VEKTOR DAN OPERASINYA

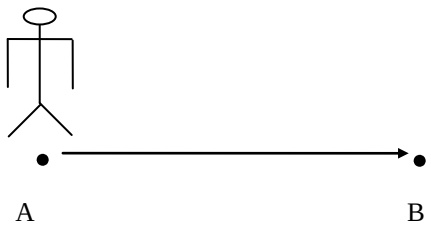
(ALJABAR LINEAR)

Oleh : H. Karso

FPMIPA UPI

A. Pengertian Vektor

Perhatikan dua buah titik atau tempat, yaitu titik A dan titik B yang tertentu. Misalkan kita berada pada titik A kemudian berpindah tempat ke titik B, maka terjadilah suatu **perpindahan**, atau **pergeseran**, atau **translasi** dari titik A ke titik B.



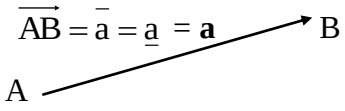
Gambar 4.1

Perpindahan kedudukan dari titik A ke titik B ini ditentukan oleh dua hal, yaitu **berapa jauh jaraknya** dan **ke arah mana** perpindahan tempat dilakukan.

Setiap perpindahan tempat yang mempunyai **jarak tertentu** (antara titik A dan titik B) dan **arah tertentu** (dari titik A ke titik B) yang digambarkan dengan **anak panah** (yang berpangkal di titik A dan berakhir di titik B) dinamakan **vektor perpindahan** atau **vektor translasi**, disingkat **vektor**. Vektor yang titik awalnya di A dan titik akhirnya di B dinyatakan dengan simbol $\overrightarrow{AB}$.

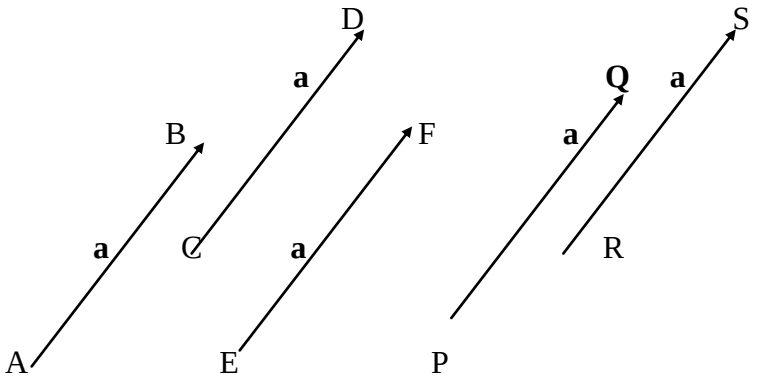
Vektor AB, artinya suatu vektor dengan titik A sebagai titik awal (titik pangkal atau titik tangkap), titik B sebagai titik akhir (titik ujung atau titik terminal), arahnya dari A ke B, dan besarnya (panjangnya) adalah jarak dari A ke B (panjang ruas garis AB).

Simbol lain untuk menyatakan vektor AB atau $\overrightarrow{AB}$, yaitu dengan menuliskan huruf kecil yang dibubuhi ruas garis di bawahnya, atau boleh pula tanpa ruas garis tetapi ditulis atau dicetak agak tebal, misalnya: $\underline{a}$ = **a** (lihat Gambar 4. 2).



Gambar 4. 2

Di dalam geometri, jika diketahui suatu vektor a, akan selalu didapat suatu translasi yang bersifat tunggal dan dinyatakan oleh ruas garis (segmen) berarah yang mempunyai besar dan arah yang sama dengan vektor a. Dengan demikian, maka di dalam geometri, suatu vektor didefinisikan sebagai suatu translasi dari suatu titik ke titik yang lain. Hal ini berarti bahwa setiap vektor dapat ditentukan oleh besar dan arah. Dimanapun suatu vektor berada, dan berapapun banyaknya vektor, jika masing-masing vektor itu mempunyai panjang (besar) dan arah yang sama, maka himpunan vektor itu dapat dianggap satu vektor saja. Tiap ruas garis berarah dalam himpunan itu disebut **wakil** dari vektor (Gambar 4. 3).

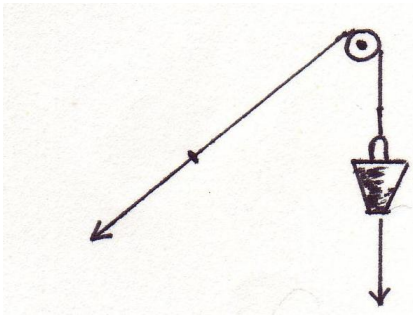


Gambar 4. 3

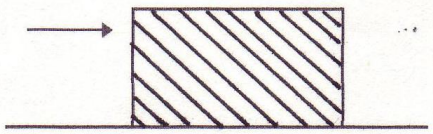
Jadi, dapatlah kita simpulkan bahwa **vektor adalah himpunan ruas garis (segmen) berarah yang mempunyai panjang (besar) dan arah yang sama, dan salah satu dari anggota himpunan tersebut dapat mewakilinya** (definisi).

Dapatkah Anda memberikan contoh besaran yang mempunyai besar dan arah seperti vektor tadi?. Dalam kehidupan sehari-hari, terutama dalam fisika, banyak sekali dijumpai konsep yang mempunyai besar dan arah. Sebagai contoh yang sangat mudah adalah besaran gaya. Gaya adalah besaran vektor, karena gaya selain mempunyai besar, juga mempunyai arah, misalnya :

1. Gaya tarik seseorang yang sedang menimba air, arahnya adalah miring ke bawah sedangkan arah tarik bumi terhadap ember adalah tegak lurus ke bawah. (Gambar 4. 4).



