BARISAN DAN DERET

(Pembelajaran Matematika SMA)

Oleh: H. Karso

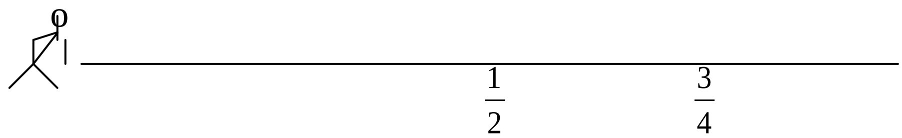
FPMIPA UPI

A. Barisan dan Deret

1. Pengantar

Masalah barisan sebenarnya sudah sejak zaman Yunani kuno muncul sebagai salah satu masalah yang menarik perhatian. Sejak 2400 tahun yang lalu konsep barisan yang kita kenal dalam matematika mulai banyak dibicarakan orang, yaitu sejak seorang ahli filsafat Yunani yang bernama Zeno mengemukakan suatu krisis dalam matematika. Krisis matematika itu dikenal sebagai paradoks Zeno, yaitu sebagai berikut:

”Seorang pelari yang harus menempuh suatu jarak tertentu dengan cara melampaui setengah dari setiap jarak yang ditempuh, sebagai akibatnya pelari ini tidak akan sampai pada ujung dari jarak yang akan ditempuhnya”.



Permasalahan paradoks Zeno baru dapat diatasi dengan diketemukannya masalah barisan, terutama barisan tak hingga.

Sselain masalah barisan ada pula cerita yang berkaitan dengan konsep deret dalam matematika. Ada suatu cerita tentang seorang hamba yang meminta kepada rajanya untuk diberi beras dengan cara meletakkan 1 butir beras pada kotak pertama sebuah papan carur. Kemudian meletakkan 2 butir pada kotak kedua, 4 butir pada kotak ketiga, dan seterusnya, sehingga setiap kotak selanjutnya harus diisi dengan beras sebanyak kuadrat dari jumlah beras yang ada pada kotak sebelumnya. Ternyata beras seluruh negeri tidak cukup untuk memenuhi permintaan hamba ini.

Uraian di atas, pada dasarnya merupakan salah satu ...... barisan dan deret yang kita kenal dalam matematika. Konsep barisan dan deret akan selalu terkait dengan bilangan-bilangan dan aturan-aturan tertentu yang menghubungkan bilangan-bilangan tersebut.

2. Barisan

Tentunya dalam kesempatan lain kita telah menjumpai sebarisan bilangan, dan biasanya kita diminta untuk dapat menentukan suku-suku berikutnya. Persoalan semacam ini kita jumpai ketika kita mengikuti tes psikologi, test intelegency quetion (IQ), tes kemampuan umum (TKU), tes potensi akademik (TPA), atau tes-tes psikologi untuk bidang-bidang keahlian tertentu, yaitu pada bagian tes seri (Tes Barisan dan Deret).

Sebagai contoh dalam TKU, yaitu tes untuk para siswa SMA yang ingin meneruskan ke perguruan tinggi diminta untuk menentukan dua suku berikutnya yang mungkin dari setiap barisan di bawah ini, dan memberikan suatu aturan yang dapat dipakai untuk menyusun barisan itu.

(a) 1, 3, 5, 7, ...

(b) 500, 400, 320, 256, ...

(c) 1, 2, 6, 24, 120, ...

(d) 2, 5, 10, 17, ...

(e) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$

Barisan-barisan semacam itu serimgkali muncul dalam kehidupan sehari-hari. Anda mungkin pernah menjumpai sebagian dari barisan seperti (a). Misalnya ketika mencari rumah yang bernomor 11 mungkin Anda menerka bahwa rumah yang dicari itu ada pada sisi lain dari jalan tersebut. Barisan yang (b) memberikan gambaranhanya suatu speda motor dalam puluhan ribu rupiah yang disusutkan 20% per tahun.

Barisan semacam ini sering pula muncul dalam permasalahan matematika. Pada hakekatnya unsur-unsur (u) atau suku-suku (s) barisan adalah nilai-nilai dari suatu fungsi u (fungsi s) yang daerah asalnya (*domain* f-nya) adalah himpunan bilangan asli A = { 1, 2, 3, ...}. Dalam hal ini kita mempunyai pemetaan (fungsi) dari himpunan A = { 1, 2, 3, ...} ke himpunan unsur-unsur pada barisan. Aturan yang menghubungkan daerah asal (domain f) ke daerah hasil (range f) merupakan suatu rumus untuk barisan tersebut.

Untuk fungsi u yang berkaitan dengan barisan (a) yaitu rumus yang mungkin adalah u(n) = 2n – 1. Rumus atau aturan fungsi ini menghasilkan suku ke-n dari barisan tersebut. Rumus tersebut biasanya adalah $u_n = 2n - 1$ dengan $n \in A = \{1, 2, 3, ...\}$.

Barisan bilangan (a) 1, 3, 5, 7, ... mempunyai suku (urutan) pertama $u_1 = 1$, suku kedua $u_2 = 3$, suku ketiga $u_3 = 5$, dan seterusnya sampai pada suku ke-n $u_n = 2n - 1$. Dari contoh ini terlihat adanya korespondensi satu-satu antara bilangan asli n ke suku ke-n atau u_n dari barisan tersebut.

1 ,	2 ,	3 , . . .	n
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
$u_1 = (2 \text{ x } 1) - 1$	$u_2 = (2 \text{ x } 2) - 1$	$u_3 = (2 \text{ x } 3) - 1$	$u_n = 2n - 1$
$= 1$	$= 3$	$= 5$	

Dari penjelasan di atas, jelaslah bahwa barisan dapat disebut pula sebagai fungsi dari bilangan asli. Dalam hal ini ada bererapa cara untuk menyatakan suatu barisan, yaitu:

(1) $\{u_1, u_2, u_3, ..., u_n\}$ atau

$\{s_1, s_2, s_3, ..., s_n\}$ dengan n bilangan asli.

(2) $\{u_n\}$ dengan $n \in A = \{1, 2, 3, ...\}$.

(3) $f : n \to u_n$ dengan n $A = \{1, 2, 3, ...\}$.

Contoh 34

Carilah rumus untuk suku ke-n dari barisan yang empat suku pertamanya adalah

(a) 1, 4, 7, 10, ...

(b) 3, 9, 27, 81, ...

(c) -2, 2, -2, 2, ...

Penyelesaian:

(a) Selisih dua suku yang berurutan ialah 3, maka $u_n = 3n - 3$.

(b) Perpangkatan dari 3, sehingga $u_n = 3^n$.

(c) $(-1)^1 = -1$, $(-1)^2 = 1$, dan seterusnya, sehingga $u_n = 2 \times (-1)^n$.

B. Barisan Aritmetika dan Deret Aritmetika

1. Barisan Aritmetika

Sekarang marilah kita perhatikan kembali beberapa contoh barisan bilangan berikut ini.

Contoh 35

(a) 1, 3, 5, 7, …

(b) 2, 6, 10, 14, …

(c) 100, 90, 80, 70, …

Jika kita perhatikan contoh (a), suku yang pertamanya $u_1 = 1$, suku yang kedua u_2 diperoleh dengan menambahkan 2 kepada u_1, suku yang ketiga u_3 diperoleh dengan menambahkan 2 kepada u_2, demikian seterusnya. Jadiselisih dari tiap suku yang berurutan dari barisan ini adalah tetap, yaitu sebesar 2. Barisan seperti ini dinamakan **barisan aritmetika** dan selisih yang tetap dari barisan itu disebut **beda barisan**.

