LOGIKA MATEMATIKA

(Pembelajaran Matematika SMA)

Oleh: H. Karso

A. Kalimat Pernyataan

Pengertian logika matematika termasuk logika modern dan logika tradisional dengan pentingnya belajar logika secara panjang lebar disajikan dalam buku materi pokok (modul) mata kuliah Pengantar Dasar Matematika. Khusus dalam sajian sekarang kita akan mengawalinya dengan salah satu konsep dasar logika matematika yang disebut pernyataan atau proposisi (prepotitio).

1. Kalimat Pernyataan

Dalam pelajaran logika matematika *kalimat pernyataan* haruslah dibedakan dengan kalimat-kalimat biasa dalam bahasa sehari-hari. Kalimat pernyataan atau disingkat dengan pernyataan tidak sama dengan kalimat biasa, sebab dalam kalimat biasa sering dipilih kata-kata yang pantas, yang mudah, kiasan atau ungkapan yang kabur, dan kadang-kadang dipakai kata-kata yang bermakna ganda. Sebaliknya dalam pernyataan tidaklah demikian, tetapi kalimatnya haruslah lengkap, tidak kabur dan jelas.

Suatu ciri logis dalam pelajaran matematika, bahwa yang dimaksudkan dengan pernyataan yaitu suatu kalimat yang hanya benar saja atau salah saja, tidak dua-duanya pada saat yang sama, artinya tidak sekaligus benar dan salah. Sedangkan kalimat yang benar tidak, salahpun tidak adalah *bukan pernyataan*. Untuk lebih jelasnya kita perhatikan tiga kelompok contoh berikut ini.

Contoh 1 (Pernyataan yang benar) :

a. Jakarta adalah ibu kota negara Republik Indonesia

b. Jika $x = 4$, maka $2x = 8$

c. Himpunan kosong merupakan himpunan bagian dari setiap himpunan

Contoh 2 (Pernyataan yang salah) :

a. Udara adalah benda padat

a. $x - y = y - x$; $x \neq y$

c. Setiap bilangan prima adalah ganjil

Contoh 3 (Bukan pernyataan) :

a. $x + 7 = 0$

b. $x^2 + 2x - 15 = 0$

c. $a + b > 9$

Istilah-istilah lain untuk *pernyataan* adalah kalimat matematika tertutup, kalimat tertutup, kalimat deklaratif, statement, atai proposisi. Sedangkan istilah lain untuk kalimat yang *bukan pernyataan* adalah kalimat matematika terbuka atau kalimat terbuka. Namun ada beberapa akhli logika dalam bukunya yang membedakan istilah pernyataan dan istilah proposisi. Hal ini berhubungan dengan pemakaiannya. Istilah pernyataan (statement) digunakan untuk menyatakan, sedangkan istilah proposisi (proposition) digunakan untuk kalimat tertutup. Akan tetapi pada umumnya para khli logika tidak membedakan pengertian pernyataan dan pengertian proposisi. Dalam modul ini istilah proposisi tetap diartikan sebagai kalimat tertutup, sedangkan kalimat pernyataan akan dipakai untuk keperluan tertentu umumnya sama seperti buku-buku lainnya, bahwa istilah kalimat pernyataan tidak dibedakan dengan pengertian proposisi.

2. Pernyataan Tunggal dan Pernyataan Majemuk

Suatu kalimat selain dapat dibedakan atas pernyataan dan bukan pernyataan, kalimat itu dibedakan pula atas pernyataan tunggal (simple statement) dan pernyataam majemuk (compound statement). Pernyataan tunggal atau pernyataan sederhana ialah pernyataan yang tidak memuat pernyataan lain sebagai bagiannya. Pernyataan majemuk itu bisa merupakan kalimat baru yang diperoleh dari penggabungan bermacam-macam pernyataan tunggal.

Contoh 4

a. Pernyataan “19 adalah bilangan prima” dapat dilambangkan dengan huruf “p” saja.

b. Pernyataan “$x^2 = 1$” dilambangkan “r”, dan sebagainya.

Dua pernyataan tunggal atau lebih dapat kita gabungkan menjadi sebuah kalimat baru yang merupakan pernyaan majemuk. Sedangkan tiap pernyataan bagian dari pernyataan majemuk itu disebut kompnen-komponen pernyataan majemuk. Komponen-komponen dari pernyataan majemuk itu tidak selamanya harus pernyataan tunggal, tetapi mungkin saja berupa pernyataan majemuk. Namun yang perlu untuk kita adalah bagaimana mengusahakan cara menggabungkan pernyataan-pernyataan tunggal menjadi pernyataan majemuk.

Untuk menggabungkan pernyatan-pernyataan tunggal menjadi pernyataan majemuk dapat dipakai *kata hubung* atau *kata perangkai* yang disebut operasi-operasi logika matematika. Dalam pelajaran logika ini Anda jumpai operasi-operasi seperti dalam pelajaran matematika lainnya, yaitu operasi binar (binary operation), atau operasi yang dikenakan pada dua pernyaan dan operasi monar (monary operation) operasi pada sebuah pernyataan.

Adapun operasi-perasi yang dapat membentuk pernyataan majemuk yang kita kenal adalah :

1. Negasi atau ingkaran atau sangkalan, dengan kata penyangkalan “tidaklah benar”.
2. Konjungsi, dengan kata perangkai “dan”.
3. Disjundsi dengan kata perangkai “atau”.
4. Implikasi atau kondisional, dengan kata perangkai “jika … maka …”.
5. Biimplikasi atau bikondisional, dengan kata perangkai “ … jika dan hanya jika …”.

Operasi-operasi ini akan Anda jumpai penjelasannya secara lebih lanjut dalam bagian-bagian mendatang. Sedangkan untuk lebih memahami pernyataan-pernyataan mejemuk dapatlah kita perhatikan beberapa contoh berikut ini.

Contoh 5

a. Bunga mawar berwarna merah dan bungan melati berwarna putih.

b. Ani dan Ana anak kembar

c. Cuaca cerah atau udara panas.

d. Jika x > 0 maka $\sqrt{x^2}$ = x.

e. Suatu segitiga adalah sama sisi jika dan hanya jika ketiga sudutnya sama.

f. Tidaklah benar bahwa 15 adalah bilangan prima.

Contoh 5. a adalah pernyataan majemuk yaitu suatu konjungsi, sebab pernyataan "Bunga mawar berwarna merah dan bunga melati berwarna putih" terdiri dari dua pernyataan tunggal sebagai komponen-komponennya, yaitu : " Bunga mawar berwarna merah" dan "Bungan melati berwarna putih".

Sedangkan contoh 5. b adalah bukan pernyataan mejmuk bentuk konjungsi, sebab dalam contoh ini tidak memuat dua komponen meskipun menggunakan kata "dan" tetapi ini adalah pernyataan tunggal yang menyatakan hubungan. Tetapi contoh-contoh 5. 3 sampai contoh 5. f adalah bentuk-bentuk pernyataan majemuk.

3. Nilai Kebenaran Pernyataan

Seperti Anda ketahui, bahwa suatu pernyataan hanyalah bisa benar saja atau salah saja. Kebenaran atau kesalahan dari suatu pernyataan disebut nilai kebenaran dari pernyataan itu. Untuk pernyataan yang mempunyai nilai benar diberi tanda B (singkatan dari benar) sedangkan kepada pernyataan yang bernilai salah diberikan nilai kebenaran S (singkatan dari salah).

Dalam modul ini ucapan *nilai kebenaran* dilambangkan dengan "τ" (huruf Yunani tau = 300). Nilai kebenaran dari suatu pernyataan p ditulis $\tau(p)$, dan jika pernyataan p itu adalah benar maka $\tau(p) = B$, sedangkan jika pernyataan p itu salah maka $\tau(p) = S$.

Contoh 6

a. Jika p : "5 adalah bilangan genap", maka $\tau(p) = S$.

b. Jika q : "$5<9$, maka $\tau(q) = B$.

c. Jika r : "Semua bilangan prima adalah ganjil", maka $\tau(r) = S$.

Perlu diketahui pula bahwa ada penulis yang memberikan nilai 1 atau benar atau T (True) kepada pernyataan yang benar, dan memberikan nilai 0 atau salah atau F (False) kepada pernyataan yang salah.

B. Operasi-operasi Logika

Seperti sudah disebutkan sebelumnya, bahwa untuk membentuk suatu pernyataan majemuk dari beberapa pernyataan tunggal diperlukan adanya kata perangkai. Kata perangkai disebut pula kata hubung atau perakit yang fungsinya hampir sama dengan operasi-operasi dalam pelajaran matematika yang sudah Anda kenal, seperti operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian dan sebagainya.

Kata perangkai ini disebut operasi-operasi logika matematika. Untuk selanjutnya Anda harus dapat menentukan nilai kebenaran pernyataan-pernyataan majemuk. Hal ini akan dapat dilakukan, jika diketahui nilai kebenaran komponen-komponennya, yaitu pernyataan-pernyataan yang digabungkan. Maka sangatlah penting untuk memahami sungguh-sungguh apa arti masing-masing operasi logika matematika tersebut.

1. Operasi Negasi

Operasi negasi (negation) atau penyangkalan, atau ingkaran adalah operasi yang dikenakan hanya pada sebuah pernyataan. Operasi negasi dilambangkan dengan tanda " ~ " atau " – " yang disebut tilde atau curl. Untuk selanjutnya akan dipakai simbol ~.

Seandainya p sebuah pernyatan tunggal, maka "~ p" dibaca *negasi p* atau *tidak p*, atau *bukan p*, adalah pernyataan majemuk. Mungkin ada yang merasa agak janggal bahwa negasi merupakan suatu operasi logika matemtika, sehingga suatu pernyataan bernegasi atau penyangkalan dari suatu pernyataan merupakan suatu pernyataan majemuk. Namun jelaslah bahwa dalam pernyataan-pernyataan negasi itu pertama-tama terdapat suatu pernyataan atau proposisi yang bersifat tunggal, misalnya :

Harimau adalah binatang buas

Untuk menjadikan suatu pernyataan negasi, diperlukan pernyataan lain, yang menyatakan bahwa proposisi yang pertama tadi tidak benar, misalnya :

Itu tidak benar

Dengan demikian terdapatlah suatu proposisi negasi yang mejemuk :

(Itu) tidak benar bahwa harimau adalah binatang buas.

Proposisi negasi ini sering dibahasakan dengan menggunakan kata *tidak* atau *bukan*. Proposisi mejemuk di atas juga bisa dinyatakan sebagai berikut :

Harimau adalah bukan binatang buas

Atau :

Tidak benar bahwa harimau binatang buas

Untuk lebih memahaminya coba Anda perhatikan beberapa contoh berikut ini.

Contoh 7

a. Jika p : $3 + 4 = 7$

maka ~ p : Tidaklah benar $3 + 4 = 7$

atau : $3 + 4 \neq 7$

b. Jika q : Semua bilangan prima adalah bilangan ganjil

maka ~ q : Tidaklah benar semua bilangan prima adalah bilangan ganjil

atau : Beberapa bilangan prima bukan bilangan ganjil

Kalau Anda perhatikan, ternyata bahwa negasi dari sebuah pernyataan *yang benar* adalah *salah*, dan negasi dari pernyataan *yang salah* adalah *benar*. Jadi, τ (p) = B maka τ (~p) = S, dan jika τ (q) = S maka τ (~q) = B. Secara umum berlaku :

Definisi : Sebuah pernyataan dan penyangkalannya mempunyai nilai kebenaran yang berlawanan

Definisi ini dapat ditulis dalam bentuk tabel kebenaran seperti tabel berikut ini :

	p	~ p
(1)	B	S
(2)	S	B

Baris pertama (1) merupakan singkatan dari pernyataan “Jika p benar, maka ~ p adalah salah”

Contoh 8

a. Jika p : $30 + 10 \leq 20$, τ (p) = S maka ~ p : Tidak benar bahwa $30 + 10 \leq 20$, τ (~p) = B

atau : $30 + 10 > 20$, τ (~p) = B

b. Jika r : Beberapa penerbang adalah wanita, τ (r) = B

maka ~r : Tidak benar bahwa beberapa penerbang adalah wanita, τ (~r) = S

atau Salah bahwa beberapa penerbang adalah wanita, τ (~r) = S

atau Semua penerbang bukan wanita, τ (~r) = S

2. Operasi Konjungsi

Suatu pernyataan majemuk yang dibentuk dengan cara menggabungkan dua pernyataan tunggal dengan memakai kata perangkai *dan* disebut *konjungsi (conjunction)*. Sedangkan pernyataan-pernyataan tunggal yang digabungkannya disebut konjung-konjung (komponen-komponen).