Gambar 4. 4



Gambar 4. 5

2. Gaya dorong seseorang yang sedang menggeserkan benda di atas lantai, arahnya mendatar ke samping (Gambar 4. 5).

Bagaimana dengan besaran-besaran seperti percepatan, kecepatan, medan magnet dan sejenisnya? Besaran-besaran tersebut adalah besaran-besaran yang mempunyai besar dan arah, karenanya dinamakan vektor. Sedangkan besaran-besaran seperti jarak atau panjang yang hanya mempunyai besar saja dinamakan **skalar**. Besaran skalar lainnya, misalnya luas, berat, isi, masa, waktu, dan sebagainya.

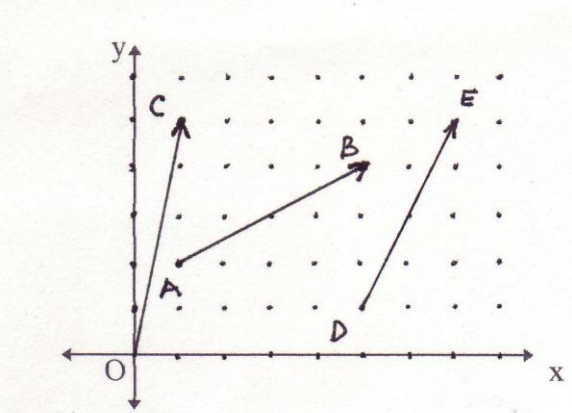
Sebagai tugas, cobalah Anda kerjakan soal-soal latihan pertama nomor 1a, 1b, dan 1c.

B. Vektor-vektor di R^2 (Vektor Bidang)

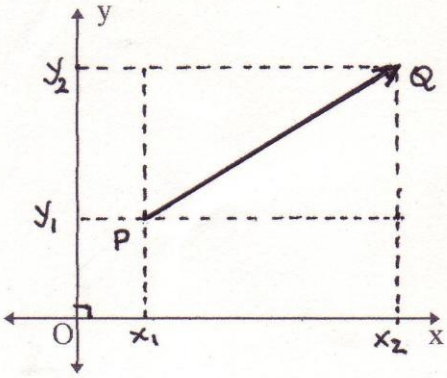
1. Penulisan Vektor di R^2

Sekarang kita perhatikan beberapa vektor yang terletak dalam ruang berdimensi 2 (vektor bidang) seperti ditunjukkan oleh Gambar 4. 6 dan 4. 7 berikut.

Pada kedua gambar ini terlihat susunan sumbu koordinat yang berpotongan tegak lurus, yaitu sistem koordinat Cartesius ortogonal XOY. Sumbu X adalah sumbu mendatar (horizontal), sumbu y adalah sumbu tegak (vertikal) dan titik O sebagai titik pangkal koordinat.



Gambar 4. 6



Gambar 4. 7

Kemudian kita perhatikan vektor AB atau $\overrightarrow{AB}$ yang koordinat titik awalnya di A(1,2) dan koordinat titik akhirnya di B(5,4). Vektor AB ini dapat kita tulis dengan simbol

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ atau } \overrightarrow{AB} = [\,4\,,\,2\,]$$

Bilangan-bilangan 4 dan 2 yang diletakan di dalam kurung kecil ditulis secara tegak atau dalam kurung siku ditulis secara mendatar, dinamakan **komponen-komponen skalar** dari vektor AB. Mungkin diantaranya ada yang bertanya, dari mana datangnya komponen 4 dan 2 itu? Dapat Anda lihat, bahwa 4 adalah selisih dari absis titik B = x_B = 5 dengan absis titik A = x_A = 1, sedangkan 2 adalah selisih dari ordinat titik B = y_B = 4 dengan ordinat titik A = y_A = 2. Untuk jelasnya

$$AB = \begin{pmatrix} 5-1 \\ 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = [\,4\,,\,2\,]$$

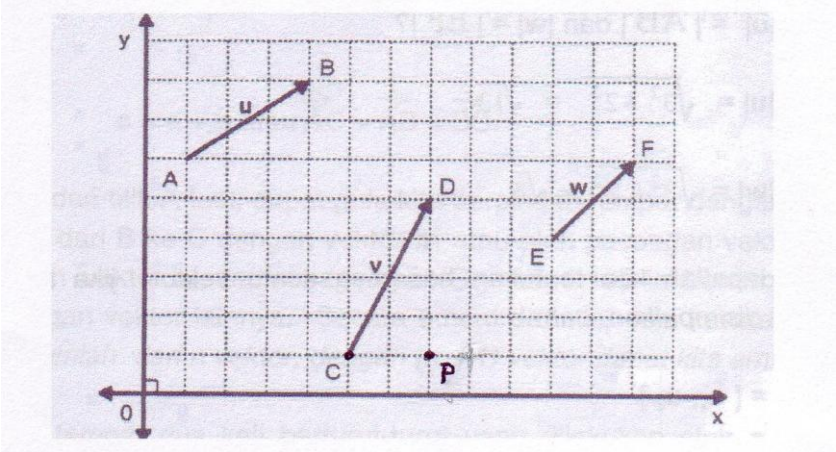
Masih dari Gambar 4. 6 di atas, bagaimanakah komponen-komponen skalar vektor OC dan vektor DE? Tentunya OC = [1 , 5] dan DE = [2 , 4]. Vektor OC disebut vektor posisi sebab titik awalnya di titik pangkal koordinat O(0,0).