Contoh-contoh (a), (b), dan (c) dari contoh 35 di atas adalah contoh-contoh dari barisan aritmatika.

$$u_1, u_2, u_3, ..., u_n$$

ialah **barisan aritmetika** , jika berlaku

$$u_2 – u_1, = u_3, ..., u_2 = ... = u_n – u_{n-1} = \text{konstanta}.$$

Konstanta ini disebut **beda**, dan besarnya dinyatakan dengan b.

(a) 1, 3, 5, 7, … bedanya ialah 3 – 1 = 5 – 3 = … = 2

(b) 2, 6, 10, 14, … bedanya ialah 6 – 2 = 10 – 6 = 14 – 10 = 4

(c) 100, 90, 80, 70, … bedanya ialah 90 – 100 = 80 – 90 = … = - 10

Jadi, dari sajian diskusi di atas jelaslah, bahwa suatu barisan dinamakan barisan aritmetika jika dan hanya jika selisih dua suku yang berurutan selalu tetap (definisi).

Sekarang kita akan mencari rumus umum suku ke-n dari barisan aritmetika, yaitu sbb:

Jika suku pertama barisan aritmetika u_1 dinamakan a, maka didapat

$u_1 = a$

$u_2 - u_1 = b \Leftrightarrow u_2 = u_1 + b = a + b$

$u_3 – u_2 = b \Leftrightarrow u_3 = u_2 + b = (a + b) + b = a + 2b$

$u_4 – u_3 = b \Leftrightarrow u_4 = u_3 + b = (a + 2b) + b = a + 3b$

dan seterusnya, sehingga didapat barisan aritmetika dalam bentuk:

$a , a + b , a + 2b , a + 3b , \ldots, a (n – 1)b$

Dari sini kita dapatkan **bentuk umum rumus suku ke-n** barisan aritmetika, yaitu: $u_n = a + (n – 1)b$

Contoh 36

Carilah suku ke-100 dari barisan aritmetika 2, 5, 8, 11, …

Penyelesaian:

Di sini: $a = 2$

$b = u_2 – u_1 = 5 – 2 = 3$

$n = 100$

$u_n = a + (n – 1)b$

$\Leftrightarrow u_n = 2 + (100 – 1)3 = 2 + (99 \text{ x } 3) = 299$

Contoh 37

Diketahui barisan aritmetika 1, 3, 5, 7, …. $u_n = 225$. Tentukan banyaknya suku (n).

Penyelesaian:

$a = 1, b = 2, u_n = 225$

$u_n = a (n – 1)b$

$\Leftrightarrow 225 = 1 + (n – 1)2 = 1 + 2n - 2$

$\Leftrightarrow 226 = 2n$

$\Leftrightarrow n = 113$

Jadi banyaknya suku ada 113.

Contoh 38

Si Dadap berhasil lulus ujian saringan masuk PT (Perguruan Tinggi). Sebagai mahasiswa, mulai 1 Januari 2008 ia menerima uang saku sebesar Rp. 500.000,00 untuk satu triwulan. Uang saku ini diberikan setiap permulaan triwulan. Untuk setiap triwulan berikutnya uang saku yang diterimanya dinaikkan sebesar Rp. 25.000. Berapa besar uang saku yang akan diterima si Dadap pada awal tahun 2011?

Penyelesaian:

Triwulan ke-1: $u_1 = a =$ Rp. 500.000,00

Triwulan ke-2: $u_2 = a + b =$ Rp. 525.000,00, dst

Jadi b = 25.000.

Pada awal tahun 2011 telah dipakai kuliah selama 3 tahun atau 12 triwulan, berarti:

$u_{12} = a + (12 – 1)b$

$= 500.000 + (11 \text{ x } 25.000)$

$= 775.000$

Jadi besarnya uang yang akan diterima si Dadap pada awal tahun 2011 adalah Rp. 775.000,00.

2. Deret Aritmetika

Diceritakan tentang seorang matematikawan besar (Prince of Mathematics) Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855), bahwa dalam masa kecilnya di sekolah dasar guru minta para peserta didiknya menjumlahkan seratus bilangan besar yang merupakan suku-suku berurutan dalam barisan aritmetika, dan guru itu mengharapkan supaya suasana kelas tenang. Gauss memberi jawaban hanya dalam beberapa detik. Di sini kita pakai cara yang sama untuk mendapatkan jumlah 100 bilangan asli yang pertama, yaitu sbb:

$J_{100} = S_{100} = \quad 1 + \quad 2 + \ldots + 99 + 100$

$J_{100} = S_{100} = 100 + 99 + \ldots + \quad 2 + \quad 1 \qquad +$

$2J_{100} = 101 + 102 + \ldots + 101 + 101 = 100 \text{ x } 101$

$J_{100} = 5050$

Bentuk 1 + 2 + 3 + … + 100 adalah suatu contoh deret aritmetika. Jumlah deret aritmetika ini adalah 5050.

Jika kita perhatikan ternyata, bahwa **deret aritmetika** adalah julah suku-suku barisan aritmetika (definisi). Jika barisan aritmetikanya dinyatakan dalam bentuk:

$$a\ ,\ a + b\ ,\ a + 2b\ ,\ \dots\ ,\ a + (n - 1)b$$

maka deret aritmetikanya adalah:

$$a + (a + b) + (a + 2b) + \dots + [a + (n - 1)b]$$

dan dinotasikan dengan J_n (jumlah n buah suku pertama barisan aritmetika) atau S_n (sum).

Bagaimanakah rumus umum jumlah n suku dari deret aritmetika? Jika J_n (S_n) adalah notasi untuk menyatakan jumlah n suku pertama suatu deret aritmetika, maka

$$\begin{array}{l} J_n = a + (a + b) + (a + 2b) + \dots + [a + (n - 1)b] \\ J_n = [a + (n - 1)b] + [a + (n - 2)b] + [a + (n - 3)b] + \dots + n \quad + \\ \hline 2J_n = [2a + (n - 1)b] + [2a + (n - 1)b] + [2a + (n - 1)b] + \dots + [2a + (n - 1)b] \end{array}$$

$$2J_n = n\,[2a + (n - 1)b]$$

$$J_n = \frac{1}{2} n\,[2a + (n - 1)b]$$

Karena $U_n = a + (n - 1)b$, maka

$$J_n = \frac{1}{2} n\,[a + U_n]$$

Jadi jumlah n suku deret aritmetika adalah

$$J_n = \frac{1}{2} n\,[2a + (n - 1)b]$$

atau $J_n = \frac{1}{2} n\,[a + U_n]$

Sebagai tambahan, pandang deret aritmetika berikut ini.

$$\begin{array}{l} J_n = a + (a + b) + (a + 2b) + \dots + [a + (n - 2)b] + [a + (n - 1)b] \\ J_{n-1} = a + (a + b) + (a + 2b) + \dots + [a + (n - 2)b] \quad - \\ \hline J_n - J_{n-1} = a + (n - 1)b = U_n \end{array}$$

Jadi suku ke-n (urutan ke-n): $U_n = J_n - J_{n-1}$.

