan dua suku, dan (d) menjabarkan ruas kiri atau ruas kanan, sehingga kedua ruas menjadi sederhana (identitas).

5. Menguraikan Bentuk Aljabar ke dalam Faktor-faktornya

Menguraikan bentuk-bentuk aljabar ke dalam faktor-faktornya dapat diadakan dengan bantuan

a. hukum distributif $a(b + c) = ab + ac$

$$a(b - c) = ab - ac$$

b. memisahkan faktor persekutuan $ab + ac = a(b + c)$

$$ab - ac = a(b - c)$$

c. Pemfaktoran bentuk kuadrat $ax^2 + bx + c$ dengan a, b, c memenuhi $ac = pq$ dan $b = p + q$.

d. Menyederhanakan pecahan dengan bantuan a), b) dan atau c).

Selanjutnya untuk menguji tingkat penguasaan Anda terhadap uraian Kegiatan Belajar di atas, kerjakanlah soal-soal **Tes Formatif** berikut ini.

Tes Formatif

Petunjuk: Berilah komentar atau penjelasan dari setiap pernyataan berikut, dan tentukan pula nilai kebenarannya. Jawaban yang benar skornya 1 dan jawaban yang salah skornya 0.

1. Himpunan penyelesaian (HP) dari y + 4 kurang dari 14, untuk y variabel pada himpunan B = {4, 7, 10, 13}

   a. {1, 2, 3, …} b. {4, 7, 10, 13}

   c. { 4, 7} d. {10}

2. Bentuk sederhana dari (-2u – 3v + 4w) + (-4w -5v-2u)

   a. -4(u + 2v) b. 4(u + 2v)

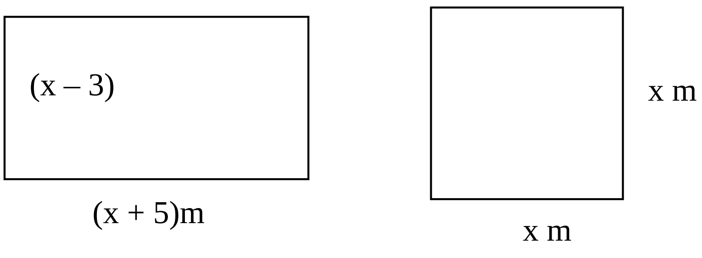
   c. -4(u – 2v) d. 4(u – 2v)

3. Bentuk sederhana dari penjabaran (b – 4)(b – 3)

   a. $b^2 + 7b + 12$ b. $b^2 + 7b - 12$

   c. $b^2 - 7b - 12$ d. $b^2 - 7b + 12$

4. Jika persegipanjang dan bujursangkar (persegi) pada Gambar. 4 luas daerahnya sama, maka ukuran panjang dan lebar persegipanjang tersebut berturut-turut adalah

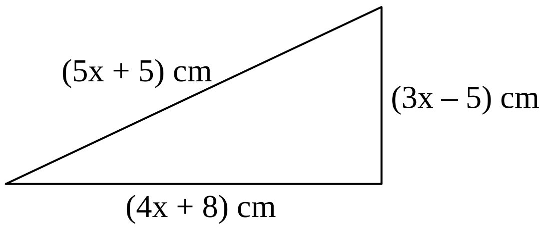


Gambar. 4

   a. 12,5 m dan 4,5m b. 12,5 m dan 4, 5m

   c. 7,5 m dan 7,5 m d. 7,5 m dan 4,5 m

5. Sisi miring segitiga siku-siku panjangnya (5x + 5) cm. Kedua sisi yang lain panjangnya masing-masing (4x + 8) cm dan (3x – 5) cm sebagaimana dilimpahkan Gambar. 5. Ukuran sisi-sisi segitiga tersebut masalah



Gambar. 5

a. 25cm, 24 cm, 19 cm
b. 25 cm, 24 cm, 7 cm
c. 25 cm, 19 cm, 7 cm
d. 25 cm, 19 cm, 9 cm

6. Faktor selengkapnya dari $16x^2 – 9(x – y)^2$ adalah

a. $7x^2 + 18xy + 9y^2$
b. $7x^2 - 18xy - 9y^2$
c. $7x^2 - 18xy + 9y^2$
d. $7x^2 + 18xy - 9y^2$

7. Faktorisasi dari $a^2 – 3a – 10$ adalah

a. (a - 2)(a + 5)
b. (a + 2)(a + 5)
c. (a + 2)(a - 5)
d. (a - 2)(a - 5)

8. Faktorisasi dari $2x^2 – 9x – 18$ adalah

a. (2x + 3)(x + 6)
b. (2x - 3)(x + 6)
c. (2x + 3)(x - 6)
d. (2x - 3)(x - 6)