Dalam logika matematika, operasi konjungsi yaitu kata *dan* yang berfungsi sebagai penghubung dua pernyataan tunggal menjadi pernyataan majemuk dinotasikan dengan tanda " $\wedge$ " atau " **.** " (dot), tetapi tepapi dalam modul ini yang akan dipakai adalah notasi " $\wedge$ ".

Contoh 9

a. Jika p : $7 – 2 = 5$

dan q : 5 adalah bilangan prima

maka $p \wedge q$: $7 – 2 = 5$ dan 5 adalah bilangan prima.

b. Jika p : Bandung Ibu kota Jawa barat

dan q : $3 + 7 = 10$

maka $p \wedge q$: Bandung Ibu Kota Jawa Barat dan $3 + 7 = 10$.

Dalam membentuk pernyataan majemuk *tidaklah diharuskan* bahwa pernyataan-pernyataan tunggal yang digabungkan satu sama lainnya mempunyai suatu arti. Seperti halnya contoh 9. b di atas, antara pernyataan tunggal yang satu dengan pernyataan tunggal yang satunya lagi tidak mempunyai kaitan arti apa-apa. Hal ini berlaku pula untuk kalimat-kalimat majemuk lain yang dibentuk oleh operasi-operasi logika yang lainnya.

Suatu pernyataan mejemuk sama seperti pernyataan tunggal adakalanya mempunyai nilai kebenaran benar atau salah, tidak dua-duanya pada saat yang sama. Nilai kebenaran suatu pernyataan majemuk tergantung pada nilai kebenaran konjung-konjungnya, yaitu nilai kebenaran dari pernyataan-pernyataan asalnya.

Contoh 10

Untuk lebih jelasnya coba Anda perhatikan satu contoh berikut ini :

Jika p : Ati adalah seorang wanita yang cantik.

dan q : Ati adalah seorang wanita yang pandai

maka $p \wedge q$: Ati adalah anak yang cantik dan pandai.

Sekarang akan dicari nilai kebenaran pernyataan-pernyataan majemuk $p \wedge q$, jika nilai kebenaran dari komponen-komponennya yaitu p dan q diketahui.

Dalam hal ini, jelas bahwa jika $p \wedge q$ benar, maka p, q dua-duanya benar. Demikian pula, jika p dan q masing-masing merupakan pernyataan yang benar, maka dengan sendirinya $p \wedge q$ benar pula.

Sebaliknya, jika p dan q dua-duanya salah, maka $p \wedge q$ pasti salah. Demikian pula, jika salah satu dari p atau q salah, maka $p \wedge q$ juga salah. Secara umum berlaku definisi berikut.

Definisi : Sebuah konjungsi benar jika komponen-komponennya benar, tetapi salah jika salah satu komponennya salah atau kedua-duanya salah.

Dalam bentuk tabel kebenaran definisi tersebut dapat Anda lihat seperti berikut :

	P	q	$p \wedge q$
(1)	B	B	B
(2)	B	S	S
(3)	S	B	S
(4)	S	S	S

Baris pertama (1) merupakan singkatan dari pernyataan : Jika p benar dan q benar, maka p dan q adalah benar.

Perlu Anda perhatikan, bahwa dalam menyusun suatu tabel kebenaran, segala kemungkinan dari nilai kebenaran komponen-komponennya haruslah disusun secara sistematis di bawah tiap komponen itu, yang selanjutnya digabungkan dengan operasi yang telah ditentukan.

Contoh 11

a. Jika r : Semua bilangan ganjil merupakan bilangan bulat ; τ (r) = B
dan s : Semua bilangan genap merupakan bilangan bulat; τ (s) = B
maka $r \wedge s$: Semua bilangan ganjil dan bilangan genap merupakan bilangan bulat; $\tau (r \wedge s) = B$.

b. Jika p : $2 + 2 \neq 3$; $\tau (p) = B$
dan q : $4 < 3$; $\tau (q) = S$
maka $p \wedge q$: $2 + 2 \neq 3$ dan $4 < 3$; $\tau(p \wedge q) = S$
dan $q \wedge p$: $4 < 3$ dan $2 + 2 \neq 3$; $\tau (q \wedge p) = S$

c. Jika x : Jakarta Ibu kota Jawa Barat ; $\tau (x) = S$
dan y : Anjing matanya tiga ; $\tau (y) = S$
maka $x \wedge y$: Jakarta Ibu kota Jawa Barat dan Anjing matanya tiga ; $\tau(x \wedge y) = S$

3. Operasi Disjungsi

Seandainya dua buah pernyataan tunggal digabungkan dengan kata-kata " atau ", maka pernyataan majemuk yang diperoleh disebut "disjungsi" (disjunction atau alternation), dan masing-masing dari kedua pernyataan tunggal itu disebut "disjung-disjung (alternative).

Pengertian disjungsi yaitu yang berkaitan dengan kata "atau" mempunyai dua arti yang berbeda. Pertama "atau yang inclusive" yang disebut juga "atau yang lemah" atau "atau mencakup" yang dalam bahasa Latin ditunjukkan dengan kata " *vel* ", yaitu kata "atau yang diartikan "dan atau" maksudnya menyatakan salah satu atau kedua-duanya. Dalam pengertian yang pertama ini kata "atau" dinotasikan dengan tanda "$\vee$" yang merupakan hurufpertama dari kata *vel* . dan simbol ini disebut "wedge" atau "*vel* ". Untuk lebih jelasnya dari atau inklusif ini kita tinjau sebuah contoh berikut :

"Ia sedang bercerita atau ia sedang memberikan pelajaran".

Kata "atau" di sini dapat membenarkan kedua bagian pernyataan itu, artinya mencakup bagian-bagiannya. Sebab orang bisa bercerita sambil memberi pelajaran.

Pengertian yang kedua, yaitu kata "atau yang exclusive" yang disebut juga "atau yang kuat" atau "atau memisah". Dalam kata Latinnya disebut "out", yaitu kata "atau" yang menyatakan salah satu tetapi tidak kedua-duanya, dan ditulis dengan simbol "$\veebar$". Sebagai contoh disjungsi eksklusif ini adalah pernyataan majemuk berikut :

"Saya yang pergi atau Anda yang pergi"

Kata atau dalam contoh ini berfungsi sebagai penghubung yang memisahkan pernyataan yang satu dari yang lain, yaitu memisahkan "saya yang pergi" atau "Anda yang pergi". Dalam pernyataan ini tidak mungkin "saya dan Anda yang pergi" tetapi harus salah satu "saya atau Anda yang pergi".

Jadi sebuah disjungsi yang menggunakan "atau inklusif" menyatakan bahwa *paling sedikit satu komponen benar*. Sedangkan disjungsi yang menggunakan "atau eksklusif" menyatakan bahwa *paling sedikit satu komponennya benar tetapi tidak dua-duanya*. Secara umum dapat dinyatakan seperti berikut.

Definisi : Sebuah disjungsi inklusif bernilai benar, jika paling sedikit satu komponennya benar, dan sebuah disjungsi ekslusif bernilai benar, jika paling sedikit satu komponennya benar tetapi tidak dua-duanya.

Tabel kebenaran "atau inklusif" ($\vee$), dan "atau eksklusif" ($\veebar$) adalah seperti tabel berikut :

p	q	$p \vee q$
B	B	B
B	S	B
S	B	B
S	S	S

p	q	$p \veebar q$
B	B	S
B	S	B
S	B	B
S	S	S

Untuk pembahasan selanjutnya yang dimaksudkan dengan kata "atau" adalah "atau imklusif" dengan notasi "$\vee$". Sedangkan untuk "atau ekslusif" dalam pemakaiannya akan disebutkan secara tegas.

Contoh 12

a. Jika $p : 2 - 3 \neq 3 - 2$; τ (p) = B

dan $q : 2 + 3 = 3 + 2$; τ (q) = B

maka $p \vee q$: $2 - 3 \neq 3 - 2$ atau $2 + 3 = 3 + 2$; $\tau (p \vee q)$

b. Jika $r : 4 > 3$; τ (r) = B

dan $s : 3 < 2$; τ (s) = S

maka $r \vee s$: $4 > 3$ atau $3 < 2$; $\tau (r \vee s) = B$

dan $s \vee r$: $3 < 2$ atau $4 > 3$; $\tau (r \vee s) = B$

c. Jika x = 27 habis dibagi 2 ; τ (x) = S

dan y : Jakarta ada di Sumatera ; τ (y) = S

maka $x \vee y$: 27 habis dibagi 2 atau Jakarta ada di Sumatera ; $\tau (x \vee y) = S$

Contoh 13 (Disjungsi eksklusif)

a. Dua garis dalam bidang sejajar atau berpotongan
b. Ia sedang membaca buku atau tidur
c. Saya lahir di Bandung atau Jakarta

4. Operasi Implikasi

Dalam matematika sering ditemukan pernyataan-pernyataan dalam bentuk "jika maka". Pernyataa dalam bentuk "jika maka" ini diperoleh dari penggabungan dua pernyataan tertentu. Misalnya dari pernyataan tunggal p dan pernyataan tunggal q, dibentuk kalimat baru yang merupakan pernyatan majemuk dalam bentuk "jika p maka q". Pernyataan-pernyataan yang berbentuk demikian disebut *implikasi* (implication), atau kondisional (conditional statement) atau pernyataan-pernyataan bersyarat.

Pernyataan "Jika p maka q" dinotasikan " $p \rightarrow q$" atau "$p \supset q$". Sedangkan kata penghubung dengan notasi "$\rightarrow$ " atau " $\supset$ " disebut operasi implikasi. Selanjutnya notasi implikasi yang akan dipakai dalam modul ini adalah notasi "$\rightarrow$"

Perhatikan sebuah contoh pembentukan pernyataan implikasi sebagai berikut:

Contoh 14

Jika p : Segitiga ABC samakaki

dan q : Segitiga ABC mempunyai dua sudut yang sama

maka $p \rightarrow q$: Jika semua segitiga ABC samakaki, maka segitiga ABC mempunyai dua sudut yang sama.

Dalam pernyataan implikasi, komponen kalimat yang terletak diantara "jika" dan "maka", yaitu bagian kalimat yang lebih dulu yang menjadi syarat disebut "*anteseden*" (*antecedent*). Sedangkan komponen pernyataan yang ditulis kemudian, yaitu bagian belakang yang merupakan akibatnya atau yang mengikutinya disebut "*konsekwen*" (*consequent*).

Untuk contoh di atas yang menjadi anteseden adalah kalimat p : "Segitiga ABC samakaki", dan yang menjadi konsekwen adalah kalimat q : "Segitiga ABC mempunyai dua sudut yang sama.

Sekarang akan diselidiki nilai kebenaran dari suatu implikasi, tetapi sebelumnya kita tinjau dahulu beberapa implikasi yang berbeda, sehingga kita dapat melihat adanya macam-macam implikasi yang berlainan.

Contoh 15

a. Jika p : Semua kucing suka makan tikus

dan q : Si Belang adalah seekor kucing

maka $p \rightarrow q$: Jika semua kucing suka makan tikus dan si Belang seekor kucing, maka si Belang suka makan tikus.

b. Jika p : Gambar ini adalah sebuah segitiga

dan q : Semua segitiga mempunyai tiga sisi

maka $p \rightarrow q$: Jika gambar ini sebuah segitiga, maka gambar ini mempunyai tiga sisi

c . Jika p : Karet direndam dalam bensin

dan q : Karet larut dalam bensin

maka $p \rightarrow q$: Jika karet direndam dalam bensin, maka karet tersebut akan larut.

Kebenaran implikasi ini bukan persoalan logika atau definisi, tetapi konsekwennya merupakan akibat. Dalam contoh terakhir ini yang ditonjolkan bersifat sebab menyebab atau hubungan sebab akibat dan harus diselidiki secara empiris.

Ketiga contoh di atas memperlihatkan adanya macam-macam implikasi yang mempunyai pengertian yang berbeda-beda tentang ungkapan “Jika …, maka …”.

Dengan memperhatikan adanya perbedaan-perbedaan itu kita akan berusaha menemukan arti yang sama atau sebagian arti yang sama mengenai tipe-tipe implikasi tersebut. Dalam hal ini, sebagian arti yang sama dari macam-macam implikasi yang berlainan akan dapat diketahui, bila kita bertanya : “Keadaan apakah yang cukup untuk menentukan kesalahan sebuah pernyataan implikasi ?”.