Ingat bahwa barisan aritmetika

$$a, a + b, a + 2b, \ldots, a + (n-1)b$$

dapat juga ditulis dalam bentuk:

$$u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n.$$

Contoh 39

Carilah jumlah 25 suku yang pertama dari deret aritmetika

44 + 40 + 36 + 32 + ….

Penyelesaian:

Di sini a = 44, b = 40 – 44 = -4 dan n = 25

$$J_n = \frac{1}{2} n [2a + (n-1)b]$$

$$\Leftrightarrow J_{25} = \frac{1}{2} \text{ x } 25 [2 \text{ x } 44 + (25-1)(-4)]$$

$$\Leftrightarrow \quad = \frac{1}{2} \text{ x } 25 [88 + 24(-4)]$$

$$\Leftrightarrow \quad = -100$$

Contoh 40

Carilah jumlah semua bilangan asli antara 1 dan 100 yang habis dibagi 3.

Penyelesaian:

Di sini a = 3, b = 3 dan $U_n = 99$

Terlebih dulu dicari nilai n

$$U_n = a + (n-1)b$$

$$\Leftrightarrow 99 = 3 + (n-1)\, 3$$

$$\Leftrightarrow n = 33$$

$$J_n = \frac{1}{2} n (a + U_n)$$

$= \frac{1}{2}$ x 33 (3 + 99)

= 1683.

Contoh 41

Dari soal contoh 38 di atas, berapa lamakah si Dadap menyelesaikan kuliahnya apabila selama ia kuliah telah menerima uang saku sebesar Rp. 23.450.000,00?

Penyelesaian:

Uang yang diterima si Dadap selama kuliah Rp. 23.450.000,00 merupakan jumlah deret uang masing-masing triwulan.

$J_n = \frac{1}{2} n\,[2a + (n - 1)b]$

$\Leftrightarrow 23.450.000 = \frac{1}{2} n\,[2 \times 500.000 + (n - 1)\,25.000]$

$\Leftrightarrow 23.450.000 = 500.000\,n + 12.500\,n^2 - 12.500\,n$

$\Leftrightarrow n^2 + 39\,n - 1876 = 0$

$\Leftrightarrow (n - 28)(n + 67) = 0$

n = 28 triwulan atau 7 tahun

Jadi, si dadap menyelesaikan kuliahnya selama 7 tahun.

C. Barisan Geometri dan Deret Geometri

1. Barisan Geometri

Sekarang marilah kita perhatikan beberapa barisan dalam contoh berikut ini.

Contoh 42

(a) 1, 2, 4, 8, …

(b) 27, -9, 3, -1, …

(c) -1, 1, -1, 1, …

Untuk contoh (a) ternyata tiap suku-sukunya diperoleh dengan cara mengalikan suku sebelumnya oleh 2. Ternyata pula bahwa hasil bagi tiap suku dengan suku sebelumnya selalu tetap, yaitu sama dengan 2. Bagaimana dengan contoh (b) dan contoh (c)? Barisan-barisan seperti contoh 42 ini disebut barisan geometri.

$$U_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$$

Dinamakan barisan geometri, apabila

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} = \cdots = \frac{u_n}{u_{n-1}} = \text{konstanta.}$$

Konstanta ini dinamakan **rasio**, pembanding, nisbah atau pembagi dan dinyatakan dengan huruf r atau p.

(a) Untuk 1, 2, 4, 8, … rasionya ialah $\frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{8}{4} = \cdots = 2$

(b) Untuk 27, -9, 3, -1, … rasionya $\frac{-4}{27} = \frac{3}{-9} = \frac{-1}{3} = \cdots = -\frac{1}{3}$

(c) Untuk -1, 1, -1, 1, … rasionya $\frac{1}{-1} = \frac{-1}{1} = \frac{1}{-1} = \cdots = -1$

Dari penjelasan di atas, dapatlah kita simpulkan, bahwa suatu barisan dinamakan **barisan geometri** jika dan hanya jika hasil bagi tiap suku dengan suku sebelumnya selalu tetap (definisi). Hasi bagi yang tetap ini disebut rasio dan disingkat dengan r.

Bagaimanakah bentuk umum suku ke-n dari barisan geometri? Misal suku pertama dari barisan geometri, yaitu u_1 dinyatakan dengan a, maka kita dapatkan:

$\frac{u_2}{u_1} = r \Leftrightarrow u_2 = u_1 r = ar,$

$\frac{u_3}{u_2} = a \Leftrightarrow u_3 = u_2 r = ar \, . \, r = ar^2,$

$\frac{u_4}{u_3} = a \Leftrightarrow u_4 = u_3 r = ar^2 \, . \, r = ar^3,$

dan seterusnya, sehingga didapat barisan geometri dalam bentuk baku (standar), yaitu:

$$a, ar, ar^2, ar^3, \ldots, ar^{n-1}.$$

Perhatikan bahwa urutan ke-n merupakan **bentuk umum rumus suku ke-n barisan geometri**, yaitu

$$U_n = ar^{n-1}.$$

Contoh 43

Diketahui barisan geometri dengan u_1 = 64 dan u_4 = 1. Carilah rasionya dan tentukan lima suku pertama dari barisan tersebut.

Penyelesaian:

Di sini a = u_1 = 64,

Dan $u_n = ar^{n-1}$

$\Leftrightarrow u_4 = 64\ r^3$

$\Leftrightarrow 1 = 64\ r^3$

$\Leftrightarrow r^3 = \frac{1}{64}$

Jadi, $r = \frac{1}{4}$

Lima suku yang pertamanya adalah 64, 16, 4, 1, $\frac{1}{4}$.

Contoh 44

Banyaknya penduduk kota Bandung pada tahun 2007 ada 3,2 juta orang. Setiap 10 tahun penduduk kota Bandung bertambah dua kali lipat dari jumlah semula. Berapakah banyaknya penduduk kota Bandung pada tahun 1947?

Penyelesaian:

Karena penduduk kota bandung tiap 10 tahun bukanlah dua kali lipat dari jumlah semula, berarti r = 2. Dari tahun 1947 ke tahun 2007 = 60 tahun, ini sama dengan n $= \frac{60 tahun}{10 tahun} = 6$.

Pend pada tahun 2007 = 3,2 juta orang; sehingga

U_6 = 3,2 juta = $32 \cdot 10^5$.

$U_n = a\ r^{n-1}$

$\Leftrightarrow 32 \cdot 10^3 = a \cdot 2^{6-1}$

$\Leftrightarrow 2^5 \cdot 10^5 = a \cdot 2^5$

$\Leftrightarrow a = 10^5$

Jadi penduduk kota Bandung pada tahun 1947 = 100.000 orang.

2. Deret Geometri

Seperti halnya deret aritmetika, bahwa suatu deret geometri adalah jumlah suku-suku dari suatu barisan geometri (definisi). Jika barisan geometrinya dinyatakan dalam bentuk baku, yaitu

$$a, ar, ar^2, ar^3, \ldots, ar^{n-1}$$

Maka deret geometrinya adalah

$$a + ar + ar^2, ar^3 + \ldots + ar^{n-1}$$

Misalkan J_n (S_n) adalah notasi yang kita pakai untuk menyatakan **jumlah n suku pertama suatu barisan geometri**, maka

$$\begin{array}{rl} J_n = & a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1} \\ r\,J_n = & \quad\;\, ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1} + ar^n \quad - \\ \hline (1-r)\,J_n = & a - ar^n \end{array}$$

$$\Leftrightarrow J_n = \frac{a - ar^n}{1-r}$$

$$\Leftrightarrow J_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \text{ , } (r \neq 1)$$

$$\Leftrightarrow J_n = \frac{a(r^n - 1)}{r-1} \text{ , berlaku jika } r > 1.$$

Bentuk terakhir ini sering pula disebut **rumus untuk jumlah n suku pertama deret geometri**.