Dari ilustrasi di atas dapat disimpulkan bahwa penulisan vektor PQ atau $\overrightarrow{PQ}$ seperti tampak pada Gambar 4. 7 di atas dapat kita tulis dengan berbagai cara seperti berikut ini :

$$PQ = \underline{u} = \mathbf{u} = \begin{pmatrix} x_q - x_p \\ y_q - y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} = [\, x_2 - x_1 \,,\, y_2 - y_1 \,].$$

2. Panjang atau Besar Vektor di R^2

Sekarang kita perhatikan tiga buah vektor yang terdapat pada Gambar 4. 8, yaitu u, v, dan w. Anda tentunya dapat menentukan koordinat dari masing-masing titik awal dan titik akhir dari ketiga vektor itu, misalnya v dengan titik awalnya di C(5,1) dan titik akhirnya di D(7,5). Jika Anda ingin mengetahui besar v, maka yang harus kita ukur adalah



Gambar 4. 8

panjang segmen CD yang lazimnya ditulis $|\,CD\,|$. Dengan demikian, tentunya besarnya v dalam nilai mutlak yang berarti selalu positif, jadi dapat kita tulis $|\mathbf{v}|$ (besarnya v).

Selanjutnya dengan bantuan teorema Pythagoras, kita dapatkan

$$|\,CD\,|^2 = |\,CP\,|^2 + |\,PD\,|^2$$

$$|\,CD\,|^2 = \pm\sqrt{|\,CP\,|^2 + |\,PD\,|^2}$$

$$= \sqrt{(7-5)^2 + (5-1)^2} \qquad \text{(diambil yang positif)}$$

$$= \sqrt{2^2 + 4^2}$$

$$= \sqrt{20}\ .$$

Jadi besarnya $\underline{v}$ adalah $|\mathbf{v}| = \sqrt{20}$.

Seandainya $\underline{v}$ ini ditulis dengan komponen-komponennya, maka tentunya akan Anda tulis

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix},$$

Dari mana komponen 2 dan komponen 4? Akibatnya perhitungan besar $\underline{v}$ atau kita tulis dengan $|\mathbf{v}|$ adalah :

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{2^2 + 4^2}$$
$$= \sqrt{20}$$

Bagaimana dengan $|\mathbf{u}| = |\mathrm{AB}|$ dan $|\mathbf{w}| = |\mathrm{EF}|$?

Tentunya $|\mathbf{u}| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$

dan $|\mathbf{w}|\sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$

Dengan demikian, dapatlah kita tentukan besarnya suatu vektor jika komponen-komponennya diketahui. **Jadi dapat disimpulkan**, **bahwa jika**

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = [\ u_1\ ,\ u_2\ ]$$

maka besarnya u atau panjangnya u yang ditulis $|\mathbf{u}|$ adalah

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{u_1^{\ 2} + u_2^{\ 2}}$$

Kemudian jika koordinat titik A(x_1,y_1) dan B(x_2,y_2), maka jarak d diantara kedua titik tersebut adalah panjang vektor AB (Gambar 4. 8). Karena

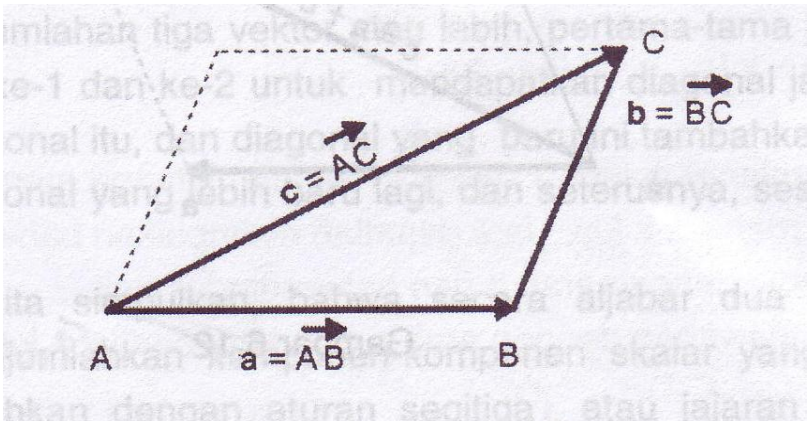
$$\mathrm{AB} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1)$$

maka

$$\mathrm{d} = |\mathrm{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

3. Penjumlahan Vektor (di R^2)

Kembali lagi pada konsep vektor sebagai gerak translasi, yaitu pergeseran tempat dari sutu titik ke titik lain. Misalkan kita melakukan perpindahan tempat dari titik A ke titik B yang jarak dan arahnya dinyatakan oleh **a**. Setelah berpindah tempat dari A ke B, kita melakukan perpindahan tempat sekali lagi, yaitu dari titik B ke titik C yang jarak dan arahnya dinyatakan oleh **b** sehingga tempat kedudukan kita yang baru adalah titik C (lihat gambar 4. 9). Perpindahan tempat berturut-turut yang dinyatakan oleh **a** dan **b**, ditunjukkan oleh vektor ketiga yaitu **c** yang titik pangkalnya di A dan titik ujungnya di titik C. Aturan untuk memperoleh **c** atau $\overrightarrow{AC}$,