Apabila kita tinjau contoh ketiga di atas, maka pernyataan itu akan salah jika “Karet itu benar-benar direndam dalam bensin dan tidak larut”. Padahal berdasarkan pengalaman memang karet itu larut dalam bensin.

Untuk lebih jelasnya tentang dalam hal manakah implikasi yang berbeda-beda itu salah, kita tinjau kembali ketiga contoh di atas, dalam keadaan berikut :

a. Jika semua kucing suka makan tikus dan si Belang seekor kucing, maka si Belang *tidak* suka makan tikus.

b. Jika gambar itu benar-benar sebuah segitiga, maka gambar itu *tidak* mempunyai tiga sisi.

c. Jika karet itu benar-benar direndam dalam bensin, maka karet itu tidak akan larut.

Nilai kebenaran dari ketiga implikasi yang baru ini, adalah salah. Jadi, suatu implikasi dengan *anteseden benar* dan *konsekwen salah haruslah salah*. Karenanya tiap implikasi "Jika p maka q" bernilai salah dalam hal konjungsi : "$p \wedge \sim q$" benar. Tetapi agar implikasi "Jika p maka q" bernilai benar, maka konjungsi "$p \wedge \sim q$" harus salah. Dengan kata lain, supaya suatu implikasi "Jika p maka q" benar, maka $\sim (p \wedge \sim q)$ harus benar. Tabel kebenarannya seperti berikut:

p	q	$\sim p$	$p \wedge \sim q$	$\sim (p \wedge \sim q)$	$p \rightarrow q$
B	B	S	S	B	B
B	S	B	B	S	S
S	B	S	S	B	B
S	S	B	S	B	B

Atau secara singkatnya tabel kebenarannya seperti berikut :

p	q	$p \rightarrow q$
B	B	B
B	S	S
S	B	B
S	S	B

Secara umum berlaku :

Definisi : Suatu pernyataan implikasi hanya salah jika antisedennya benar dan konsekwennya salah, dalam kemungkinan lainnya pernyataan implikasi itu adalah benar.

Contoh 16

Bila p dan q pernyataan-pernyataan yang benar sedangkan r dan s adalah pernyataan-pernyataan yang salah, maka nilai kebenaran dari tiap pernyataan majemuk berikut

1. $p \rightarrow q = B$
2. $q \rightarrow r = S$
3. $r \rightarrow s = B$
4. $s \rightarrow p = B$
5. $r \rightarrow (r \rightarrow s) = B$
6. $(r \rightarrow s) \rightarrow s = S$
7. $(r \rightarrow p) \rightarrow (q \rightarrow s) = S$
8. $(r \rightarrow p) \rightarrow (\sim r \rightarrow \sim p) = S$
9. $[(p \wedge r) \rightarrow S] \rightarrow (p \rightarrow s) = S$

5. Operasi Biimplikasi

Selain operasi-operasi negasi, konjungsi, disjungsi dan implikasi dalam logika matematika dikenal pula operasi yang dinamakan operasi biimplikasi. Operasi biimplikasi disebut juga operasi *bikondisional* (*biconditional*), atau *operasi implikasi dwi arah, atau operasi ekuivalensi*. Operasi biimplikasi ini dinotasikan dengan " $\leftrightarrow$" yang dapat dibaca sebagai "*materially implication*" atau "jika dan hanya jika".

Seperti halnya operasi-operasi binar lainnya, maka untuk membentuk pernyataan majemuk biimplikasi diperlukan dua pernyataan sebagai komponen-komponennya. Misalnya komponen pertama adalah pernyataan p dan komponen kedua adalah pernyataan q. Maka pernyataan majemuk "p ekuivalen dengan q" atau "p jika dan hanya jika q" yang dinotasikan "$p \leftrightarrow q$" mempunyai arti bahwa $p \rightarrow q$ dan $q \rightarrow p$.

Selanjutnya sebagai konsekwensi logisnya, $p \leftrightarrow q$ akan mempunyai nilai kebenaran yang benar hanya jika $p \rightarrow q$ dan $q \rightarrow p$ kedua-duanya bernilai benar. Sedangkan sudah Anda ketahui bahwa implikasi $p \rightarrow q$ dan $q \rightarrow p$ dua-duanya akan benar hanya jika p benar dan q benar, atau p salah dan q salah, sedangkan dalam keadaan lainnya tidak mungkin. Sebab, jika p dan q nilai kebenarannya tidak sama, maka $p \rightarrow q$ dan $q \rightarrow p$ tidak akan saling menyimpulkan berarti kedua-duanya tidak akan benar. Secara umum berlaku :

Denifini : Suatu biimplikasi $p \leftrightarrow q$ benar jika nilai kebenaranp sama dengan nilai kebenaran q, dan biimplikasi $p \leftrightarrow q$ salah jika nilai kebenaran p tidak sama dengan nilai kebenaran q.

Tabel kebenarannya

p	q	$P \leftrightarrow q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	B

Contoh 17

a. Jika p : 2 + 2 = 5 ; (S)
dan q : 5 adalah bilangan prima ; (B)
maka $p \leftrightarrow q$: 2 + 2 = 5 jika dan hanya jika 5 adalah bilangan prima
$\tau (p \leftrightarrow q) = S$, sebab $\tau (p \rightarrow q) = B$ dan $\tau (q \rightarrow p) = S$

b. Jika p : Indonesia anggota Asean ; (B)
dan q : Pilifina anggota Asean ; (B)
maka $p \leftrightarrow q$: Indonesia anggota Asean jika dan hanya jika Pilifina anggota Asean.
$\tau (p \leftrightarrow q) = B$, sebab $\tau (p \rightarrow q) = B$ dan $\tau (q \rightarrow p) = B$

c. Jika p : 4 < 3 ; (S)
dan q : 4 = 3 ; (S)
maka $p \leftrightarrow q$: 4 < 3 jika dan hanya jika 4 = 3
$\tau (p \leftrightarrow q) = B$, sebab $\tau (p \rightarrow q) = B$ dan $\tau (q \rightarrow p) = B$

d. Bila p benar dan q salah, maka nilai kebenaran pernyataan majemuk berikut :

a. $(p \rightarrow q) \leftrightarrow \sim p = B$

b. $(p \vee q) \leftrightarrow q \rightarrow \sim p = B$

c. $[(p \wedge \sim q) \leftrightarrow p] = B$

6. Urutan Pemakaian Operasi

Untuk menentukan nilai kebenaran sebuah pernyataan majemuk yang lebih dari dua pernyataan tunggal, dan lebih dari satu operasi, pertama-tama dicari nilai kebenaran pernyataan-pernyataan yang terletak di dalam tanda kurung kecil (…..), kemudian yang terletak di dalam tanda kurung siku [……..], dan seterusnya.

Misalnya untuk mencari nilai kebenaran dari pernyataan mejemuk berikut :

$\tau\{\sim [p \wedge (\sim q \vee r)]\}$

Urutan pengerjaannya adalah

1. $\tau(\sim q)$
2. $\tau(\sim q \vee r)$
3. $\tau[p \wedge (\sim q \vee r)]$
4. $\tau\{\sim [p \wedge (\sim q \vee r)]\}$

Jika dalam sebuah pernyataan mejemuk tidak ada tanda-tanda pengelompokan seperti kurung kecil ( ), kurung siku [ ], dan sebagainya, maka operasi-operasi logika dikerjakan menurut urutan berikut :

1. Negasi
2. Konjungsi
3. Disjungsi
4. Implikasi
5. Biimplikasi

Sebagai contoh, pernyataan-pernyataan $p \rightarrow q \wedge \sim r$ dan $p \rightarrow (q \wedge \sim r)$ mempunyai nilai kebenaran yang sama, karena baik tanpa kurung maupun memakai tanda kurung langkah-langkah pengerjaannya ialah :

1. $\tau(\sim r)$
2. $\tau(q \wedge \sim r)$

3. τ [$p \rightarrow q \;\wedge \sim r$]

Akan tetapi nilai kebenaran pernyataan majemuk $p \rightarrow q \;\wedge \sim r$ tidak sama dengan nilai kebenaran $(p \rightarrow q) \;\wedge \sim r$, sebab untuk mencari τ [$(p \rightarrow q) \;\wedge \sim r$] langkah yang harus ditempuh adalah :

1. $\tau\ (p \rightarrow q)$
2. $\tau\ (\sim r)$
3. τ [$(p \rightarrow q) \;\wedge \sim r)$]

Untuk lebih jelasnya Anda perhatikan beberapa contoh langkah-langkah pengerjaan untuk mencari nilai kebenaran pernyataan majemuk berikut:

Contoh 18

a. Langkah-langkah pengerjaan $p \vee q \rightarrow r \wedge \sim p \leftrightarrow r$

sama dengan $\{\ (p \vee q) \rightarrow [\ r \wedge (\sim p)\ ]\ \} \leftrightarrow r$

yaitu :

1. $\tau\ (p \vee q)$
2. $\tau\ (\sim p)$
3. $\tau\ [\ r \wedge (\sim p)\ ]$
4. $\tau\ \{(p \vee q) \rightarrow [\ r \wedge (\sim p)\ ]\ \}$
5. $\tau\ [\ \{\ (p \vee q) \rightarrow [\ r \wedge (\sim p)\ ]\ \} \leftrightarrow r\ ]$

b. Bila x dan y adalah pernyataan-pernyataan yang benar, sedangkan z adalah pernyataan-pernyataan yang salah, maka nilai kebenaran dari pernyataan $x \rightarrow \sim y \wedge z \leftrightarrow y \vee \sim x \rightarrow \sim z$ adalah S, dengan langkah-langkah pengerjaan sebagai berikut :

1. $\tau\ (\sim y) = S$
2. $\tau\ (\sim x) = S$
3. $\tau\ (\sim z) = B$
4. $\tau\ [\ (\sim y) \wedge z\ ] = S$
5. $\tau\ [\ y \vee (\sim x)\ ] = B$
6. $\tau\ \{x \rightarrow [\ (\sim y) \wedge z\ ]\ \} = S$

7. τ { [y $\vee$ (~x)] $\rightarrow$ (~ z) = B

8. τ [{x $\rightarrow$ [(~ y) $\wedge$ z] } $\leftrightarrow$ { [y $\vee$ (~x)] $\rightarrow$ (~ z)}] = S

7. Tabel Kebenaran

Untuk lebih mudahnya menentukan nilai kebenaran dari suatu pernyataan majemuk, pergunakan suatu tabel yang disebut tabel kebenaran (truth tabel).

Karena sudah diketahui bahwa suatu pernyataan itu hanya dapat benar atau salah saja, maka setiap pernyataan itu hanya mempunyai dua kemungkinan, kemungkinan yang pertama adalah benar dan kemungkinan yang kedua adalah salah. Seandainya ada dua buah pernyataan tunggal yang akan kita gabungkan maka komposisi gabungan kedua pernyataan itu adalah sebagai berikut :

1. Pernyataan yang pertama benar, pernyataan yang kedua benar.
2. Pernyataan yang pertama benar, pernyataan yang kedua salah
3. Pernyataan yang pertama salah, pernyataan yang kedua benar
4. Pernyataan yang pertama salah, pernyataan yang kedua salah.

Jika pernyataan yang pertama itu ialah p dan pernyataan yang kedua ialah q. Maka empat komposisi gabungan kedua pernyataan seperti di atas itu dapat dibuat tabel kebenarannya seperti berikut :

	p	q
(1)	B	B
(2)	S	S
(3)	B	B
(4)	S	S

Seperti sudah Anda ketahui pula dalam tabel kebenaran negasi, tabel kebenaran konjungsi, disjungsi, implikasi, dan tabel kebenaran biimplikasi yang dinamakan *tabel-tabel kebenaran dasar*, bahwa banyaknya komposisi tergantung pada banyaknya pernyataan yang akan digabungkan. Ternyata bila ada dua pernyataan didapatkan empat macam komposisi. Sedangkan dari tiga pernyataan, akan didapatkan delapan macam komposisi, dan dari empat pernyataan didapatkan enam belas macam komposisi, dan seterusnya.

Jadi, banyaknya komposisi itu tergantung pada banyaknya pernyataan yang akan digabungkan. Secara umum berlaku jika banyaknya pernyataan ada n, maka banyaknya komposisi ada 2^n.