Contoh 45

Carilah jumlah tujuh buah suku dari deret geometri

$$4 + 2 + 1 + 0{,}5 + \ldots$$

Penyelesaian:

Di sini, $a = 4$, $r = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ dan $n = 7$

$$J_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

$$\Leftrightarrow J_7 = \frac{4(1 - \frac{1}{2}^7)}{1 - \frac{1}{2}}$$

$\Leftrightarrow J_7 = 7{,}94$ (dibulatkan sampai 3 angka signifikan)

Contoh 46

Seutas tali dibagi menjadi 6 bagian dengan ukuran panjang membentuk deret geometri; jika bagian yang paling pendek 3 cm dan yang terpanjang 96 cm, tentukanlah ukuran panjang tali tersebut.

Penyelesaian:

Di sini, $U_n = 96$, $a = 3$ dan $n = 6$

Sehingga kita dapatkan

$U_n = ar^{n-1}$

$\Leftrightarrow 96 = 3r^5$

$\Leftrightarrow r^5 = 32$

$\Leftrightarrow r = 2$

Karena $r > 1$, maka berlaku

$$J_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

$$\Leftrightarrow J_6 = \frac{3(2^6 - 1)}{2 - 1}$$

$$\Leftrightarrow J_6 = \frac{3(64 - 1)}{1}$$

$\Leftrightarrow J_6 = 189$

Jadi ukuran panjang tali tersebut adalah 189 cm.

3. Deret Geometri Tak Hingga

Deret geometri tak hingga adalah salah satu bentuk istimewa dari deret geometri yang baru saja kita diskusikan. Keistimewaannya terletak pada banyak unsur-unsurnya yaitu banyaknya tak terhingga. Karenanya didefinisikan bahwa deret geometri tak hingga adalah suatu deret geometri yang banyak unsur-unsur atau suku-sukunya tak hingga. Sebagai akibatnya tentu saja rumus umum jumlah n suku barisan geometri tak hingga berbeda dengan rumus umum jumlah n suku deret geometri. Adapun bentuk umum deret geometri tak hingga dapat ditulis dalam bentuk berikut (akibat dari bentuk baku deret geometri)

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots$$

Sekarang kita akan menentukan rumus umum jumlah n suku geometri tak hingga tersebut. Sebelumnya kita perhatikan kembali rumus umum jumlah n suku deret geometri

$$J_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

Jika $n \to \sim$, maka

$$J_{\sim} = \lim_{n\to\infty} J_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

$$\Leftrightarrow J_{\sim} = \lim_{n\to\infty} J_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{1-r} - \lim_{n\to\infty} \frac{r^n}{1-r}$$

(i) Untuk $|r| < 1$ atau -1 , r < 1, maka $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$.

Jadi, $J_{\sim} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{1-r} - 0 = \frac{a}{1-r}$ (konvergen)

(ii) Untuk $|r| > 1$, maka $\lim_{n\to\infty} r^n = \sim$

Jadi, $J_{\sim} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{1-r} - \sim = \sim$ (divergen)

Jadi, rumus umum jumlah n suku deret geometri adalah

$$J_n = \frac{a}{1-r} \quad \text{untuk } |r| < 1 \text{ atau } -1 < r < 1.$$

Contoh 47

Hitunglah jumlah sampai tak hingga dari deret geometri 4 – 2 + 1 - …

Penyelesaian:

Dari deret geometri yang diketahui, tampak bahwa

$a = 4$ dan $r = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$, sehingga kita dapatkan

$$J_{\sim} = \frac{a}{1-r}$$

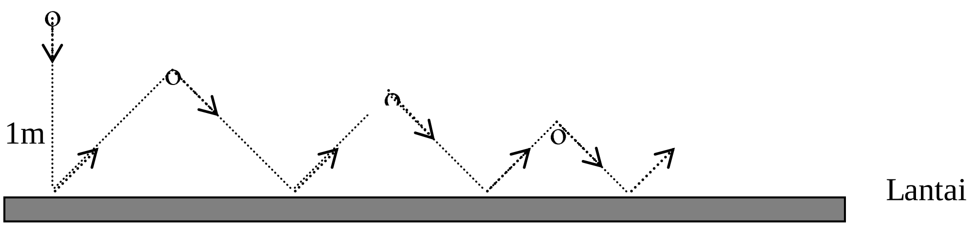
$$\Leftrightarrow J_{\sim} = \frac{4}{1-(-\frac{1}{2})}$$

$$\Leftrightarrow J_{\sim} = \frac{8}{3}.$$

Contoh 48

Sebuah bola dijatuhkan dari ketinggian 1 meter. Setiap kali sesudah jatuh mengenai lantai, bola itu dipantulkan lagi dan mencapai ketinggian $\frac{3}{4}$ dari tinggi sebelumnya. Tentukan panjang seluruh jalan yang dilalui bola itu sampai berhenti.

Penyelesaian:



$$J_1 = 1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \cdots = \frac{1}{1-\frac{3}{4}} = 4$$

$$J_2 = \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \cdots = \frac{1}{1-\frac{3}{4}} = 3$$

$J = J_1 + J_2 = 4 + 3 = 7$

Jadi, panjang seluruh jalan yang dilalui bola itu sampai berhenti adalah 7 meter.

D. Notasi Sigma

Salah satu karakteristik matematika ialah penggunaan lambing. Dengan menggunakan lambing atau symbol dapat menyederhanakan atau meringankan suatu ungkapan yang panjang. Karena itulah matematika sering pula disebut sebagai bahasa symbol yang padat arti. Khusus dalam kesempatan sekarang ini kita akan berkenalan dengan salah satu symbol matematika yang dinamakan **sigma** (notasi sigma) yang akan digunakan untuk mencatat suatu penjumlahan berurutan. Penggunaan notasi sigma ini erat sekali kaitannya dengan bahasa yang baru saja kita diskusikan, yaitu barisan dan deret.

Sekarang perhatikan sebuah contoh deret aritmetik berikut ini.

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Jumlah tersebut dapat pula ditulis dalam bentuk berikut:

$$[2(1) - 1] + [2(2) - 1] + [2\,(3) - 1] + [2(4) - 1] - [2(5) - 1] + [2(6) - 1] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Tiap suku dalam jumlah bentuk (2) dapat pula ditulis dalam bentuk:

$$2n - 1$$

yaitu dengan mensubstitusikan n berturut-turut oleh 1, 2, 3, 4, 5 dan 6.

Suatu cara untuk menulis bentuk (2) dengan singkat yaitu dengan menggunakan lambing Σ (sigma) dan dinamakan “notasi sigma”, yaitu huruf besar Yunani untuk S yang berarti “sum” atau jumlah. Dengan menggunakan notasi sigma ini bentuk (2) secara singkat dapat ditulis sbb:

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = \sum_{n=1}^{6} (2n - 1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Ruas kanan persamaan (3) dibaca “jumlah 2n – 2 untuk n = 1 sampai dengan 6”. Bilangan 1 disebut **batas bawah** dan bilangan 6 disebut **batas atas**, sedangkan himpunan {1, 2, 3, 4, 5, 6} disebut **daerah penjumlahan**.