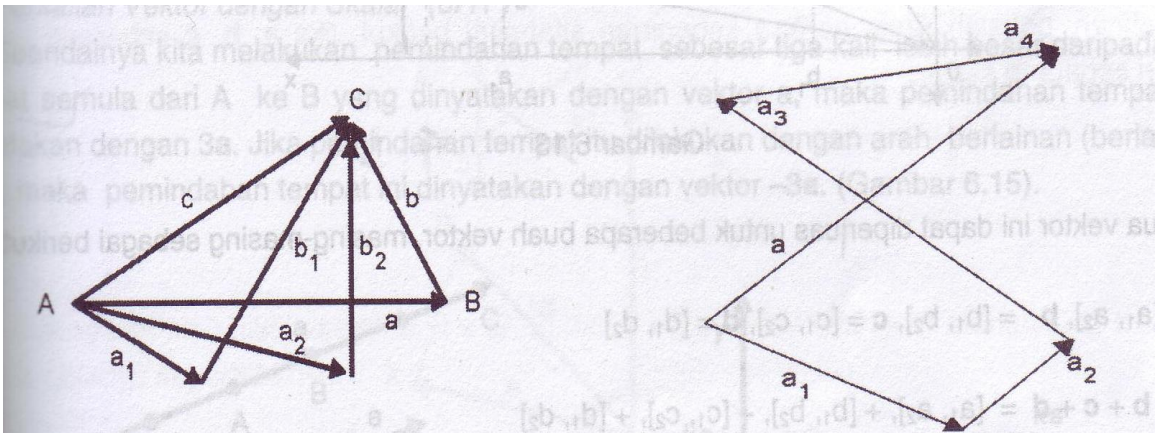
Gambar 4. 9

sebagai penjumlahan dari vektor **a** atau $\overrightarrow{AB}$ dengan **b** atau $\overrightarrow{BC}$ seperti ini dinamakan "aturan segitiga". Jadi, dapatlah kika katakan bahwa **c adalah jumlah dari vektor a dan b**, dan kita tulis :

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \text{ atau } \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}.$$

Untuk mencapai titik C dari titik A tadi, dapat pula kita berpindah tempat dengan vektor lain, misalnya dari A ke B dengan $\mathbf{a_1}$ dan dari B ke C dengan vektor $\mathbf{b_1}$ atau oleh pasangan vektor lainya seperti $\mathbf{a_2}$ dengan $\mathbf{b_2}$, vektor $\mathbf{a_3}$ dengan vektor $\mathbf{b_3}$, dst. (gambar 4.10). Ini berarti, bahwa suatu vektor c dapat dibentuk oleh pasangan vektor lainnya Secara umum dapatlah kita katakan bahwa **suatu vektor dapat dipandang sebagai jumlah dari n vektor, dengan (n - 1) vektor dapat kita ambil sembarang** (Gambar 4. 11).

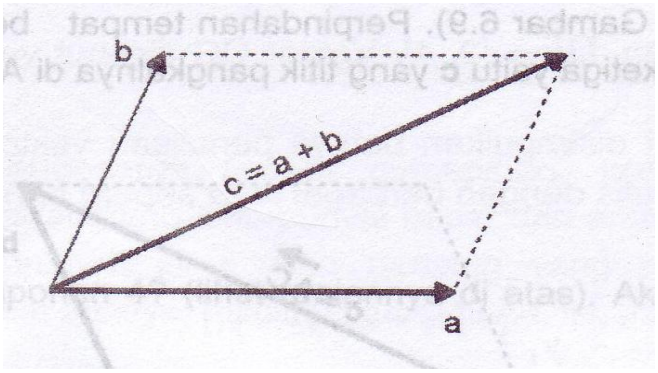
Peristiwa pemindahan tempat dua kali berturut-turut yang dilakukan oleh **a** dan **b** seperti pada contoh di atas tadi (Gambar 4. 9), jelas itu hasilnya tidak berubah, artinya **a** dan **b** masing-masing bekerja secara terpisah. Seandainya **a** dan **b** itu bekerjanya serempak, seperti halnya dalam contoh berikut ini.



Gambar 4.10

Gambar 4.11

Di atas permukaan sebuah sungai yang kecepatan dan arah arusnya dinyatakan oleh **a**, bergerak sepotong kayu (terapung) yang kecepatan dan arahnya dinyatakan oleh **b**. Jika pada waktu tertentu tempat yang dicapai oleh potongan kayu tersebut dinyatakan oleh vektor **c** = **a** + **b** yang serupa dengan contoh di atas (Gambar 4. 9 dan 4. 10), maka aturan untuk memperoleh vektor c seperti ini disebut **aturan jajarangenjang** (gambar 4. 12).



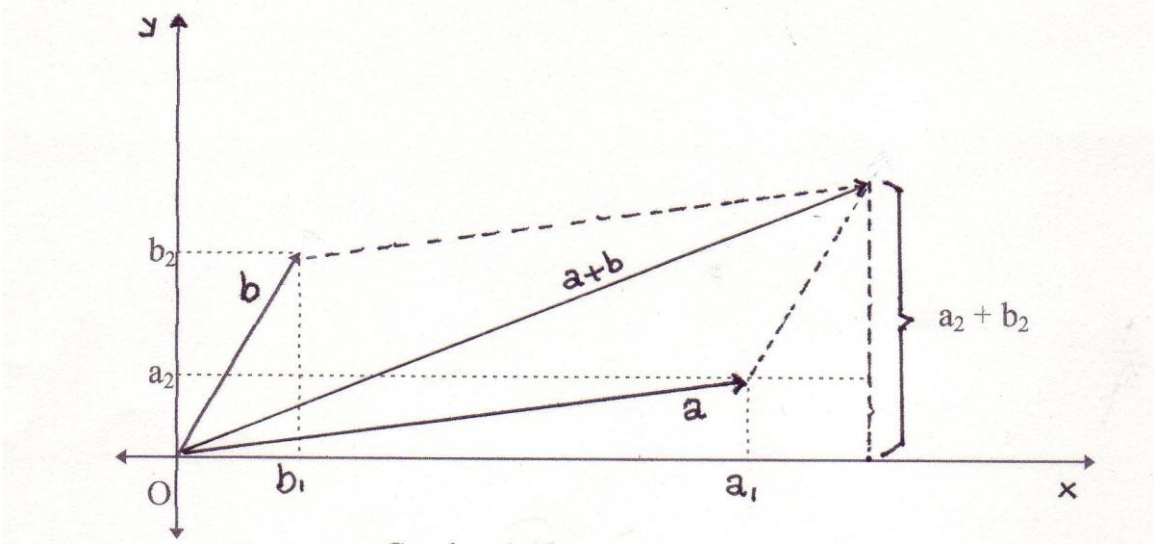
Gambar 4. 12

Setelah kita mengetahui aturan penjumlahan dua vektor (secara geometris) yang dapat dilakukan dengan aturan segiriga atau aturan jajarangenjang dan tentunya sangat berbeda dengan aturan penjumlahan dua buah bilangan.