Contoh 19

a. Carilah τ [~ (p $\vee$ ~ q)]

Langkah-langkah pengerjaan yang sudah Anda kenal adalah sebagai berikut

(1). τ (p)

(2). τ (q)

(3). τ (~ q)

(4). τ (p $\vee$ ~ q)

(5). τ [~ (p $\vee$ ~ q)]

Dengan menggunakan tabel kebenaran seperti berikut:

p	q	~ q	p $\vee$ ~ q	~ (p $\vee$ ~ q)
B	B	S	B	S
B	S	B	B	S
S	B	S	S	B
S	S	B	B	S
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)

$\therefore \tau$ [~ (p $\vee$ ~ q)] = SSBS

Penyusunan tabel kebenaran di atas dapat disederhanakan sebagai berikut :

~	(p	$\vee$	~	q)
S	B	B	S	B
S	B	B	B	S
B	S	S	S	B
S	S	B	B	S
(4)	(1)	(3)	(2)	(1)

b. Jika a dan b pernyataan-pernyataan yang benar, sedangkan c dan d pernyataan-pernyataan yang salah, maka tabel kebenaran pernyataan majemuk $\sim a \leftrightarrow b \vee c \rightarrow \sim d \wedge \sim a$ adalah :

$\sim$	a	$\leftrightarrow$	b	$\vee$	c	$\rightarrow$	$\sim$	d	$\wedge$	$\sim$	a
S	B	B	B	B	S	S	B	S	S	S	B
(2)	(1)	(6)	(1)	(4)	(1)	(5)	(2)	(1)	(3)	(2)	(1)

Jadi : $\tau (\sim a \leftrightarrow b \vee c \rightarrow \sim d \wedge \sim a) = B$

Dalam setiap kolom tabel kebenaran dibubuhkan nomor urut langkah-langkah pengerjaan untuk mencari nilai kebenaran. Sedangkan pada lajur akhir langkah pengerjaan dibatasi oleh garis rangkap dua. Lajur terakhir ini merupakan penyelesaian nilai kebenarannya.

C. Pernyataan Berkuantor

Dalam kegiatan belajar modul sebelumnya, telah Anda ketahui bahwa apabila suatu kalimat terbuka variabelnya diganti dengan bermakna oleh konstanta, maka didapatkan pernyataan. Selain dengan cara itu, ada suatu cara lain untuk memperoleh suatu pernyatan dari suatu kalimat terbuka, yaitu dengan cara membubuhkan suatu kuantor di depan kalimat terbuka tersebut.

1. Pengertian Kuantor

Suatu kuantor ialah suatu ucapan yang jika dibubuhkan pada suatu kalimat terbuka akan dapat mengubah kalimat terbuka tersebut menjadi sebuah kalimat tertutup atau pernyataan. Pada dasarnya kuantor itu ada dua macam yaitu :

1. Kuantor universal (*universal quantifier*)
2. Kuantor khusus (*existensial quantifier*)

Kuantor universal yang disebut pula kuantor umum dilambangkan dengan "$\forall$" yang dibacanya : "setiap" atau "semua". Notasi "$(\forall x)$" dibacanya : "untuk setiap x" atau "untuk semua x".

Kuantor eksistensial atau ada yang menyebutnya sebagai kuantor khusus dilambangkan dengan "$\exists$" yang dibacanya : "sekurang-kurangnya ada satu" atau "ada beberapa". Untuk notasi "($\exists$y)" dibacanya : "ada beberapa y" atau "sekurang-kurangnya ada satu y".

Contoh 20

a. Misalkan p(x) kalimat terbuka : $x + 3 > 5$

Apabila pada kalimat ini dibubuhi kuantor universal, maka ($\forall$x) p(x) berarti : ($\forall$x) ($x + 3 > 5$). Ini merupakan kalimat tertutup, dan diucapkan : "Untuk semua x berlaku x 3 > 5". Pernyataan ini nilai kebenarannya salah, sebab dengan pemisalan untuk $x = 0$, diperoleh pernyataan yang salah, yaitu $0 + 3 > 5$.

Apabila pada kalimat di atas dibubuhi kuantor eksistensial, maka diperoleh :

($\exists$x) p(x) berarti : ($\exists$x) ($x + 3 > 5$).

Diucapkannya : "Ada x sedemikian sehingga berlaku $x + 3 > 5$" atau "Sekurang-kurangnya ada satu harga x sehingga berlaku $x + 3 > 5$". Ini merupakan pernyataan yang benar, sebab dengan mengambil pemisalan $x = 4$, didapatkan kalimat tertutup yang benar, yaitu $x + 3 > 5$.

b. Misalkan q(x) kalimat terbuka : $x + 1 > 0$, maka ($\forall$x) p(x) berarti : ($\forall$x) ($x + 1 > 0$).

Ini merupakan kalimat tertutup.

Jika x $\in$ { bilangan positif }, maka ($\forall$x) p(x) benar.

Tetapi jika x $\in$ { bilangan real }, maka ($\forall$x) p(x) salah.

Dari segi-segi tertentu pemakaian kuantor memang cukup praktis. Misalnya pernyataan : "Kuadrat setiap bilangan real tidak negatif".

Hal ini dapat dilambangkan dengan :

$$(\forall x \in R) (x^2 \geq 0).$$ R himpunan bilangan real.

Perlu diketahui pula, bahwa persamaan yang menghasilkan pernyataan yang mempunyai nilai kebenaran yang benar setelah dibubuhi kuantor universal, disebut *identitas*. Misalnya $(x + a)^2 = x^2 + ax + a^2$, merupakan identitas, sebab ($\forall$x) $[(x + a)^2 = x^2 + ax + a^2]$, merupakan pernyataan yang benar.

Nemun pada umumnya seperti contoh di atas, bahwa suatu persamaan ataupun pertidaksamaan setelah dibubuhi suatu kuantor bisa benar dan bisa pula salah. Hal ini tergantung pada kalimat terbuka, kuantor dan himpunan semesta penggantinya.

Contoh 21

a. $(\forall x \in R)$ $(x^2 \geq 0)$, R = { bilangan real }, adalah pernyataan yang benar, sebab untuk setiap $x \in R$, jika dikuadratkan akan menghasilkan bilangan positif atau nol.

b. $(\forall y \in A)$ $(y \geq 0)$, A = { bilangan asli }, adalah pernyataan yang salah, sebab bilangan asli memang lebih besar dari nol tetapi tidak ada yang sama dengan nol.

c. $(\exists\ x \in R)(\ x^2 = -1)$ merupakan pernyataan yang salah, sebab tidak ada satupun anggota bilangan real yang jika dikuadratkan sama dengan –1. Kuadrat dari setiap bilangan real adalah positif.

d. $(\exists\ y \in R)(\ y \geq 0)$ merupakan pernyataan yang benar, sebab ada anggota bilangan real yang lebih besar atau sama dengan nol.

2. Pengkuantoran Kalimat Terbuka dengan Dua Variabel

Seperti sudah Anda ketahui dalam kegiatan belajar modul lain, bahwa untuk sebuah kalimat terbuka dengan dua variabel, misalnya x dan y dapat dinyatakan dengan p(x , y) , q(x , y), dan sebagainya.

Untuk keperluan mengubah suatu kalimat terbuka dengan dua variabel sehingga menjadi kalimat tertutup yang mempunyai nilai kebenaran, diperlukan dua buah kuantor. Dalam hal ini ada beberapa definisi dari kombinasi dua buah kuantor yang akan sangat membantu dalam pembicaraan bagian ini.

Definisi :

$(\ \forall x\ )\ (\ \exists\ y\ )\ p\ (x\ ,\ y) \Leftrightarrow (\ \forall x\ )\ [\ (\ \exists y\ )\ p\ (x\ ,\ y)\ ]$, dibacanya “Untuk setiap x ada y sehingga p(x , y)”.

Jika pada kalimat terbuka dengan dua variabel, yaitu p (x , y) hanya dibubuhkan satu kuantor saja, maka bentuk baru itu masih tetap dianggap sebagai kalimat terbuka, tetapi bentuknya berubah menjadi kalimat terbuka dengan satu variabel. Adapun yang dianggap variabelnya adalah variabel yang tidak dibubuhi kuantor. Misalnya :

$(\forall x)\ p(x, y)$, kalimat terbuka dengan satu variabel yaitu y.

$(\exists y)\ p(x, y)$, kalimat terbuka dengan satu variabel yaitu x.

Definisi :

$(\exists y)(\forall x)\ p(x, y) \Leftrightarrow (\exists y)\ [(\forall x)\ p(x, y)]$,

dibacanya : “Ada y sehingga untuk setiap x, p (x , y)”.

Contoh 22

a. p (x , y) kalimat terbuka : $x + 2y = 7$.

$(\forall x)(\exists y)(x + 2y = 7)$

Pernyataan berkuantor ini merupakan kalimat tertutup yang benar, karena menurut definisi di atas, jika sebarang bilangan real disubstitusikan untuk x, maka ada bilangan rasional y yang sesuai, sehingga untuk x dan y yang bersangkutan tersebut akan diperoleh jumlah ruas kiri sama dengan 7.

$(\forall x)\ [(\exists y)(x + 2y = 7)]$

Kalimat tertutup ini benar, karena menurut definisi di atas akan ada sekurang-kurangnya satu bilangan real sebagai pengganti y yang memenuhi $x + 2y = 7$, jika sebarang bilangan real disubstitusikan untuk x, sehingga untuk x dan y yang sesuai akan diperoleh jumlah ruas kiri sama dengan 7.

Dari kedua pernyataan berkuantor di atas nilai kebenarannya sama, yaitu benar. Akibatnya kedua pernyataan itu merupakan pernyataan-pernyataan yang ekuivalen logis, atau :

$(\forall x)(\exists y)(x + 2y = 7) \Leftrightarrow (\forall x)\ [(\exists y)(x + 2y = 7)]$.

b. $q(x, y) = (3x + 2y = 5)$

$(\forall x)(\exists y)(3x + 2y = 5)$, merupakan kalimat tertutup yang benar.

$(\exists y)(\forall x)(x + 2y = 7)$, merupakan kalimat tertutup yang salah, karena kalimat ini mempunyai arti bahwa ada sebarang bilangan real y sedemikian, sehingga jika sebarang bilangan real disubstitusikan untuk x, maka jumlah ruas kiri sama dengan 5. Jelas bahwa pernyataan ini tidaklah benar.

Dari contoh dua ini, tadi telah kita lihat bahwa nilai kebenaran dua pernyataan berkuantornya tidak sama, berarti kedua pernyataan berkuantor itu tidak ekuivalen logis, atau dengan kata lain :

$$(\forall x)(\exists y)(3x + 2y = 5) \not\Leftrightarrow (\exists y)(\forall x)(3x + 2y = 5).$$

Sebagai akibatnya, marilah kita perhatikan kalimat-kalimat tertutup $(\forall x)(\forall y)\, p(x, y)$, dan $(\exists x)(\exists y)\, p(x, y)$, dalam bentuk definisi-definisi seperti berikut ini.

Definisi :

$(\forall x)(\forall y)\, p(x, y)$ dibacanya : "Untuk tiap x dan untuk tiap y berlaku p (x , y)".

Definisi :

$(\exists x)(\exists y)\, p(x, y)$ dibacanya : " Ada x dan ada y sehingga berlaku p (x , y).

Contoh 23

a. $(\exists x)(\exists y)(xy = 1)$

merupakan kalimat tertutup yang benar, karena memang ada harga x real dan y real sehingga xy = 1.

b. $(\exists x)(\forall y)(x + 2y = x)$

merupakan kalimat tertutup yang salah, karena tidak ada bilangan x real untuk setiap y real yang memenuhi x + 2y = x. Hal ini hanya akan didapat x real untuk y = 0, sehingga memenuhi kalimat terbuka x + 2y = x.

c. $(\forall x)(\exists y)(x + y = x)$

merupakan kalimat tertutup yang benar, sebab untuk sebarang x pasti ada sekurang-kurangnya satu harga y yang memenuhi x + y = x. Dalam hal ini kebetulan hanya ada satu harga y yang memenuhi x + y = x untuk semua harga x, yaitu y = 0.

d. $(\forall x)(\forall y)(xy = yx)$

merupakan kalimat tertutup yang benar, sebab untuk sebarang harga x dan sebarang harga y, pasti akan memenuhi kalimat terbuka xy = yx (sifat komutatif atau sifat pertukaran operasi kali).