Secara umum, dengan cara yang sama, maka

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i .$$

Dalam notasi ini batas bawah penjumlahan dan batas atas penjumlahan masing-masing adalah 1 dan n.

Contoh 49

Nyatakan dalam bentuk lengkap jumlah $\sum_{n=1}^{6} (n + 1)$

Penyelesaian:

$\sum_{n=1}^{6}(n+1)$ = (1 + 1) + (2 + 1) + (3 + 1 (4 + 1) + (5 + 1) + (6 + 1)

= 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7

Contoh 50

Hitunglah $\sum_{n=1}^{5} 2^n$

Penyelesaian:

$\sum_{n=1}^{5} 2^n = 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5$

$= 2 + 4 + 8 + 16 + 32$

$= 62$

Contoh 51

Buktikan bahwa $\sum_{k=1}^{n} 3k^2 = 3 \sum_{k=1}^{n} k^2$

Bukti:

$\sum_{k=1}^{n} 3k^2 = 3(1^2) + 3(2^2) + 3(3^2) + \ldots + 3(n^2)$

$= 3\ (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2)$

$= 3 \sum_{k=1}^{n} k^2$

Perlu diketahui pula bahwa ada beberapa hokum yang berlaku pada notasi sigma yang dikenal dengan **sifat-sifat notasi sigma**, diantaranya:

1. $\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$
2. $\sum_{i=1}^{n} k\ a_i = k \sum_{i=1}^{n} a_i$, k = konstan
3. $\sum_{i=1}^{n} k = nk$, k = konstan

4. $\sum_{i=m}^{n} a_i = k \sum_{i=m+p}^{n+p} a_{i} - p$

5. $\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{m-1} a_i$

6. $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i \ b_j = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_i b_j$

Pembuktian dari sifat-sifat notasi sigma tersebut diberikan kepada para pembaca untuk didiskusikan sebagai latihan. Di sini hanya akan dibuktikan beberapa sifat saja.

1. $\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$

Bukti:

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \underbrace{(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) + \ldots + (a_n + b_n}_{\text{n suku}}$$

$$= \underbrace{(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n)}_{\text{n suku}} + \underbrace{(b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n)}_{\text{n suku}}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

2. $\sum_{i=1}^{n} k = nk$, k = konstan

Bukti:

$$\sum_{i=1}^{n} k = \underbrace{k + k + k + \ldots + k}_{\text{n suku}}$$

$$= n \, . \, k$$

Contoh 52

Dengan menggunakan sifat-sifat notasi, hitunglah jumlah berikut dalam bentuk lengkap.

a) $\sum_{k=1}^{5}(50 - 6k)$

b) $\sum_{k=1}^{5}(k-4)(k+2)$

Penyelesaian:

a) $\sum_{k=1}^{5}(50-6k) = \sum_{k=1}^{5}50 - 6\sum_{k=1}^{5}k$

$= 5 \,.\, 50 - 6\ (1 + 2 + 3 + 4 = 5)$

$= 250 - 90$

$= 160$

b) $\sum_{k=1}^{5}(k-4)(k+2) = \sum_{k=1}^{5}(k^2 - 2k - 8)$

$= \sum_{k=1}^{5}k^2 - 2\sum_{k=1}^{5}k - \sum_{k=1}^{5}8$

$= (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2) - 2(1 + 2 + 3 + 4 + 5) - 5 \,.\, 8$

$= 55 - 30 - 40$

$= -15$

Contoh 53

Buktikanlah bahwa

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-7)^2 = 4\sum_{k=1}^{n}k^2 - 28\sum_{k=1}^{n}k + 49\,n$$

Bukti:

$\sum_{k=1}^{n}(2k-7)^2 = \sum_{k=1}^{n}(4k^2 - 28k + 49)$

$= \sum_{k=1}^{n}4k^2 - \sum_{k=1}^{n}28k + \sum_{k=1}^{n}49$

$= 4\sum_{k=1}^{n}k^2 - 28\sum_{k=1}^{n}k + 49\,n$

E. Induksi Matematika

Induksi matematika adalah salah satu metode pembuktian yang formal dalam matematika. Metode induksi matematika banyak digunakan untuk membuktikan kebenaran teorema-teorema yang berlaku untuk semua bilangan bulat atau lebih khusus lagi untuk setiap bilangan asli.

Matematikawan Perancis Blaise Pascal (1623 – 1662) adalah orang yang pertama kali menemukan cara pembuktian secara ringkas. Pembuktian penemuan Pascal ini kemudian dinamakan **induksi lengkap** oleh matematikawan Inggris Augustus de Morgan (1806 – 18….). Metode pembuktian induksi lengkap ini dinamakan pula **induksi matematika**. Perkataan induksi diartikan sebagai suatu rumus umum yang ditemukan dari beberapa hal yang khusus.

Sekarang kita perhatikan kesamaan-kesamaan berikut ini.

$$\begin{aligned} 1 &= 1^2 \\ 1 + 3 &= 2^2 \\ 1 + 3 + 5 &= 3^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1) \\ 1 + 3 + 5 + 7 &= 4^2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Dari contoh-contoh inidiharapkan sampai pada bentuk umum, yaitu didapatkan kesamaan:

$$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1) = n^2, \text{ n asli} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Kesamaan ini selalu benar untuk setiap bilangan asli n.

Jika $n = 1 \rightarrow (2 . 1 - 1) = 1^2$ benar.

Jika $n = 2 \rightarrow 1 + (2 . 2 - 1) = 2^2$ benar.

Jika $n = 3 \rightarrow 1 + 3 + (2 . 3 - 1) = 3^2$ benar.

Jika $n = 4 \rightarrow 1 + 3 + 5 + (2 . 4 - 1) = 4^2$ benar, dan seterusnya.

Langkah pembuktian seperti di atas, yaitu dari bentuk (1) sampai pada bentuk (2) belumlah cukup. Dalam hal ini diperlukan bukti formal bagi rumus kesamaan umum (2) yang harus berlaku untuk setiap bilangan asli. Cara pembuktian untuk sesuatu rumus J(S) yang menyangkut bilangan asli n dilakukan dengan induksi matematika, yaitu sbb:

Langkah I: Rumus dibuktikan benar untuk n = 1.

Langkah II: a) Misalkan rumus dianggap benar untuk n = k.

b) Berdasarkan langkah I dan langkah IIa rumus dibuktikan kebenarannya untuk n = k + 1.

Jika kedua langkah di atas telah ditempuh dan ternyata benar, maka dapat ditarik kesimpulan bahwa rumus atau sifat (J atau S) berlaku untuk setiap bilangan asli n. Pembuktian semacam ini dibenarkan atau dianggap sebagai salah satu metode pembuktian formal dalam matematika yang disebut **induksi matematika** atau **induksi lengkap**. Hal ini disebabkan dari langkah I ternyata rumus (J atau S) berlaku (benar) untuk n = 1, maka berdasarkan langkah II rumus berlaku untuk n = 2, yang mengakibatkan lagi rumus berlaku untuk n = 3, dan seterusnya.