Sekarang kita pandang (Gambar 4. 13) dengan vektor a = [a_1 , a_2] dan vektor b = [b_1 , b_2] maka dedefinisikan bahwa :

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = [\, a_1 , a_2 \,] + [\, b_1 , b_2 \,] = [\, a_1 + b_1, a_2 + b_2 \,]$$

dengan **a** + **b** adalah diagonal jajarangenjang dengan sisi-sisi **a** dan **b**.



Gambar 4. 13

Jumlah dua vektor ini dapat diperluas untuk beberapa buah vektor, masing-masing sebagai berikut :

Jika, $\mathbf{a} = [\, a_1 , a_2 \,]$, $\mathbf{b} = [\, b_1 , b_2 \,]$, $\mathbf{c} = [\, c_1 , c_2 \,]$, $\mathbf{d} = [\, d_1 , d_2 \,]$

maka $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} = [\, a_1 , a_2 \,] + [\, b_1 , b_2 \,] + [\, c_1 , c_2 \,] + [\, d_1 , d_2 \,]$

$= [\, a_1 + b_1 + c_1 + d_1, a_2 + b_2 + c_2 + d_2 \,]$

Sebagai contoh, Anda perhatikan tiga buah vektor berikut :

$\mathbf{u} = [\, 4 , 1 \,]$, $\mathbf{v} = [\, 1 , 5 \,]$, dan $\mathbf{w} = [\, -4 , 2 \,]$

$\mathbf{u} + \mathbf{v} = [\, 4 , 1 \,] + [\, 1 , 5 \,] = [\, 5 , 6 \,]$

$\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w} = [4 , 1 \,] + [\, 1 , 5 \,] + [\, -4 , 2 \,]$

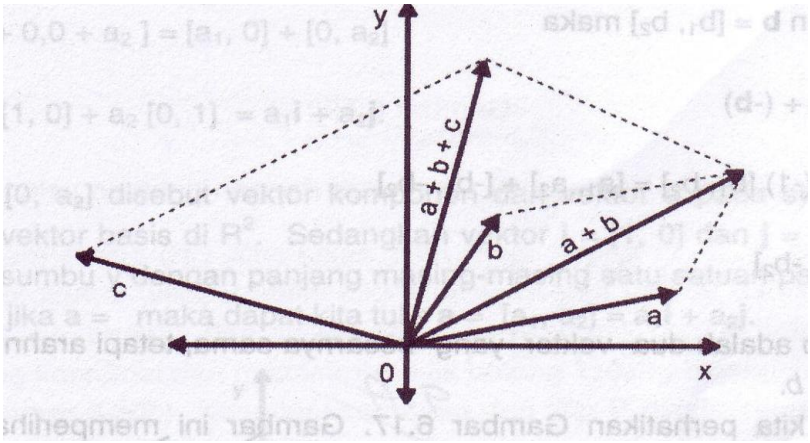
$= [\, 5 , 6 \,] + [\, -4 , 2 \,] = [\, 1 , 8 \,]$ atau

$\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w} = [\, 4 + 1 - 4 , 1 + 5 + 2 \,] = [\, 1 , 8 \,]$

Untuk menggambarkan penjumlahan tiga vektor atau lebih, pertama-tama jumlahkan dulu sepasang vektor, misalnya vektor vektor ke-1 dan ke-2 untuk

mendapatkan diagonal jajarangenjang, kemudian tambahkan vektor ke-3 pada diagonal itu, dan diagonal yang baru ini tambahkan lagi dengan vektor ke-4 sehingga didapatkan vektor diagonal yang lebih baru lagi, dst., dst., sesuai dengan jumlah vektor yang akan dijumlahkan.

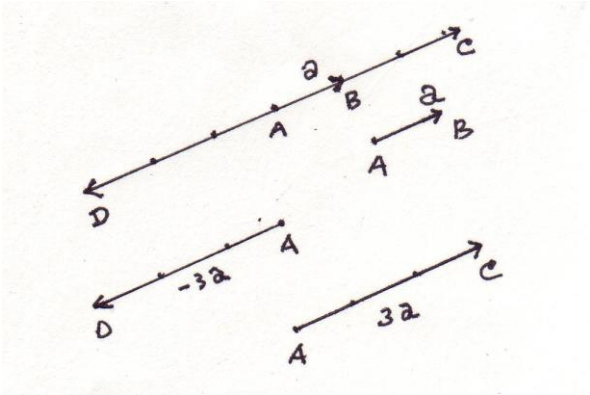
Secara umum dapatlah kita simpulkan, bahwa secara aljabar dua vektor atau lebih dapat dijumlahkan dengan cara menjumlahkan komponen-komponen skalar yang seletaknya, sedangkan secara geometris dapat dijumlahkan dengan aturan segitiga atau jajarangenjang yang dilakukan sepasang demi sepasang, artinya vektor pertama dijumlahkan dengan vektor kedua, kemudian hasilnya dijumlahkan dengan vektor ketiga, dan hasil inipun dijumlahkan lagi dengan vektor keempat, dan seterusnya.