3. Negasi Pernyataan Berkuantor

Dalam pembicaraan terdahulu, telah Anda ketahui tentang negasi dari suatu pernyataan. Jika p sebuah pernyataan, maka negasi dari p ditulis ~ p akan mempunyai nilai kebenaran yang berlawanan dengan pernyataan asalnya. Hal ini berlaku pada pernyataan berkuantor.

Bila kita akan menentukan negasi dari suatu pernyataan berkuantor, haruslah berhati-hati dengan pengertian kedua jenis kuantor yang telah Anda kenal. Terutama perbedaan tentang arti kuantor universal dan kuantor eksistensial, yaitu tentang arti kata “semua” dan “beberapa”. Apabila kita perhatikan, bahwa sebenarnya dalam berbagai variasi bentuk-bentuk pernyataan berkuantor hanyalah ada dua kuantor saja. Kuantor universal yang berarti “semua” dan kuantor eksistensial yang berarti “beberapa”.

Untuk lebih jelasnya, kita tinjau kembali pengertian negasi dari suatu pernyataan dalam beberapa contoh berikut ini.

Contoh 24

a. Jika p : “Semua bilangan asli adalah bilangan bulat”. Pernyataan ini merupakan kalimat tertutup yang mempunyai nilai kebenaran yang *benar* untuk *semua* bilangan asli. Karena itu negasinya harus menyatakan bahwa *sekurang-kurangnya ada satu* bilangan asli yang bukan bilangan bulat, sehingga mempunyai nilai kebenaran yang *salah*, yaitu :

~ p : “Beberapa bilangan asli bukan bilangan bulat”.

b. Jika p : “Beberapa bilangan prima adalah bilangan ganjil”. Pernyataan yang ditentukan merupakan kalimat tertutup yang nilai kebenarannya *benar*, dan mengandung pengertian yang menyatakan *sekurang-kurangnya ada satu* bilangan prima yang ganjil. Akibatnya, negasinya harus menyatakan *semua* bilangan prima tidak ganjil, dan nilai kebenarannya *salah*, secara lengkapnya yaitu :

   ~ p : “Semua bilangan prima tidak ganjil”,

   atau

   ~ p : “Tidak ada bilangan prima yang ganjil”.

Dari kedua contoh di atas dapatlah kita tarik beberapa kesimpulan yang akan sangat berguna dalam menentukan negasi dari suatu pernyataan berkuantor, yaitu :

1. Jika pernyataan : Semua A ialah B,
   maka negasinya : Beberapa A bukan B.
2. Jika pernyataan : Beberapa A ialah B,
   maka negasinya : Semua A bukan B,
   : Tidak ada A yang merupakan B.

Dua buah kesimpulan di atas dapat pula kita tulis dalam simbol logika berkuantor sebagai berikut :

1. $(\forall x)\, p(x)$ negasinya $\sim [\, (\forall x)\, p(x)\,]$
2. $(\exists x)\, p(x)$ negasinya $\sim [\, (\exists x)\, p(x)\,]$

Jika lebih jauh lagi membandingkan diantara kesimpulan dan hal yang logis tentang negasi seperti kenyataan-kenyataan di atas, maka akan diperoleh postulat-postulat yang sangat penting tentang *negasi pernyataan yang memuat sebuah kuantor*, yaitu :

1. $\sim [\, (\forall x)\, p(x)\,] \Leftrightarrow (\exists x)\, [\sim p(x)\,]$
2. $\sim [\, (\exists x)\, p(x)\,] \Leftrightarrow (\forall x)\, [\sim p(x)\,]$

Postulat yang pertama dapat dibaca sesuai dengan pengertian yang bersifat logis dan umum, yaitu “tidak menerima bahwa p(x) memuat semua x” ekuivalen logis dengan “menerima bahwa ada x yang tidak termuat dalam p(x).

Contoh 25

a. "Tidak semua orang akan mati "adalah ekuivalen logis dengan "Ada orang yang tidak akan mati".

b. "Tidak semua bunga berwarna merah" berarti "Ada bungan yang tidak berwarna merah".

Demikan juga postulat yang kedua, sesuai pula dengan pengertian yang bersifat logis dan umum, yaitu : "Tidak menerima bahwa ada x yang termuat dalam p(x)" ekuivalen logis dengan "Menerima bahwa semua x tidak termuat dalam p(x)".

Contoh 26

a. "Tidak ada orang yang hidup terus" adalah ekuivalen logis dengan "Semua orang tidak akan hidup terus".

b. "Tidak ada siswa yang sakit" sama artinya dengan "Semua siswa tidak ada yang sakit".

Untuk lebih memahami kedua postulat di atas, cobalah Anda tentukan negasi dari tiap pernyataan contoh berikut sebelum langsung melihat jawabannya.

Contoh 27

a. $(\exists\ x \in B) (x + 3 > 0)$, B = { bilangan bulat }

b. $(\forall\ x \in R) (x^2 + 1 \leq 0)$, R = { bilangan real }

c. $(\exists\ x) (x^2 = -1)$

d. Tiada kucing mirip anjing

e. Beberapa matriks tidak mempunyai invers perkalian.

Jawab :

a. Negasi dari : $(\exists x \in B)(x + 3 > 0)$

adalah : $\sim[(\exists x \in B)(x + 3 > 0)]$

$\Leftrightarrow (\forall x \in B) \sim (x + 3 > 0)$

$\Leftrightarrow (\forall x \in B)(x + 3 \leq 0)$

b. Negasi dari : $(\forall x \in R)(x^2 + 1 \leq 0)$

adalah : $\sim[(\forall x \in R)(x^2 + 1 \;\; 0)]$

$\Leftrightarrow (\exists x \in R) \sim (x^2 + 1 \leq 0)]$

$\Leftrightarrow (\exists x \in R)\ (x^2 + 1 > 0)]$

c. Negasi dari : $(\exists x)(x^2 = -1)$

adalah : $\sim[(\exists x)(x^2 = -1)]$

$\Leftrightarrow (\forall x) \sim (x^2 = -1)$

$\Leftrightarrow (\forall x)(x^2 \neq -1)$

d. Negasi dari : “Tiada kucing mirip anjing”,

ekuivalen dengan : “Semua kucing tidak mirip anjing”.

Negasinya : “Beberapa kucing mirip anjing”

Atau : “Ada kucing yang mirip anjing”.

e. Negasi dari : “Beberapa matriks tidak mempunyai invers perkalian”,

adalah : “Semua matriks mempunyai invers perkalian”.

Dari tadi, pembahasan negasi dari pernyataan berkuantor ini dikhususkan pada pernyataan-pernyataan dengan satu kuantor saja. Namun dengan postulat dan definisi dari bagian terdahulu itu, dapat pula dipakai untuk menyangkal kalimat tertutup yang memuat dua kuantor.

Contoh 28

Tulislah negasi-negasi dari kalimat tertutup berikut, dengan ketentuan x dan y adalah bilangan real.

a. $(\forall x)(\exists y)(2x + y = 4)$

b. $(\exists x)(\exists y)(x + y \neq y + x)$

c. $(\forall x)(\forall y)(xy = yx)$.

Jawab :

a. $\sim(\forall x)(\exists y)(2x + y = 4) \Leftrightarrow \sim(\forall x)[(\exists y)(2x + y = 4)]$

$\Leftrightarrow (\exists x) \sim [(\exists y)(2x + y = 4)]$

$\Leftrightarrow (\exists x)\ [(\forall y) \sim (2x + y = 4)]$

$\Leftrightarrow (\exists x)\ (\forall y)(2x + y \neq 4)$

b. $\sim(\exists x)(\exists y)(x + y \neq y + x) \Leftrightarrow \sim(\exists x)[(\exists y)(x + y \neq y + x)]$

$\Leftrightarrow (\forall x) \sim [(\exists y)(x + y \neq y + x)]$

$\Leftrightarrow (\forall x)[(\forall y) \sim (x + y \neq y + x)]$

$\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(x + y = y + x)$

c. $\sim(\forall x)(\forall y)(xy = yx) \Leftrightarrow \sim(\forall x)[(\forall y)(xy = yx)]$

$\Leftrightarrow (\exists x) \sim [(\forall y)(xy = yx)]$

$\Leftrightarrow (\exists x)[(\exists y) \sim (xy = yx)]$

$\Leftrightarrow (\exists x)[(\exists y)(xy \neq yx)]$

Apabila diperhatikan nilai kebenaran dari tiap pernyataan berkuantor di atas, ternyata pernyataan contoh satu adalah benar dan negasinya adalah salah. Nilai kebenaran pernyataan contoh dua adalah salah dan negasinya benar. Sedangkan contoh pernyataan tiga adalah benar dan negasinya jelas salah.

Sebelum mengakhiri pembicaraan kuantor ini, ada suatu hal yang perlu untuk disepakati, yaitu jika dalam suatu kuantor tidak ditentukan himpunan semesta pengganti variabelnya, maka yang dimaksudkan adalah himpunan yang sifatnya lebih luas. Misalnya dalam pembicaraan bentuk-bentuk aljabar maka himpunan semesta penggantinya adalah himpunan bilangan real. Perlu pula diketahui bahwa pernyataan berkuantor dan negasinya dapat pula disajikan dengan bantuan diagram Venn. Bahasan tentang diagram Venn dan pernyataan berkuantor dapat Anda pelajari secara utuh pada modul mata kuliah Pengantar Dasar Matematika.

D. Penarikan Kesimpulan

Dalam bahasan logika matematika banyak dilakukan kegiatan penalaran yang berhubungan dengan berbagai pernyataan. Kegiatan penalaran ini meliputi aktivitas berpikir yang abstrak, karena kegiatannya berkaitan dengan penarikan kesimpulan dari sebuah proposisi atau lebih. Untuk selanjutnya kegiatan penalaran ini dilambangkan dengan sesuatu yang disebut argumen.

1. Argumen

Sebuah *argumen* dapat didefinisikan sebagai kelompok proposisi atau pernyataan. Salah satu dari proposisi atau pernyataan itu diturunkan dari yang lainnya yang dipandang sebagai dasar yang satu itu. Dengan kata lain, sebuah argumen adalah suatu kelompok proposisi, sehingga untuk proposisi yang satu diharapkan mengikuti proposisi yang lain yang dianggap sebagai dasar bagi kebenaran yang satunya itu.

Setiap argumen terdiri dari pernyataan-pernyataan tertentu dan pernyataan lain yang dapat mengikutinya secara logis. Pernyataan-pernyataan tertentu itu disebut *premis*, sedangkan pernyataan lain disebut *konklusi*, dalam bahasa Yunani *syllogisme.*

Untuk selanjutnya, kita diminta menarik konklusi dari sejumlah premis yang ditentukan. Seandainya konklusi yang diturunkan ini mengikuti secara logis premis-premis tertentu yang diberikan, maka argumen tersebut dikatakan *valid* (syah, shahih, atau absah), jika tidak demikian dikatakan *invalid*.

Pengertian premis dan konklusi adalah relatif, artinya sebuah pernyataan atau proposisi dapat berperan sebagai premis pada suatu argumen, tetapi ia dapat berberan pula sebagai konklusi pada argumen yang lain.

Contoh 29

(a) . 1. Semua pegawai negeri dalam KORPRI

2. Semua KORPRI adalah penerima gaji

3. Jadi semua pegawai negeri penerima gaji.

(b). 1. Semua pegawai negeri adalah penerima gaji.

2. Semua penerima gaji adalah karyawan

3. Jadi pegawai negeri adalah karyawan

Pada contoh (a) dan (b) di atas, pernyataan-pernyataan (1) dan (2) dinamakan premis-premis, sedangkan pernyataan (3) dinamakan konklusi. Sedangkan konklusi pada argumen pertama, yaitu pernyataan (3) pada contoh (a), merupakan premis pada argumen yang kedua, yaitu pernyataan (1) pada contoh (b).

Perlu diketahui pula bahwa ada yang menyebutkan premis mayor untuk premis-premis yang pertama dan premis minor untuk premis-premis yang kedua.

Selain pengertian premis dan konklusi itu relatif, kita harus berhati-hati pula mengenai pengertian valid dan invalid dari sebuah argumen. Persoalan mengenai valid atau invalid sebuah argumen harus dibedakan dengan persoalan mengenai benar atau salah sebuah pernyataan.

Sebagai contoh, konklusi yang benar dapat ditarik secara valid dari premis-premis yang salah atau dari campuran premis yang salah dengan yang benar.