Contoh 54

Buktikan rumus (2) di atas, yaitu

$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots (2n - 1) = n^2$, n bilangan asli dengan menggunakan induksi matematika.

Bukti:

I. Untuk n = 1 diperoleh $2 \cdot 1 - 1 = 1^2$

$1 = 1$ (benar)

(ruas kiri = ruas kanan)

II. a) Dianggap (dimisalkan) benar untuk n = k.

$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + [2(k - 1) - 1] + [2k - 1] = k^2$

b) Harus dibuktikan benar untuk n = k + 1, yaitu sbb:

$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2k - 1) + [2(k + 1) - 1] = (k + 1)^2$

Ruas kiri II b) adalah

$= \underbrace{1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2k - 1) \quad + [2(k + 1) - 1]}_{k \text{ suku } = k^2}$

$= k^2 + [2(k + 1) - 1]$

$= k^2 + 2k + 1$

$= (k + 1)^2$

= ruas kanan

Persamaan terakhir menunjukkan rumus (2) berlaku untuk n = k + 1 (ruas kiri = ruas kanan). Dengan demikian rumus (2) berlaku untuk semua bilangan asli n.

Contoh 55

Buktikan dengan induksi matematika bahwa untuk semua bilangan ganjil n, $n^3 - n$ habis dibagi 24.

Bukti:

I. Untuk n = 3, maka $n^3 - n$ menjadi $3^3 - 3 = 24$ habis dibagi 24

II. a) Misalkan dianggap benar untuk n = k, yaitu $k^3 - k$ habis dibagi 24 (n bilangan ganjil).

b) Harus dibiktikan benar untuk n = k + 2 (bilangan ganjil berikutnya) habis dibagi 24, yaitu sbb:

$$
\begin{aligned}
(k + 2)^3 - (k + 2) &= k^3 + 6k^2 + 12k - 8 - k - 2 \\
&= k^3 - k + 6k^2 + 12k + 6 \\
&= (k^3 - k) + 6(k + 1)^2
\end{aligned}
$$

Bentuk $(k + 1)^2$ menjadi kuadrat bilangan genap, sehingga habis dibagi 24, berarti $6(k + 1)^2$ juga habis dibagi oleh 24 (IIa). Jadi ruas kanan $(k^3 - k) + 6(k + 1)$ habis dibagi oleh 24. Dengan demikian kedua ruas habis dibagi oleh 24. Jadi, kesimpulannya $n^3 - n$ habis dibagi oleh 24 untuk semua bilangan ganjil n.

E. Pendekatan Pembelajaran Barisan, Deret, Notasi Sigma, dan Induksi Matematika

Seperti halnya pendekatan pembelajaran logika matematika dalam kegiatan belajar 1 di atas, bahwa pembelajaran untuk konsep-konsep Barisan, Deret, Notasi Sigma, dan Induksi Matematika selalu berdasarkan pada permasalahan nyata atau masalah yang disimulasikan (Pembelajaran berbasis masalah atau PBL). Contoh konkrit pembelajaran barisan aritmetika, deret aritmetika, barisan geometri, deret geometri sampai induksi matematika telah diperlihatkan dalam Kegiatan Belajar 2 buku materi pokok ini.

Demikian pula dengan pendekatan yang disarankan dalam modul (buku materi pokok) yang pertama, yaitu modul pembelajaran matematika dengan menggunakan pendekatan kontekstual (CTL) dapat pula dijadikan alternatif dalam pembelajran konsep-konsep dalam Kegiatan Belajar 2 modul ini. Hal ini pun telah banyak dalam uraian maupun pemberian contoh-contoh barisan aritmetika, barisan geometri, deret aritmetika, deret geometri sampai dengan induksi matematika.

Namun tidaklah menutup kemungkinan untuk mengembangkan pendekatan-pendekatan pembelajaran lain dalam memahami konsep-konsep bahasan dalam modul ini. Hal ini tentu saja perlu mempertimbangkan berbagai kondisi lingkungan pembelajarannya. Dalam hal ini guru yang langsung berhadapan dengan kelas yang lebih mengetahui dalam pemilihan pendekatan atau model-model pembelajaran matematika yang sesuai dengan karakteristik konsep yang disajikannya. Karena kita menyadari bahwa kegiatan pembelajaran dalam kelas adalah sesuatu hal yang kompleks, sehingga tidak ada satu pendekatan atau model pembelajaran yang terbaik dalam menyajikan materi-materi matematika kepada para siswa kita. Namun kreativitas dan inovasi perlu untuk mencoba dan mengembangkan berbagai pendekatan dan model seperti yang disarankan dalam modul pertama maupun modul ini.

Selanjutnya untuk lebih memantapkan pemahaman Anda terhadap materi **Kegiatan Belajar** di atas, cobalah kerjakan soal-soal **Latihan** berikut.

Latihan

1. Seseorang akan melakukan pembayaran sebesar Rp. 880.000,00 dengan cara diangsur berturut-turut tiap bulan sebesar Rp. 25.000,00; Rp. 27.000,00; Rp. 29.000,00; dan seterusnya. Tunjukkan bahwa pembayaran itu harus lunas setelah 20 tahun.

2. Seorang pegawai mendapat gaji permulaan Rp. 1.600.000,00 sebulan. Jika tiap tahun ia mendapat kenaikan gaji Rp. 100.000,00, carilah jumlah pendapatan yang diterima pegawai itu dalam waktu 10 tahun.

3. Jumlah semua suku deret geometri tak hingga adalah 6, sedangkan jumlah suku-suku yang bernomor genap adalah 2. Tentukan suku pertama deret itu.

4. Buktikanlah bahwa:

$$\sum_{n=8}^{28}(n^2 - n) = \sum_{n=1}^{21} n^2 + 13\sum_{n=1}^{21} n + 882$$

5. Buktikan dengan induksi matematika bahwa

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

Setelah Anda mengerjakan soal-soal Latihan di atas, bandingkanlah jawabannya dengan petunjuk (rambu-rambu) jawaban berikut.

Petunjuk Jawaban Latihan

1. **Bukti:**

25.000 + 27.000 + 29.000 + … = 880.000

membentuk deret geometri, sehingga didapatkan

a = 25.000

b = 2000

J_n = 880.000

$J_n = \frac{1}{2} n[2a+(n-1)b]$

$\Leftrightarrow 880.000 = \frac{1}{2} n[2(25.000) + (n-1)2000]$

$\Leftrightarrow 880.000 = 25.000n + 1000n^2 - 1000n$

$\Leftrightarrow n^2 + 24n - 880 = 0$

$\Leftrightarrow (n + 44)(n - 20) = 0$

$\Leftrightarrow$ n = -44 (ditolak) atau n = 20 (diterima)

Jadi, pembayaran itu harus setelah 20 bulan.

2. Pendapatan pada tahun I = 12 × 1.600.000

II = 12 × 1.700.000

III = 12 × 1.800.000

⋮

x = 12 × 2.500.000

Jumlah seluruhnya = 12(1.600.000 + 1.700.000 + 1.800.000 + … + 2.500.000)

$= 1.200.000\,\underbrace{(16+17+18+\ldots+25)}$

$= 1.200.000 \times \frac{1}{2}\ .\ 10(16 + 25)$

$= 240.600.000$

Jadi dalam waktu 10 tahun pendapatan yang diterima pegawai itu adalah Rp. 240.600.000,00.