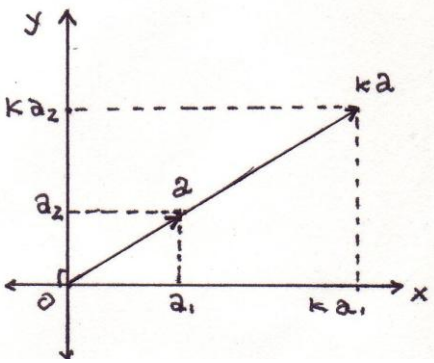
Gambar 4. 14

4. Perkalian Vektor dengan Skalar (di R^2)

Seandainya kita melakukan **pemindahan tempat sebesar tiga kali lebih besar daripada pemindahan tempat semula** dari A ke B yang dinyatakan dengan



Gambar 4. 15



Gambar 4. 16

vektor 3**a.** Jika pemindahan tempat itu dilakukan dengan arah **berlainan (berlawanan)** dari A ke D, maka pemindahan tempat ini dinyatakan dengan vektor -3**a**. (Gambar 4. 15).

Secara lebih umum lagi dapat kita perhatikan gambar 4. 16, yaitu jika k suatu skalar maka yang dimaksud dengan k**a** adalah vektor :

$$k\mathbf{a} = k\,[\,a_1\,,\,a_2\,] = [\,ka_1\,,\,ka_2\,]$$

Ini berarti, bahwa besar (panjang) vektor a dikalikan dengan k tanpa merubah arah vektor jika k > 0 dan panjangnya menjadi k kali. **Jadi dapatlah disimpulkan** bahwa:

jika k > 0, maka arah k**a sama** dengan arah **a** dan panjangnya k kali.

jika k < 0, maka arah k**a** berlawanan dengan arah **a** dan panjangnya k kali.

5. Selisih Dua Vektor (di R^2)

Perkalian vektor dengan skalar, dapat kita pakai untuk menentukan **selisih** dua vektor atau lebih. Misalnya :

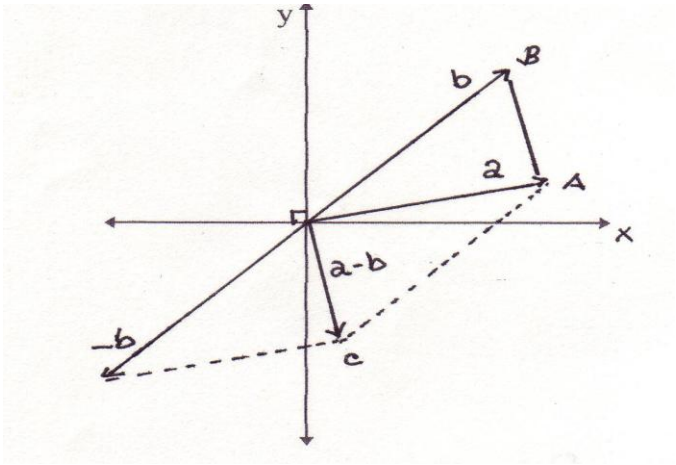
Jika $\mathbf{a} = [\,a_1\,,\,a_2\,]$ dan $\mathbf{b} = [\,b_1\,,\,b_2\,]$ maka

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = a + (-\mathbf{b})$$
$$= [a_1\,,\,a_2] + (-1)\,[b_1\,,\,b_2] = [a_1\,,\,a_2] + [-b_1\,,\,-b_2]$$
$$= [a_1 - b_1\,,\,a_2 - b_2]$$

Vektor b dan vektor -b adalah dua vektor yang besarnya sama, tetapi arahnya berlawanan. Vertor (-b) disebut **negatif vektor b**.

Untuk lebih jelasnya kita perhatikan Gambar 4. 17. Gambar ini memperlihatkan bahwa selisih vektor a dengan vektor b, yaitu **a - b** dapat dinyatakan dengan vektor BA, dan BA = OC. Cara ini lebih singkat daripada dengan terlebih dahulu menentukan negatif vektor b. Bagaimana dengan vektor b - a? Tentunya AB = (b - a).

Sebagai latihan, cobalah Anda periksa kebenaran sifat-sifat berikut, jika **a**, **b**, **c** sembarang vektor dengan m dan n sembarang skalar.



Gambar 4. 17

1. **a + b = b + a** (komutatif)
2. (**a** + **b**) + **c** = **a** + (**b** + **c**)
   = **a** + **b** + **c**
3. **a** + **o** = **a**
4. (mn)**a** = m(n**a**)
5. 0 . **a** = **o**
6. 1 . **a** = **a**
7. m . **o** = **o**
8. m . (**a** + **b**) = m**a** + m**b**
9. (m + n)**a** = m**a** + n**a**.

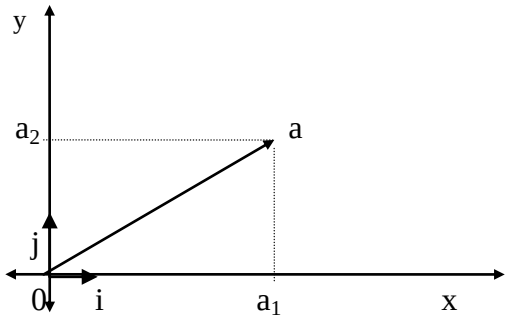
Sekarang akan kita pakai cara penjumlahan vektor dan perkalian skalar vektor untuk menguraikan sebuah vektor menjadi vektor-vektor komponen. Misal

a = [a_1 , a_2], maka vektor ini dapat kita tulis sbb :

a = [a_1 , a_2] = [a_1 + 0, 0 + a_2] = [a_1 , 0] + [0 , a_2]

$= a_1[\ 1\ ,\ 0\ ] + a_2\ [\ 0\ ,\ 1\ ] = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$

vektor $[\ a_1\ ,\ 0\ ]$ dan $[\ 0\ ,\ a_2\ ]$ disebut **vektor komponen** dari vektor a pada sumbu-sumbu koordinat atau disebut pula vektor-vektor basis di R^2. Sedangkan vektor $\mathbf{i} = [\ 1\ ,\ 0\ ]$ dan $\mathbf{j} = [\ 0\ ,\ 1\ ]$ berturut-turut terletak pada sumbu x dan sumbu y dengan panjang masing-masing satu satuan panjang disebut **vektor satuan** (Gambar. 4. 18). Jadi, jika $\mathbf{a} = [\ a_1\ ,\ a_2\ ]$ maka dapat kita tulis $\mathbf{a} = [\ a_1\ ,\ a_2\ ] = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$.