Contoh 30

a. Hitler seorang Polandia (S)
Semua orang Polandia orang Eropa (B)
Jadi Hitler orang Eropa (B)

Dalam contoh pertama ini, nilai kebenaran konklusinya adalah benar yang ditarik secara valid dari premis pertama yang nilai kebenarannya salah dan premis yang kedua nilai kebenarannya benar,

b. Hitler seorang Polandia (S)
Semua orang Polandia orang Asia (S)
Jadi Hitler orang Asia (S)

Dalam contoh yang kedua ini, kebenaran konklusinya salah yang ditarik secara valid dari dua premis dengan nilai kebenaran yang salah. Sebaliknya, sebuah argumen tidaklah harus valid, walaupun premis-premisnya serta konklusinya benar.

c. 100 adalah bilangan genap (B)
Setiap bilangan genap adalah real (B)

Jadi 101 adalah bilangan real (B)

Semua pernyataan dalam contoh tiga ini adalah benar, tetapi semua orang dapat mengetakan bahwa konklusinya tidak mengikuti secara logis dari premis-premis. Dengan kata lain argumen ini adalah invalid.

Jadi dapatlah kita ketahui, bahwa suatu pernyataan dapat merupakan premis atau konklusi bergantung pada konteksnya. Pernyataan itu merupakan premis, bila muncul sebagai asumsi dalam argumen untuk kepentingan pembuktian suatu pernyataan lain. Tapi pernyataa itu merupakan konklusi, bila dalam argumen tersebut muncul sebagai hal yang diminta untuk dibuktikan berdasarkan pernyataan-pernyataan lain yang diasumsikan.

Sedangkan valid dan tidak validnya sebuah argumen, tidaklah tergantung pada nilai kebenaran dari premis-premis dan konklusinya, tetapi tergantung pada penarikan konklusi dari premis-premisnya. Perhatikan kembali contoh 30(a), (b), dan (c) di atas.

Perlu diketahui pula bahwa ada dua macam argumen, yaitu argumen deduktik (deductive argument). Deduktif logika mempunyai tugas untuk menjelaskan sifat dari hubungan yang berlaku antara premis dan konklusi dalam sebuah valid argumen, serta memberikan teknik untuk membedakan valid dan invalid dari argumen tersebut. Sedangkan dalam argumen induktif hanya memerlukan tuntutan bahwa premis-premisnya memberikan sesuatu dasar untuk konklusinya.

Khusus dalam modul ini yang akan dibahas hanyalah untuk argumen deduktif, sedangkan argumen induktif termasuk dalam logika induktif. Untuk seterusnya yang dimaksudkan dengan *argumen* adalah argumen deduktif.

2. Aturan Penyimpulan

Jika Anda akan melakukan penyimpulan, maksudnya tentu untuk menemukan kebenaran. Untuk melaksanakan kegiatan tersebut, pola berpikirnya bertitik tolak dari pengetahuan yang sudah ada, artinya berdasarkan pada hal-hal yang diketahui benar, yaitu hal-hal yang memang benar, atau hal-hal yang benar-

benar salah. Dengan kata lain tentunya kita bertolak dari hal-hal yang mempunyai nilai kebenaran.

Dalam bentuk validitas pola berpikir suatu argumen, ada pengetahuan yang menjadi dasar dari konklusi itu, yaitu premis-premis. Jadi seperti sudah diketahui bahwa semua proposisi dalam premis harus benar. Syarat ini adalah syarat yang pertama untuk memperoleh konklusi yang benar dalam hubungannya dengan pemilihan proposisi pada kegiatan validitas suatu argumen.

Selain dari itu, di dalam kegiatan validitas argumen ada pula hal-hal yang meliputi penyusunan proposisi-proposisinya. Proposisi-proposisi yang menjadi premis yang dijadikan dasar penyimpulan haruslah mempunyai susunan yang tepat. Kalau untuk menarik kesimpulan yang logis, misalnya dalam hal-hal berikut ini.

Contoh 31

a. Semua segitiga adalah gambar datar	(B)
Semua segiempat adalah gambar datar	(B)
Jadi segitiga adalah segiempat	(S)

b. Semua bilangan asli adalah bilangan real	(B)
Semua bilangan bulat adalah bilangan real	(B)
Jadi bilangan asli adalah bilangan bulat	(B)

Kedua contoh di atas memperlihatkan bagaimana susunan proposisi-proposisi yang menjadi premis tidak tepat, sehingga tidak dapat dijadikan dasar titik tolak untuk menarik kesimpulan yang valid. Sebagai lawannya, Anda perhatikan contoh berikutnya.

c. Semua segitiga adalah poligon	(B)
Semua poligon adalah gambar datar	(B)
Jadi segitiga adalah gambar datar	(B)

d. Semua bilangan bulat adalah bilangan real (B)
Semua bilangan asli adalah bilangan bulat (B)
Jadi bilangan asli adalah bilangan real (B)

Dalam contoh 31(c) dan 31(d) di atas, sususnan dari proposisi-proposisi yang menjadi premis adalah tepat. Jika kegiatan pola berpikir di atas dikosongkan dari isi pengertian-pengertian di dalamnya, dan digantikan dengan tanda-tanda huruf tertentu, maka kita dapatkan pola penyusunan berikut :

Semua a dalah b
b adalah c
Jadi a dalah c

atau

Semua a dalah c
b adalah a
Jadi b dalah c

Kedua pola kegiatan penarikan kesimpulan di atas adalah sama, yaitu didapatnya penarikan kesimpulan untuk argumen yang valid.

Semua argumen apapun sebagai isinya, sebagai pengganti dari huruf-huruf a, b, dan c, asalkan bentuk susunannya tepat dipastikan tentu konklusinya benar dan merupakan argumen yang valid. Jadi, huruf a, b, dan c dapat diganti oleh pengertian apa saja, asal premis-premisnya benar konklusinya juga tentu benar. Misalnya bentuk itu dijadikan kegiatan pola berpikir berikut:

e. Semua mojang priangan itu wanita yang luwes
Yuliawati itu mojang priangan
Jadi Yuliawati itu wanita yang luwes

Namun kita harus berhati-hati pula dalam menentukan validitas ini, karena walaupun pola susunannya sama, akan tetapi kalau struktur proposisi di dalam premis berubah, maka mungkin didapat argumen yang invalid. Misalnya dalam contoh 31(e) di atas “Semua mojang priangan” diganti dengan “Beberapa mojang priangan", maka struktur premis pertama berubah dan argumennya menjadi invalid, yaitu :

f. Beberapa mojang priangan wanita luwes
Yuliawati mojang priangan
Jadi Yuliawati adalah wanita luwes

Jelaslah bahwa penarikan kesimpulan di atas tidak dapat diturunkan dari premis-premisnya, walaupun kedua premisnya adalah benar, Kesesasatan penarikan kesimpulan dari premis-premis yang benar, sehingga didapat konklusi yang salah seperti di atas disebut kesesatan non squitur, konklusinya tidak mengikuti secara logis dari premis-premisnya.

Dalam proses penalaran dari suatu argumen yang valid, proses berpikirnya berdasarkan premis-premis yang benar dan penarikan konklusinya yang benar pula. Berdasarkan asumsi bahwa argumen itu valid, maka ada hubungan kebenaran antara proposisi yang menjadi premis dan proposisi yang menjadi konklusi. Hal ini dapat dirumuskan dalam beberapa aturan penyimpulan berikut :

a. Jika premis-premisnya benar, maka konklusi argumen itu adalah benar. Aturan ini cukup jelas, karena konklusi itu terkandung dalam premis, sehingga jika premis-premisnya benar, tentu konklusinya harus benar pula. Sebaliknya jika konklusinya salah, maka kesalahan itu disebabkan oleh premisnya yang sudah salah. Kesalahan konklusi sudah terkandung dalam premis yang salah, sehingga didapatkan suatu aturan penyimpulan yang kedua, yang dirumuskan seperti berikut :

b. Jika konklusi suatu argumen salah, maka premis-premisnya juga salah. Akan tetapi jika premis-premis argumen itu salah belum tentu konklusinya salah. Sebagai akibatnya didapatkan aturan penyimpulan yang ketiga yaitu :

c. Jika premis-premisnya salah, konklusi argumen itu bisa benar bisa pula salah. Akan tetapi jika konklusinya benar belum tentu premisnya benar, artinya premisnya dapat salah. Sebagai akibatnya diperoleh aturan penyimpulan yang keempat.

d. Jika konklusinya benar, premis-premis argumen bisa benar bisa salah.

Selain dari contoh-contoh terdahulu yang merupakan pemakaian dari aturan-aturan di atas, sekarang kita tinjau beberapa contoh lain untuk memperlihatkan kebenaran dari aturan-aturan di atas yang belum diberikan dalam contoh terdahulu.

Contoh 32

a. 9 adalah bilangan prima	(S)
Semua bilangan prima adalah ganjil	(S)
Jadi 9 adalah bilangan ganjil	(S)
b. Napoleon adalah orang Inggris	(S)
Semua orang Inggris adalah orang Eropa	(B)
Jadi Napoleon adalah orang Eropa	(B)
c. Napoleon adalah orang Perancis	(B)
Semua orang Perancis orang Amerika	(S)
Jadi Napoleon adalah orang Amerika	(S)

E. Pendekatan Pembelajaran Logika Matematika

Direktorat SLTP menyampaikan hasil studi yang menunjukkan bahwa pembelajaran matematika cenderung *text book oriented* dan tidak dikaitkan dengan kehidupan sehari-hari. Memang benar bahwa pembelajaran konsep-konsep matematika cenderung abstrak dengan menggunakan pendekatan yang menitikberatkan pada ceramah sehingga konsep matematika menjadi sulit dipahami oleh siswa. Pembelajaran matematika di sekolah bersifat *rote learning* (hafalan) kurang mengembangkan pembelajaran yang bermakna (*meaningful learning*).

Di lain pihak, menurut Kurikulum 2004 disebutkan pula bahwa standar kompetensi matematika harus dielaborasi oleh siswa dan guru dalam kegiatan pembelajaran. Standar kompetensi yang dimaksud bukanlah penguasaan matemtika sebagai ilmu, melainkan penguasaan akan kecakapan matematika yang diperlukan untuk dapat memahami dunia sekitar, mampu bersaing, dan berhasil dalam kehidupan. Standar kompetensi dalam pembelajaran matematika haruslah mencakup pemahaman konsep matematika, komunikasi matematik, koneksi matematik, penalaran, pemecahan masalah, serta sikap dan minat yang positif terhadap matematika.

Oleh karena itulah banyak hal yang bias kit alkukan dalam pembelajaran matematika di sekolah sehingga supaya meningkatkan kualitas pembelajaranmatematika di kelas dan pada gilirannya meningkatkan prestasi belajar matematika sesuai tuntutan kurikulum yang berlaku. Perbelajaran berbasis masalah (*Problem based Learning*) adalah salah satu inovasi yang dapat dikembangkan oleh guru sebagai perancang dan organisator pembelajaran sehingga para siswa mendapatkan kesempatan untuk memahami dan memahami matematika melalui aktifitas belajar.

Konsep-konsep logika matematika merupakan salah satu bahasan dalam pembelajaran matematika yang paling memungkinkan dikembangkan melalui pendekatan pembelajaran berbasis masalah. Sebagai contohnya bagaimana konsep-konsep logika matematika disajikan sebagai implementasi kurikulum di kelas. Penyajian dimulai dengan menghadapkan siswa pada masalah nyata atau masalah yang disimulasikan, siswa bekerja sama dalam kelompok kecil untuk mengembangkan keterampilan pemecahan masalah, kemudian siswa mendiskusikan strategi untuk bernegoisasi membangun pengetahuannya. Segmen-segmen pembelajaran berbasis masalah mencakup *engagement*, *inquiry and investigation*, *performance*, *debriefing*.