3. Deret geometri tak hingga: $a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1}$

dengan $|r| < 1$ dan jumlahnya adalah

$J = \frac{a}{1-r}$

$\Leftrightarrow 6 = \frac{a}{1-r}$

$\Leftrightarrow a = 6(1 - r)$ ………………………………………………… (1)

Deret geometri tak terhingga suku-suku genap adalah

$ar + ar^3 + ar^5 + \ldots$ dengan $|r^2| < 1$

dan jumlahnya adalah

$J_{genap} = \frac{ar}{1-r^2}$

$\Leftrightarrow 2 = \frac{ar}{1-r^2}$

$\Leftrightarrow \frac{ar}{(1-r)(1+r)} = 2$ ……………………………………… (2)

Dari persamaan (1) dan (2) didapatkan

$\frac{6(1-r)r}{(1-r)(1+r)} = 2$

$\Leftrightarrow 6r = 2 + 2r$

$\Leftrightarrow r = \frac{1}{2}$ substitusikan ke persamaan (1), didapat

$a = 6(1 - \frac{1}{2})$

$\Leftrightarrow a = 3$

Jadi, suku pertama deret itu adalah 3.

4. **Bukti:**

$$\sum_{n=8}^{28}(n^2 - n) = \sum_{n=8-7}^{28-7}\{(n+7)^2 - (n+7)\}$$

$$= \sum_{n=1}^{21}(n^2 + 13n + 42)$$

$$= \sum_{n=1}^{21} n^2 + 13\sum_{n=1}^{21} n + (21-1)42$$

$$= \sum_{n=1}^{21} n^2 + 13\sum_{n=1}^{21} n + 882$$

5. **Bukti:**

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6} n(n + 1)(2n + 1)$$

I. Untuk n = 1 didapat $1^2 = \frac{1}{6} . 1(1 + 1)(2 . 1 + 1)$

$$1 = \frac{1}{6} 2 . 3 = 1 \text{ (benar)}$$

II. a) Dianggap benar untuk n = k

$$\underbrace{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2}_{(k+1)\ \text{suku}} = \frac{1}{6} k(k + 1)(2k+1)$$

b) Harus dibuktikan benar untuk n = k + 1, sbb:

$$\underbrace{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2}_{(k+1)\ \text{suku}} = \frac{1}{6}(k + 1)(k + 2)(2k + 3)$$

Ruas kiri = $\underbrace{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2}_{k\ \text{suku}} + (k+1)^2$

$$= \{\frac{1}{6} k(k + 1)(2k+1)\} + (k + 1)^2$$

$= (k + 1) \{\frac{1}{6} k(2k + 1) + (k+1)\}$

$= \frac{1}{6}(k + 1)(2k^2 + 7k + 6)$

$= \frac{1}{6}(k + 1)(k+2)(2k + 3)$

= ruas kanan

Persamaan terakhir menunjukkan rumus berlaku untuk $n = k + 1$.

Dengan demikian rumus berlaku untuk semua bilangan asli n.

Selanjutnya buatlah rangkuman dari uraian materi Kegiatan Belajar 1 di atas, kemudian bandingkanlah dengan alternatif rangkuman berikut.

Rangkuman

1. Barisan

Suku-suku (unsur-unsur) suatu barisan dapat ditentukan dengan suatu rumus. Misal $U_n = 2n - 1$ dengan n bilangan asli menghasilkan barisan 1, 3, 5, 7, …

2. Barisan Aritmetika

Dalam barisan aritmetika: $u_2 - u_1 = u_3 - u_2 = \dots = u_n - u_{n-1} = b$ (beda).

Suku ke-n barisan aritmetika: a, (a + b), a + 2b, … ialah

$U_n = a + (n - 1)b$.

3. Deret Aritmetika

Deret baku ialah $a + (a + b) + (a + 2b) + \dots + [a + (n - 1)b]$.

Jumlah n suku pertama $J_n = S_n = \frac{1}{2} n \{2a + (n - 1)b\}$

$= \frac{1}{2} n(a + u_n)$

4. Barisan Geometri

Dalam barisan geometri: $\frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} = ... = \frac{u_n}{u_{n-1}}$ = r (rasio).

Suku ke-n dari barisan geometri a, ar, ar^2, ar^3, … ialah $u_n = ar^{n-1}$.

5. Deret Geometri

Deret baku ialah: $a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1}$.

Jumlah n suku pertama $J_n = S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$, $r \neq 1$

$$= \frac{a(r^n - 1)}{r-1}, \; r > 1$$

Jumlah sampai tak hingga $J_n = S_n = \frac{a}{1-r}$ jika $-1 < r < 1$.

6. Notasi Sigma

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

Σ (sigma = jumlah aljabar).

7. Induksi matematika

Jika J dan S sebuah rumus atau sifat yang harus dibuktikan berlaku untuk semua bilangan asli n, maka cara pembuktian dilakukan dengan induksi matematika yang langkah-langkahnya adalah sbb:

I. Pembuktian rumus untuk n = 1

II. a) Misal dianggap benar untuk n = k

b) Harus dibuktikan berlakunya rumus untuk n = k + 1.

Selanjutnya untuk menguji tingkat penguasaan Anda terhadap uraian Kegiatan Belajar di atas, kerjakanlah soal-soal **Tes Formatif** berikut ini.

Tes Formatif

Petunjuk: Berilah komentar atau penjelasan dari setiap pernyataan berikut, dan tentukan pula nilai kebenarannya. Jawaban yang benar skornya 1 dan jawaban yang salah skornya 0.

1. Tiga buah bilangan yang membentuk barisan aritmetika yang jumlahnya 18 dan hasil perkaliannya 192 adalah

   A. 5, 7 dan 9   C. 2, 4 dan 6

   B. 4, 6 dan 8   D. 7, 8 dan 9

2. Banyaknya suku dan jumlah bilangan bulat di antara 100 dan 1000 yang merupakan kelipatan tujuh berturut-turut adalah

   A. 128 dan 70.336   C. 182 dan 70368

   B. 218 dan 73306   D. 812 dan 7336

3. Sebuah benda bergerak mulai dari keadaan diam dan melintasi 3 dm pada detik pertama, 5 dm pada detik kedua, 7 dm pada detik ketiga dan seterusnya. Panjangnya lintasan yang ditempuh benda tersebut setelah 10 detik adalah

   A 90 dm   C. 110 dm

   B. 100 dm   D. 120 dm

4. Jika suku ketiga suatu barisan geometri ialah 32 dan suku keenamnya adalah 2048, maka rasio dua suku pertamanya berturut-turut adalah

   A. 4 dan 3   C. 4 dan 2

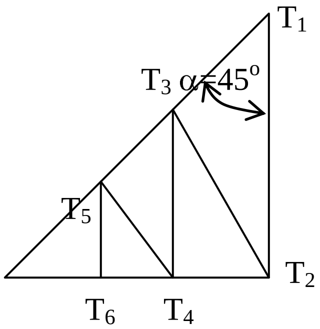
   B. 2 dan 4   D. 2 dan 3

5. Misalkan banyaknya penduduk suatu desa pada tahun 2006 sebanyak 24 orang, pada tahun 2008 sebanyak 96 orang dan seterusnya mengikuti barisan geometri, maka banyaknya penduduk pada tahun 211 adalah