9. Bentuk sederhana dari $\frac{3a - ax}{cx - 3c}$ untuk $x \neq 3$

a. $\frac{c}{a}$
b. $\frac{a}{c}$
c. $\frac{-c}{a}$
d. $\frac{-a}{c}$

10. Bentuk sederhana dari pengurangan $\frac{4}{(x+y)} + \frac{5}{(x-y)}$

a. $\frac{x+y}{(x+y)(x-y)}$

b. $\frac{-x-y}{(x+y)(x-y)}$

c. $\frac{9x+y}{(x+y)(x-y)}$

d. $\frac{-9x-y}{(x+y)(x-y)}$

KUNCI JAWABAN TES FORMATIF

1. C y + 4 kurang dari 14

$\Leftrightarrow y + 4 < 14$

$\Leftrightarrow y < 10$ Karena $y \in B = \{4, 7, 10, 13\}$, maka HP = { 4, 7)

2. A $(-2u - 3v + 4w) + (-4w - 5v - 2u) = -2u - 3v + 4w - 4w - 5v - 2u$

$= -4u - 8v$

$= -4(u + 2v)$

3. D $(b - 4)(b - 3) = b(b - 3) - 4(b - 3)$

$= b^2 - 3b - 4b + 12$

$= b^2 - 7b + 12$

4. A Dengan memperhatikan Gambar. 4 dan dari yang diketahui, maka: luas daerah persegipanjang = luas daerah bujursangkar

$(x - 3)(x + 5) = x \times x$

$\Leftrightarrow x^2 + 5x - 3x - 15 = x^2$

$\Leftrightarrow 2x = 15$

$\Leftrightarrow x = 7{,}5$

Jadi ukuran sisi persegipanjang adalah (7,5 – 3) m= 4,5 m dan (7,5 + 5) m = 12,5 m sedangkan sisi bujursangkar adalah 7,5.

5. B Dengan memperhatikan yang diketahui dan Gambar. 5 dalam soal di atas, maka menurut Teorema Pythagoras:

$(5x + 5)^2 = (4x + 8)^2 + (3x – 5)^2$

$\Leftrightarrow 25x^2 + 50\,x + 25 = 16x^2 + 64x + 64 + 9x^2 -30x + 25$

$\Leftrightarrow 16x = 64$

$\Leftrightarrow x = 4$

Jadi, ukuran sisi segitiga siku-siku tersebut adalah

(5x + 5) cm = 25 cm, (4x + 8) cm = 24 cm, dan (3x – 5) cm = 7 cm.

6. D $16x^2 – 9(x- 9)^2 = 16x^2 – 9(x^2 – 2xy + y^2)$

$= 16x^2 – 9x^2 + 18xy - y^2$

$= 7x^2 + 18xy – 9y^2$

7. C $a^2 – 3 -10$

Karena didapat dua bilangan yang hasil kalinya -10 dan jumlahnya -38. Bilangan-bilangan itu adalah 2 dan -5, sebab 2 (-5) = -10 dan 2 + (-5) = -3, sehingga $a^2 – 3a – 10 = (a + 2)(a – 5)$

8. C

Perkalian dalam

$2x^2 – 9x - 18 = (4x \ldots\ )\ (x \ldots.)$

Perkalian luar

9. D $\frac{3a - ax}{cx - 3c} = \frac{a(3 - x)}{-c(3 - x)} = \frac{a}{-c} = -\frac{a}{c}$

10. C $\frac{4}{x + y} + \frac{5}{x - y} = \frac{4(x - y)}{(x + y)(x - y)} + \frac{5(x + y)}{(x + y) + (x - y)}$

$= \frac{4x - 4y + 5x + 5y}{(x + y) + (x - y)}$

$= \frac{9x + y}{(x + y) + (x - y)}$

Daftar Pustaka

Abdul Kodir, M, dkk. (1979). *Matematika untuk SMP Jilid 3*. Jakarta: Depdikbud.

Abdul Kodir, M, dkk. (1979). *Matematika untuk SMP Jilid 5*. Jakarta: Depdikbud.

Abdul Kodir, M, dkk. (1979). *Matematika* 8^s *untuk SMA*. Jakarta: Depdikbud.

Abdul Kodir, M, dkk. (1981). *Matematika 8B untuk SMA*. Jakarta: Depdikbud.

Abdul Kodir, M, dkk. (1978). *Pengantar Matematika Jilid 1*. Jakarta: Depdikbud.

Depdiknas. (2002). *Contextual Teaching and Learning* (CTL). Jakarta: Direktorat Jenderal Pendidikan Dasar Menengah.

Karso. (2007). *Materi Kurikulum Matematika SMA (Aljabar 4)*. Jakarta: Pusat Penerbitan Universitas Terbuka Depdiknas

Pandoyo dan Djoko Musono. (1993). *Matematika untuk 1a untuk Sekolah Lanjutan Tingkat Pertama Kelas 1*. Jakarta: Depdikbud.

Stephen, W. J. dan Gallagher, S. A. (2003). *Problem Based Learning*. [online]. Tersedia http://www. Score rims h. 12 Ca.vs/ problem html.