Sebagai contoh, mintalah pada tiap kelompok (4 sampai 6 orang) untuk memberikan contoh pernyataan implikasi yang dibangun dari permasalahan kehidupan sehari-hari. Dengan bimbingan dan arahan guru pada tiap kelompok dan melalui penjelasan awal bahwa pernyataan $p \rightarrow q$ adalah bentuk pernyataan implikasi (kondisional), diharapkan tiap kelompok mampu membuat contoh yang mengacu pada pendekatan konstruktivis sebagai langkah awal dalam pembelajaran berbasis masalah. Langkah berikutnya dihadapkan pada mengeksplorasi, menyimpulkan serta mendistribusikan informasi sebagai dan jika pemahaman konsep implikasi ($p \rightarrow q$), yaitu untuk konsep-konsep konvers ($q \rightarrow p$), invers ($\sim p \rightarrow \sim q$), dan kontrapositif ($\sim q \rightarrow \sim p$). Sedangkan langkah ketiga diharapkan sampai ….. temuan-temuan dari konsep-konsep tersebut, yaitu menemukan nilai-nilai kebenaran dari konsep-konsep pernyataan tersebut. Kemudian sebagai langkah akhir melakukan pengujian (bisa melalui table kebenaran) dan refleksi atas efektivitas pendekatan yang digunakan.

Dalam arahan dan bimbingan pada tahap awal diharapkan tiap kelompok mampu memberikan contoh pernyataan implikasi yang dibangun dari lingkungan kehidupannya, misal

1.	Implikasi	: Jika ia orang Indonesia maka ia orang Asia	(B)
	Konvers	: Jika ia orang Asia maka ia orang Indonesia	(S)
	Invers	: Jika ia bukan orang Indonesia maka ia bukan orang Asia	(S)
	Kontrapositif	: Jika ia bukan orang Asia maka ia bukan orang Indonesia	(B)
2.	Implikasi	: Jika dua garis sejajar maka dua garis itu tidak berpotongan	(B)
	Konvers	: Jika dua garis tidak berpotongan maka dua garis itu sejajar	(S)
	Invers	: Jika dua garis tidak sejajar maka dua garis itu berpotongan	(S)
	Kontrapositif	: Jika dua garis berpotongan maka dua garis itu tidak sejajar	(B)

Melalui pengecekan dengan table kebenaran, haruslah sampai pada bentuk

1. Nilai kebenaran implikasi $p \rightarrow q$ = BSBB
2. Nilai kebenaran konvers $q \rightarrow p$ = BBSB
3. Nilai kebenaran invers $\sim p \rightarrow \sim q$ = BBSB
4. Nilai kebenaran kontrapositif $\sim q \rightarrow \sim p$ = BSBB

Diharapkan sampai pada kesimpulan bahwa nilai kebenaran pernyataan implikasi sama dengan nilai kebenaran pernyataan kontrapositifnya. Sedangkan nilai kebenaran konvers sama dengan nilai kebenaran inversnya. Mereka diharapkan pula untuk sampai pada bentuk ekuivalensi logis

1. $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$
2. $q \rightarrow p \Leftrightarrow (\sim p \rightarrow \sim q)$

SEbagai pengecekannya atau pembuktiannya haruslah sampai pada penggunaan table kebenaran, dan hasilnya pasti merupakan tautology (B semua), bukan kontradiksi (S semua) dan bukan kontingensi (sebagian B dan sebagian S).

F. Kemungkinan Kesalahan Konsep dalam Pembelajaran Logika Matematika

Ada suatu catatan yang perlu kita ketahui sehubungan dengan kesalahan konsep dalam pembelajaran logika matematika di sekolah. Hal ini penting untuk kita ketahui sebagai antisipasi sekaligus sebagai pengelaman yang berharga bagi setiap calon guru maupun guru matematika. Namun tentu saja tidak semua kesalahan atau kemungkinan kesalahan konsep dapat kita diskusikan di sini. Dalam hal ini hanyalah suatu contoh kesalahan konsep yang bersifat mendasar, sehingga mengakibatkan fatalnya pembelajaran matematika yang bermakna.

Berdasarkan temuan penulis mengkaji buku-buku matematika sekolah yang banyak beredar di lapangan ada beberapa buku yang penulis pandang telah terjadi kesalahan konsep yang sangat mengganggu dan merugikan bagi guru dan peserta didik yang mempelajari matematika, khususnya untuk konsep-konsep yang sedang kita diskusikan sekarang ini (logika matematika). Misalnya tentang konsep kalimat matematika tertutup (pernyataan/ preposisi) dan kalimat matematika terbuka.

Ada beberapa buku yang mendefinisikan kalimat terbuka (bukan preposisi) adalah kalimat matematika yang memuat variabel.

Contoh 37

a. $x + 2 = 5$

b. Ia adalah seorang guru matematika

c. $y^2 + y - 6 = 0$

d. $x + 2 \geq 5$

e. $(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$

f. $x + 2 > x + 5$

Contoh-contoh (a), (b), (c), dan (d) memang memuat variable. Contoh (a) variabelnya adalah x, contoh (b) variabelnya adalah "ia", contoh (c) varabelnya adalah y dan contoh (d) variabelnya adalah x. Contoh-contoh (a), (b), (c), dan (d) adalah kalimat terbuka, karena belum mempunyai nilai kebenaran. Contoh (a) dan (c) adalah bentuk persamaan (*equation*) sedangkan contoh (d) adalah bentuk pertidaksamaan (*inequation*). Sedangkan contoh (e) dan (f) walaupun memuat variable yaitu x, bukanlah kalimat terbuka, tetapi kedua-duanya adalah kalimat tertutup, sebab mempunyai nilai kebenaran. Contoh (e) selalu benar unttuk bilangan variable x. Jadi contoh (e0 adalah kalimat matematika tertutup yang bernilai benar. Contoh (f) adalah kalimat tertutup yang nilai kebenarannya salah, sebab untuk berbagai variabel x akan selalu bernilai salah. Contoh (f) adalah sebuah bentuk ketidaksamaan (*inequality*).

Jadi, tidaklah tepat kalau mendefinisikan kalimat matematika terbuka sebagai kalimat matematika yang memuat variabel, karena ada kalimat matematika tertutup yang memuat variabel. Nampaknya akan lebih tepay jika mendefinisikan kalimat terbuka sebagai kalimat yang tidak (yang belum) mempunyai nilai kebenaran, artinya kalimat yang tidak benar ataupun tidak salah. Sedangkan lawannya adalah kalimat matematika tertutup (preposisi), yaitu kalimat matematika yang mempunyai nilai kebenaran, artinya kalimat yang sudah pasti benarnya atau sudah pasti salahnya, tidak dua-duanya pada saat yang sama.

Demikianlah sedikit catatan tentang kesalahan konsep yang terjadi dalam pembelajaran konsep-konsep logika matematika di SMA. Malahan tidak menutup kemungkinan masih ada kesalahan-kesalahan konsep yang mungkin pernah ditemukan oleh para pembaca. Oleh karenanya melalui diskusi-diskusi baik dengan sesama guru matematika di sekolah maupun dalam kegiatan musyawarah guru mata pelajaran matematika (MGMP) ada baiknya membahas permasalahan miskonsepsi sesuai pengalaman kita masing-masing.

Malahan ada baiknya pula model-model pembelajaran yang bersifat inovasi seperti telah didiskusikan di atas untuk dicoba baik dalam mengatasi miskonsepsi maupun untuk bahasan-bahasan lainnya. Akan lebih baik lagi kalau kegiatan semacam ini dijadikan sebagai kegiatan penelitian tindakan kelas (*classroom action research*). Kegiatan penelitian tindakan kelas (PTK) ini merupakan salah satu jenis karya ilmiah dalam pengembangan profesi yang akan memberikan dampak positif kepada kita sebagai guru matematika yang professional.

Selanjutnya untuk lebih memantapkan pemahaman Anda terhadap materi **Kegiatan Belajar di atas**, cobalah kerjakan soal-soal **Latihan** berikut.

Latihan

1. Tulislah masing-masing tiga buah contoh
   a. penyataan yang benar
   b. pernyataan yang salah
   c. bukan pernyataan

2. Jika p : Semua kucing mempunyai ekor
   Dan q : 3 adalah bilangan genap
   Susunlah pernyataan-pernyataan tunggal tersebut ke dalam suatu pernyataan majemuk dengan operasi logika sebagai berikut, dan tentukan pula nilai kebenarannya
   a. $\sim p \vee \sim q$
   b. $p \wedge \sim q$
   c. $\sim p \vee q$

3. Sebutkanlah ucapan dari tiap pernyataan berkuantor dengan simbol logika seperti berikut :
   a. $(\exists\, x \in R)\,(x^2 + 5x + 6 = 0)$
   b. $(\forall\, x \in R)\,[\, x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)\,]$
   c. $(\exists\, y)\,(\forall\, x)\,(x + y = 0)$

4. Tentukan negasi dari pernyataan berikut :

a. $(\forall x)[x^2 - 4 = (x+2)(x-2)]$

b. $(\exists x)(x^2 + 2x - 8 = 0)$

c. $(\forall x)(\exists y)(x + y = x)$

5. Buktikanlah validitas atau invaliditas argumen berikut

Jika Fakultas Tarbiyah menghasilkan guru matematika, maka Fakultas Tarbiyah memiliki Program Studi Pendidikan Matematika.

Fakultas Tarbiyah memiliki Program Studi Pendidikan Matematika.

Jadi Fakultas Tarbiyah menghasilkan guru matematika.

Setelah Anda mengerjakan soal-soal Latihan di atas, bandingkanlah jawabannya dengan petunjuk (rambu-rambu) jawaban berikut.

Petunjuk Jawaban Latihan

1. a. Misalnya: Ada 12 bulan dalam satu tahun.
   b. Misalnya: 13 habis dibagi oleh 2.
   c. Misalnya: Ini adalah barang yang silindris.

2. a. Beberapa kucing tidak mempunyai ekor atau 3 bukan bilangan genap (B).
   b. Semua kucing mempunyai ekor dan 3 bukan bilangan genap (B).
   c. Beberapa kucing tidak mempunyai ekor atau 3 bilangan genap (S).

3. a. Ada x anggota bilangan real sehingga berlaku $x^2 + 5x + 6 = 0$
   b. Untuk semua x anggota bilangan real berlaku $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$
   c. Ada sekurang-kurangnya satu harga y, sehingga untuk semua harga x berlaku $x + y = 0$.

4. 1. a. $\sim(\forall x)[x^2 - 4 = (x+2)(x-2)] = (\exists x) \sim [x^2 - 4 = (x+2)(x-2)]$

$$= (\exists x)[x^2 - 4 \neq (x+2)(x-2)]$$

b. $\sim(\exists x)(x^2 + 2x - 8 = 0) = (\forall x) \sim(x^2 + 2x - 8 = 0)$

$= (\forall x)(x^2 + 2x - 8 \neq 0)$

c. $\sim(\forall x)(\exists y)(x + y = x) = (\exists x)(\forall y)(x + y \neq x)$

5. a. Premis mayor: Kalau pedal gas ditekan, mobil berjalan cepat.

Premis minor: Pedal gas tidak ditekan.

b. Konklusinya: Mobil berjalan lambat.

c. Jika: p = pedal gas ditekan.

q = mobil berjalan cepat

maka argumen soal di atas menjadi

$p \to q$

$\sim p$

$\therefore \sim q$

Bentuk ini merupakan bentuk invaliditas argumen MA.

Selanjutnya buatlah rangkuman dari uraian materi Kegiatan Belajar 1 di atas, kemudian bandingkanlah dengan alternatif rangkuman berikut.

Rangkuman

1. Pernyataan

Pernyataan atau preposisi atau kalimat matematika tertutup adalah kalimat matematika yang mempunyai nilai kebenaran, artinya sudah pasti benarnya atau sudah pasti salahnya dan tidak mempunyai dua arti. Sedangkan lawannya adalah kalimat matematika terbuka atau bukan pernyataan atau bukan preposisi, yaitu kalimat yang belum mempunyai nilai kebenaran, artinya belum mempunyai kepastian benar atau salah.

2. Pernyataan Tunggal dan Pernyataan Majemuk

Pernyataan tunggal adalah pernyataan sederhana yang hanya terdiri dari satu kalimat, dan tidak mengandung suatu pernyataan lain sebagai komponen atau komponen bagiannya. Sebaliknya pernyataan mjemuk adalah pernyataan yang mengandung pernyataan lain sebagai komponennya.

3. Nilai Kebenaran

Karena setiap pernyataan hanyalah benar atau salah, maka kepada setiap pernyataan itu diberi nilai kebenaran, iatu benar (B) dan salah (S). Dalam hal ini nilai kebenaran itu mencakup pula nilai kebenaran pernyataan tunggal maupun pernyataan majemuk.