   A. 384   C. 1536

   B. 768   D. 1368

6. Bila α = 45^o dan proses penarikan garis tegak lurus pada kaki-kaki sudut diteruskan, maka jumlah panjang garis $T_1T_2 + T_2T_3 + T_3T_4 + \ldots$ adalah



A. $a(2 - \sqrt{2})$

B. $a(-2 - \sqrt{2})$

C. $a(-2 + \sqrt{2})$

D. $a(2 + \sqrt{2})$

7. $\sum_{k=2}^{6} 3(k^2 - 1) =$

A. 522 C. 552

B. 252 D.255

8. $\sum_{k=2}^{7} (2k^2 - 3) = \sum_{k=2}^{7} 2k^2 - \sum_{k=2}^{7} 3 = \ldots\ldots.$

A. 287 – 81 C. 287 - 18

B. 278 – 18 D. 278 - 81

9. Penulisan satu notasi sigma dari

$\sum_{k=1}^{n} (3k - 2)^2 - \sum_{k=1}^{n} (3k + 2)^2$ adalah

A. $-\sum_{k=1}^{n} 24k$ C. $\sum_{k=1}^{n} 42k$

B. $\sum_{k=1}^{n} 24k$ D. $-\sum_{k=1}^{n} 42k$

10. Dalam membuktikan suatu rumus atau sifat dengan menggunakan metode induksi matematika haruslah benar untuk n = 1, kemudian dianggap benar untuk n = k, dan benar untuk n = k + 1 haruslah

A. dibuktikan C. diasumsikan

B. dimisalkan D. a, b dan c salah

KUNCI JAWABAN TES FORMATIF

1. B Misal ketiga bilangan iti (a – b), a (a + b) (karena barisan aritmetika)

   (a -) + a + (a + b) = 18

   a = 6

   (a . b) . a(a – b) = 192

   $\Leftrightarrow$ $(a^2 - b^2) \cdot a = 192$

   $\Leftrightarrow$ $(36 - b^2) \cdot 6 = 192$

   $\Leftrightarrow$ $b^2 = 4$

   $\Leftrightarrow$ $b = \pm 2$

2. A Barisan bilangan adalah 105, 112, 119, …, 994.

   A = 105, b = 112 – 105 = 7 dan u_n = 994.

   $U_n = 994$

   $\Leftrightarrow$ $a + (n - 1)\,b = 994$

   $\Leftrightarrow$ $105 + (n - 1)\,7 = 994$

   $\Leftrightarrow$ $n = 128$

   $$J_n = \frac{1}{2} n\,(a + u_n)$$

   $$\Leftrightarrow J_{128} = \frac{1}{2} \cdot 128(105 + 994)$$

   $\Leftrightarrow$ $J_{128} = 70.336$

3. D $$J_n = \frac{1}{2} n\,[2a + (n - 1)b]$$

   $$= \frac{1}{2} \cdot 10\,[2 \cdot 3 + (10 - 1)\,2]$$

   $= 120$

   Jadi, dalam 10 detik benda itu melintas sejauh 120 dm.

4. C $\frac{u_6}{u_3} = \frac{2048}{32}$

$\Leftrightarrow ar^5 : ar^2 = 64$

$\Leftrightarrow r^3 = 64$

$\Leftrightarrow r = 4$

$u_3 = ar^2$

$\Leftrightarrow 32 = a \cdot 4^2$

$\Leftrightarrow r = 2$

Jadi, rasionya 4 dan suku pertamanya 2

5. B Barisan geometri

$2006 = u_1 = 24 + 2007 = u_2 = 48 + 2008 = u_3 = 96 + \ldots + 2011 = u_n = ?$

$u_1 = 24, u_3 = 96$

$u_3\ ar^2$

$96 = 24 \cdot r^2$

$r^2 = 4$

$r = 2$, sehingga $u_6 = ar^5 = 25 \cdot 2^5 = 768$.

6. D Dari gambar pada soal nomor 6, jelas bahwa

$T_1T_2 = a$ diketahui, maka

$T_2T_3 = a\ \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $T_3T_4 = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,(\frac{1}{2}a\sqrt{2}) = a(\frac{1}{2}\sqrt{2})^2$, dst.

$T_1T_2 + T_2T_3 + T_3T_4 + \ldots = a + a(\frac{1}{2}\sqrt{2}) + a(\frac{1}{2}\sqrt{2})^2 + \ldots$

Adalah deret geometri dengan $r = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

$$S = \frac{a}{1-a} = \frac{a}{1-\frac{1}{2}\sqrt{2}} = a(2+\sqrt{2}).$$

Jadi jumlah ruas garis yang diminta adalah $a(2 + \sqrt{2})$.

7. D $\sum_{k=2}^{6} 3(k^2 - 1)$ = $3(2^2 – 1) + 3(3^2 – 1) + 3(4^2 – 1) + 3(5^2 – 1) + 3(6^2 – 1) = 255$.

8. B. $\sum_{k=2}^{7} (2k^2 - 3) = \sum_{k=2}^{7} 2k^2 - \sum_{k=2}^{7} 3$

$= 2 \sum_{k=2}^{7} k^2 - \sum_{k=2}^{7} 3$

$= 2(2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2) – (……)$

$= 278 - 18$

9. A $\sum_{k=1}^{n} (3k - 2)^2 - \sum_{k=1}^{n} (3k + 2)^2$

$= \sum_{k=1}^{n} [(3k - 2)^2 - (3k + 2)^2]$

$= - \sum_{k=1}^{n} 24k$.

10. A Lihat langkah-langkah pembuktian dengan metode induksi matematika (Contoh 59 dan contoh 60).

Daftar Pustaka

Abdul Kodir, dkk. (1979). *Matematika untuk SMA*. Jakarta: Depdikbud.

Andi Hakim Nasution, dkk. (1994). *Matematika 2 untuk Sekolah Menengah Umum*. Jakarta: Balai Pustaka.

Bunarso Tanuatmodjo, dkk. (1977). *Matematika Jilid 1*. Bandung: BPG Tertulis. Depdikbud.

Depdiknas. (2002). *Contextual Teaching and Learning* (CTL). Jakarta: Direktorat Jenderal Pendidikan Dasar Menengah.

Irving M. Copi. (1973). *Symbolik Logic*. Fourth edition. New York: Macmilan Publishing Co. Inc.

Karso. (2003). *Pengantar Dasar Matematika*, cetakan keempat. Jakarta: Pusat Penerbitan Universitas Terbuka Depdiknas

Lilik Hendrajaya dan Ismail (1975). *Matematika untuk SLA & Sederajat*. Bandung: Ganeca Science Book Leries.

Oesman Arif. (1978). *Logika Simbol (Logika Modern)*. Jakarta, Surabaya: PT. Bina Ilmu.

Ruseffendi, E.T. (1979). *Dasar-dasar Matematika Modern untuk Guru, Edisi ketiga.* Bandung : Tarsito

Robert Sharvy. (1970). *Logic on Outline*. Totowa, New Jersey : Little field, Adam & Co.

Stephen, W. J. dan Gallagher, S. A. (2003). *Problem Based Learning*. [online]. Tersedia http://www. Score rims h. 12 Ca.vs/ problem html.

Wahyudin. (1984). *Pengantar Sistem Matematika*. Bandung : Epsilon Grup.

Tim (1979). *Matematika Untuk SMA*. Jakarta : Depdikbud.