Gambar 4. 18

Sebagai contoh, jika diketahui, **u** = [2 , 2] dan **v** = [5 , 1] dan kita akan menghitung **u - v** serta **v** - 2**u**, maka caranya seperti berikut.

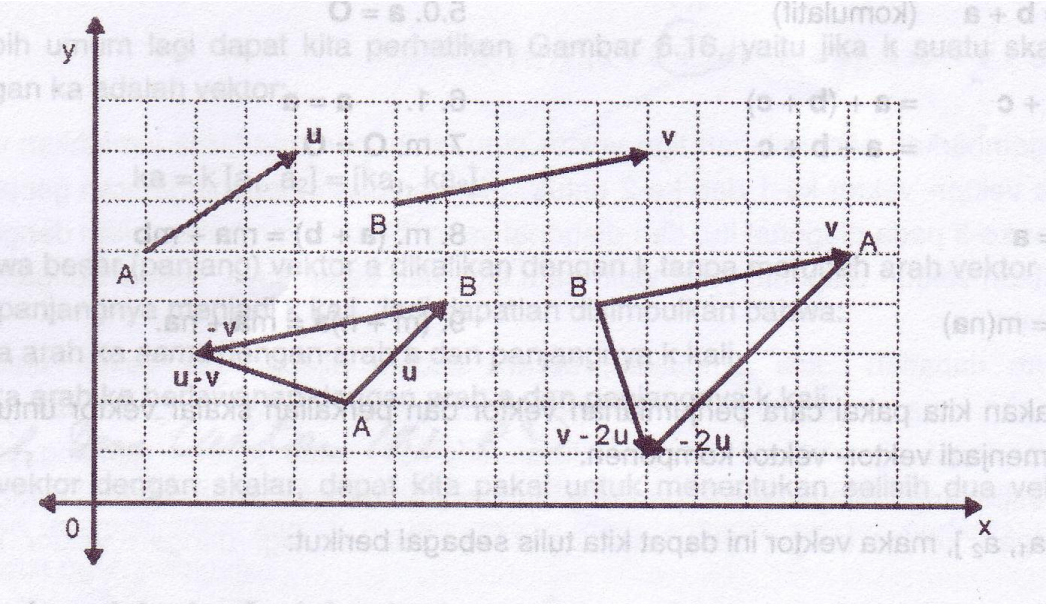
u - v = [2 , 2] - [5 , 1] dan **v** - 2**u** = [5 , 1] - 2 [2 , 2]

= [2 , 2] + [-5 , -1] = [5 , 1] - [4 , 4]

= [2 + (-5) , 2 + (-1)] = [5 , 1] + [-4 , -4]

= [2 - 5 , 2 - 1] = [5 - 4 , 1 - 4]

= [-3 , 1] = [1 , -3]



Gambar 4. 19

Dalam menyelesaikan soal di atas, dapat pula dikerjakan dengan bantuan vektor-vektor basis, yaitu

u = [2 , 2] = 2 [1 , 0] + 2 [0 , 1] = 2**i** + 2**j**

dan **v** = [5 , 1] = 5 [1 , 0] + 1 [0 ‘ 1] = 5**i** + **j**

maka **u - v** = (2**i** + 2**j**) - (5**i** + **j**) = -3**i** + **j**

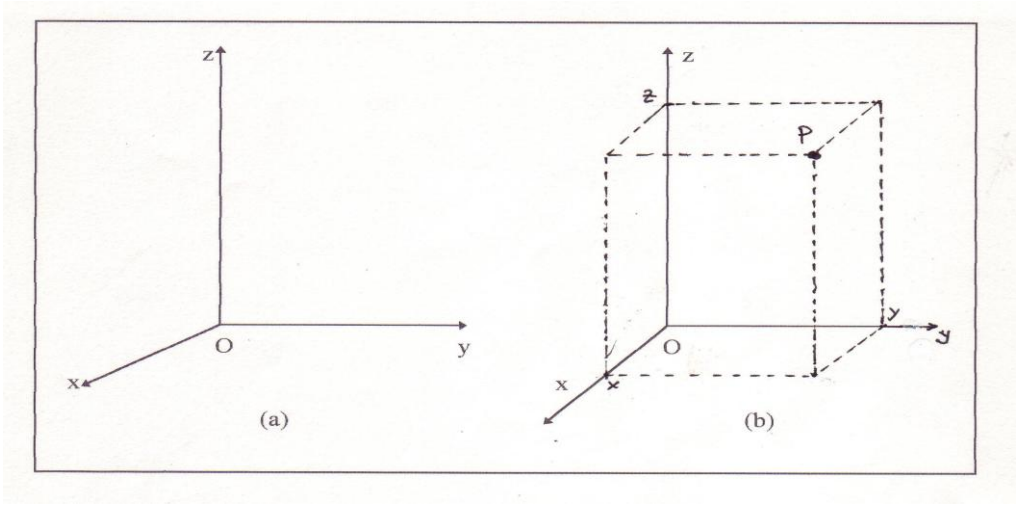
atau **u - v** = 3 [1 , 0] + [0 , 1] = [-3 , 0] + [0 , 1] = [-3 , 1]