4. Operasi Logika

Operasi-operasi logika matematika adalah kata-kata perangkai untuk membentuk pernyataan majemuk dari beberapa pernyataan tunggal. Operasi-operasi logika itu meliputi negasi (penyangkalan: $\sim$), konjungsi (dan: $\wedge$), disjungsi (atau: $\vee$), implikasi (jika maka: $\rightarrow$) dan biimplikasi (jika dan hanya jika: $\leftrightarrow$). Urutan pemakaian operasi-operasi logika berturut-turut negasi, konjungsi, disjungsi, implikasi dan biimplikasi, kecuali jika ada tanda kurung, maka urutan pengerjaan berturut-turut kurung kecil ( ), kurung kurawal { } dan terakhir kurung besar [ ].

5. Tabel Kebenaran

Tabel kebenaran adalah tabel untuk memudahkan menentukan nilai kebenaran dari suatu pernyataan majemuk. Banyaknya baris dan banyaknya kolom dari table ini tergantung pada banyaknya komponen yang akan dicari kebenarannya (2^n dengan n = banyaknya komponen).

6. Kuantor

Suatu kalimat terbuka dapat menjadi kalimat tertutup yang mempunyai nilai kebenaran setelah dibubuhi kuantor. Kuantor ini dapat dibedakan menjadi dua jenis, yaitu kuantor universal dan kuantor eksistensial.

Kuantor universal yang dinotasikan “ $\forall$ “ mempunyai arti “semua” atau “setiap”, dan kuantor eksistensial yang dinotasikan “ $\exists$ “ mempunyai arti “beberapa” atau “sekurang-kurangnya satu”. Pada dasarnya kuantor itu hanya ada dua macam seperti tersebut di atas, walaupun muncul dalam berbagai macam bentuk.

Ada dua definisi yang banyak dipakai dalam pembahasan kuantor, yaitu

1. $(\forall x)(\exists y)\, p(x, y) \Leftrightarrow (\forall x)\,[(\exists y)\, p(x, y)]$
2. $(\exists y)(\forall x)\, p(x, y) \Leftrightarrow (\exists y)\,[(\forall x)\, p(x, y)]$.

Selain kedua definisi pokok ini dikenal pula

1. $(\exists y)(\forall y)\, p(x, y)$ berarti "Untuk tiap x dan untuk tiap y berlaku p (x , y)".
2. $(\exists x)(\exists y)\, p(x, y)$ berarti " Ada x dan ada y sehingga berlaku p (x , y).

Sebaliknya, penggabungan dua kuantor yang berbeda tidak memenuhi sifat komutatif, karena pernyataan-pernyataan akhirnya tidaklah ekuivalensi logis, misalnya :

1. $(\forall x)(\exists y)\, p(x / y) \Leftrightarrow (\exists y)(\forall y)\, p(x, y)$
2. $(\exists x)(\forall y)\, p(x / y) \Leftrightarrow (\forall x)(\exists y)\, p(x, y)$

7. Negasi Pernyataan Berkuantor

Selain kedua definisi pokok kuantor (dalam Kegiatan Belajar 1 modul ini), juga ada dua buah postulat yang berlaku secara umum dan dapat diterima pengertiannya secara logis, yaitu :

1. $\sim [(\forall x)\, p(x)] \Leftrightarrow (\exists x)\,[\sim p(x)]$
2. $\sim [(\exists x)\, p(x)] \Leftrightarrow (\forall x)\,[\sim p(x)]$

Kedua postulat kuantor ini selain dipakai dalam menentukan nilai kebenaran suatu proposisi berkuantor, juga bersama-sama dengan definisi pokok terdahulu akan sangat membantu dalam menentukan negasi proposisi berkuantor, baik dengan satu kuantor maupun dengan dua kuantor. Sedangkan penekanan pemakaiannya, yaitu untuk keperluan mengubah dari negasi kuantor universal ke kuantor eksistensial, dan dari negasi kuantor eksistensial ke kuantor universal.

8. Penarikan Kesimpulan

Argumen didefinisikan sebagai kelompok proposisi yang jika dapat diturunkan konklusi secara logis dari premis-premisnya disebut valid, jika tidak dinamakan argumen yang invalid. Penarikan konklusi dalam penentuan validitas argumen tidaklah sederhana, sebab erat sekali kaitannya dengan kebenaran dan kesalahan premis-premisnya.

Selanjutnya untuk menguji tingkat penguasaan Anda terhadap uraian Kegiatan Belajar di atas, kerjakanlah soal-soal **Tes Formatif** berikut ini.

Tes Formatif

Petunjuk: Berilah komentar atau penjelasan dari setiap pernyataan berikut, dan tentukan pula nilai kebenarannya. Jawaban yang benar skornya 1 dan jawaban yang salah skornya 0.

1. Pernyataan : “Candi Borobudur adalah candi Budha dan Candi Prambanan adalah candi Hindu”
   A. Pernyataan tunggal
   B. Bukan pernyataan
   C. Pernyataan majemuk
   D. Pernyataan majemuk terbatas.

2. Jika p : “Semua bilangan asli merupakan bilangan real” dan
   q : “Semua bilangan ganjil merupakan bilangan genap”
   maka diantara berikut yang benar adalah
   A. $\sim (p \vee q)$
   B. $\sim p \wedge \sim q$
   C. $\sim p \vee q$
   D. $\sim (p \wedge q)$.

3. Jika r : “Matematika merupakan ilmu penting” dan
   s : “Matematika diajarkan di sekolah”
   maka kalimat dari simbol logika $s \vee \sim r$ adalah

A. Matematika diajarkan di sekolah dan matematika bukan ilmu yang penting

B. Matematika tidak diajarkan di sekolah atau matematika bukan ilmu yang penting

C. Matematika tidak diajarkan di sekolah dan matematika ilmu yang penting

D. Matematika diajarkan di sekolah atau matematika ilmu yang penting

4. τ { ~ [p $\wedge$ (~ p)] } adalah

A. BS

B. SB

C. SS

D. BB

5. Pernyataan berkuantor ($\forall$x) ($\exists$ y) (x + y = 0), jika diucapkan dengan kata-kata

A. Ada x dan y sehingga untuk semua x berlaku x + y = 0

B. Untuk semua x dan y ada x + y = 0

C. Ada x untuk sembarang y sehingga berlaku x + y = 0

D. Untuk sebarang x ada y sehingga berlaku x + y = 0

6. Negasi dari pernyataan ($\exists$ p) ($\forall$q) (q + p = 0).

A. ($\forall$ p) ($\exists$ q) (q + p $\neq$ 0)

B. ($\exists$ p) ($\forall$ q) (q + p $\neq$ 0)

C. ($\forall$ p) ($\exists$ q) (q + p = 0)

D. B. ($\exists$ p) ($\forall$ q) (q + p = 0)

7. Ucapan dari simbol logika berkuantor : "Setidak-tidaknya ada sesuatu sedemikian rupa, sehingga sesuatu itu adalah bukan bilangan real yang disebut bilangan imajiner (R , I), ialah :

A. ($\exists$ x) [~ R (x) $\wedge$ I (x)]

B. ($\exists$ x) [~ R (x) $\rightarrow$ I (x)]

C. ($\exists$ x) ~[R (x) $\vee$ I (x)]

D. $\sim (\exists x)[\sim R(x) \rightarrow I(x)]$

8. Di antara susunan proposisi-proposisi argumen valid berikut yang tidak mungkin adalah :
   A. Premis mayor salah, minor salah, konklusinya salah.
   B. Premis mayor salah, minor salah, konklusinya benar.
   C. Premis mayor benar, minor benar, konklusi salah.
   D. Premis mayor benar, minor salah, konklusi salah.

9. Di antara pernyataan berikut yang benar adalah:
   A. Sebuah argumen yang invalid akan diperoleh dari proposisi-proposisi yang benar saja.
   B. Sebuah argumen valid hanya diperoleh jika nilai kebenaran premis-premis dan konklusinya benar.
   C. Dalam argumen yang invalid tidak mungkin ada konklusi yang benar.
   D. Dalam argumen yang valid dengan premis-premis yang benar diperoleh konklusi yang benar pula.

10. Di antara berikut yang merupakan kesalahan konsep dalam …. Kalimat terbuka adalah
    A. $x + 3 \geq 3x$ adalah kalimat terbuka
    B. $x + 3 = 3x + 3$ adalah kalimat terbuka
    C. $x + 3 = x + 3$ adalah kalimat terbuka
    D. $x + 3 \leq x + 3$ adalah kalimat terbuka

KUNCI JAWABAN TES FORMATIF

1. C Karena terdiri dari dua pernyataan tunggal, yaitu : *Candi Borobudur adalah candi Budha dan Candi Prambanan adalah Candi Hindu*, berarti pernyataan majemuk.

2. D τ (p) = D, τ (q) = S dan τ (~ (p $\wedge$ q)) = B

3. A s $\vee$ ~ r : Matematika diajarkan di sekolah atau matematika bukan ilmu yang penting.

4. D τ {~ [p $\wedge$ (~ p)]} = BB. Didapat dari tabel nilai kebenaran.

5. D $(\forall x)\ (\exists y)\ (x + y = 0)$, diucapkan: "Untuk semua x ada y, sehingga berlaku x + y = 0".

6. A $\sim (\exists\, p)\ (\forall q)\ (q + p = 0) \Leftrightarrow (\forall\, p) \sim (\forall q)\ (q + p = 0)$

$$\Leftrightarrow (\forall\, p)\ (\exists q) \sim (q + p = 0)$$

$$\Leftrightarrow (\forall\, p)\ (\exists q)\ (q + p \neq 0)$$

7. A "Setidak-tidaknya ada sesuatu sedemikian ($\exists$x), sehingga sesuatu itu bukan bilangan real (~R) yang disebut ($\wedge$) bilangan imajiner (I)" berarti ($\exists$x) [(~R) $\wedge$ I(x)]

8. C.

(1). $A \to B$	$/\therefore A \to (B \vee C)$	
(2). A	$/\therefore\ B \vee C$	CP
(3). B	1, 2 MP	
(4). $B \vee C$	3 Add.	

9. A Bentuk pernyataan: $(A \rightarrow B) \rightarrow [A \rightarrow (A \wedge B)]$ pembuktian tautologinya dalam bentuk validitas argumen:

(1). $A \rightarrow B$	$/\therefore A \rightarrow (A \wedge B)$	
(2). A	$/\therefore A \wedge B$	CP
(3). B	1, 2 MP	
(4). $A \wedge B$	2, 3 Conj	

10. C $x + 3 = x + 3$ adalah kalimat tertutup yang disebut kesamaan (equality) yang nilai kebenarannya adalah benar (berlaku untuk semua harga $x \in R$ = bilangan real). Pada umumnya buku-buku menyebutnya kalimat terbuka dengan alas an memuat variable (ada miskonsepsi).

Daftar Pustaka

Abdul Kodir, dkk. (1979). *Matematika untuk SMA*. Jakarta: Depdikbud.

Andi Hakim Nasution, dkk. (1994). *Matematika 2 untuk Sekolah Menengah Umum*. Jakarta: Balai Pustaka.

Bunarso Tanuatmodjo, dkk. (1977). *Matematika Jilid 1*. Bandung: BPG Tertulis. Depdikbud.

Depdiknas. (2002). *Contextual Teaching and Learning* (CTL). Jakarta: Direktorat Jenderal Pendidikan Dasar Menengah.

Irving M. Copi. (1973). *Symbolik Logic*. Fourth edition. New York: Macmilan Publishing Co. Inc.

Karso. (2003). *Pengantar Dasar Matematika*, cetakan keempat. Jakarta: Pusat Penerbitan Universitas Terbuka Depdiknas

Lilik Hendrajaya dan Ismail (1975). *Matematika untuk SLA & Sederajat*. Bandung: Ganeca Science Book Leries.

Oesman Arif. (1978). *Logika Simbol (Logika Modern)*. Jakarta, Surabaya: PT. Bina Ilmu.

Ruseffendi, E.T. (1979). *Dasar-dasar Matematika Modern untuk Guru, Edisi ketiga.* Bandung : Tarsito

Robert Sharvy. (1970). *Logic on Outline*. Totowa, New Jersey : Little field, Adam & Co.

Stephen, W. J. dan Gallagher, S. A. (2003). *Problem Based Learning*. [online]. Tersedia http://www. Score rims h. 12 Ca.vs/ problem html.

Wahyudin. (1984). *Pengantar Sistem Matematika*. Bandung : Epsilon Grup.

Tim (1979). *Matematika Untuk SMA*. Jakarta : Depdikbud.