C. Vektor-vektor di R^3 (Vektor Ruang)

1. Sistem Koordinat Ruang (R^3)

Seperti halnya vektor-vektor di dalam bidang (R^2) dapat digambarkan oleh pasangan bilangan real dengan sistem koordinat siku-sikunya. Untuk membentuk sistem koordinat seperti itu, pertama-tama kita tentukan titik O sebagai **titik pangkal (titik asal)** koordinat kemudian tariklah tiga buah garis yang saling berpotongan tegak lurus di titik O yang disebut **sumbu-sumbu koordinat**. Misalnya kita namakan sumbu-sumbu itu sebagai sumbu x, sumbu y dan sumbu z, kemudian dipilih arah positif untuk tiap sumbu koordinat membentuk **bidang koordinat**. Bidang koordinat yang dibentuk oleh sumbu x dan sumbu y disebut **bidang XOY atau bidang xy**, bidang koordinat yang dibentuk oleh sumbu x dan sumbu z disebut

bidang XOZ atau bidang xz, dan bidang yang dibentuk oleh sumbu y dengan z disebut bidang YOZ atau bidang yz.

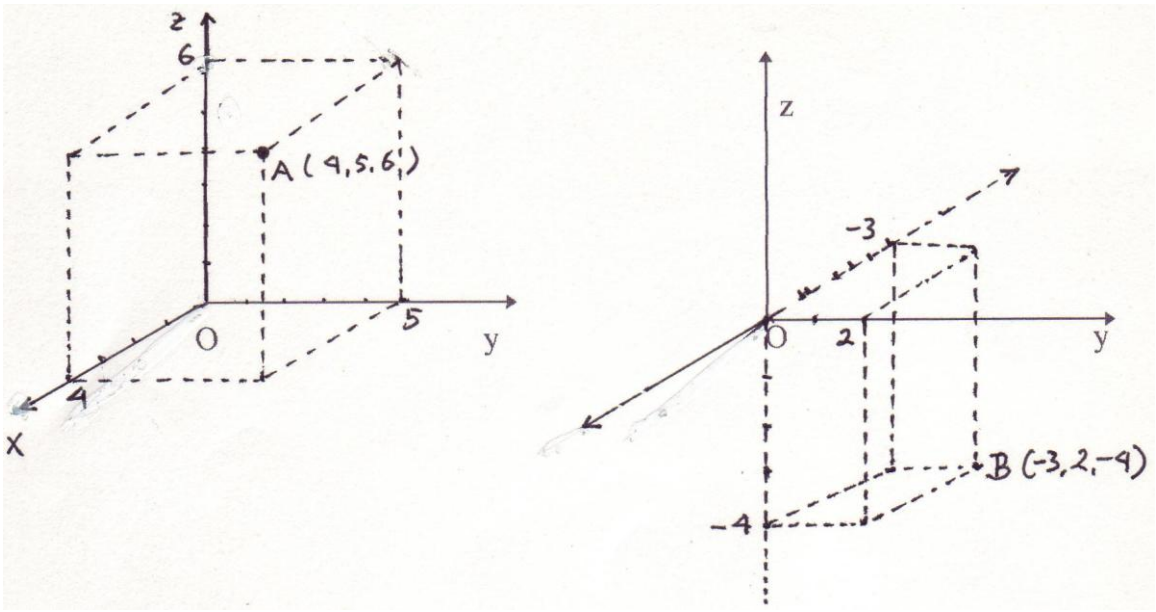


Gambar 4. 20

Letak titik P dalam ruang (R^3) ditentukan oleh tripel terurut (x, y, z) yang dinamakan koordinat-koordinat dari P. Koordinat x disebut **absis** koordinat y disebut **ordinat** dan koordinat z disebut **aplikat**. Untuk menentukan absis, ordinat, dan aplikat titik P, lewatkan tiga buah bidang melalui P yang sejajar dengan bidang-bidang koordinat dan nyatakanlah titik potong bidang-bidang itu dengan sumbu x, sumbu y, dan sumbu z (Gambar 4. 20 b). Koordinat-koordinat dari titik P didefinisikan sebagai panjang-panjang yang mempunyai tanda

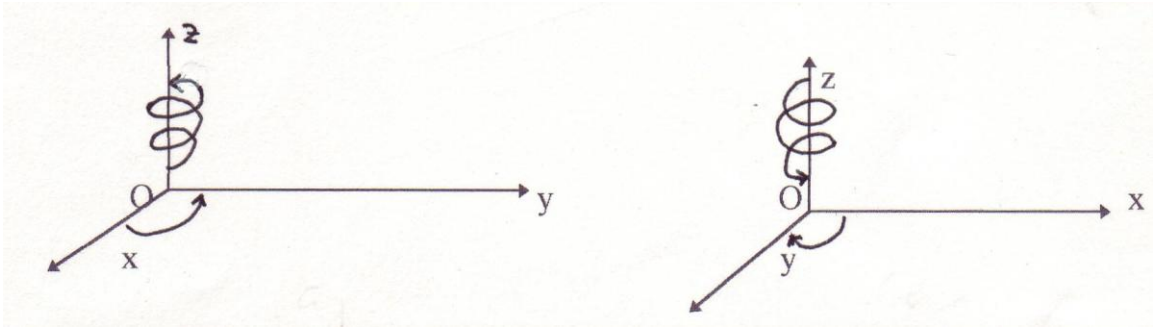
$$x = OX,\ y = OY,\ z = OZ.$$

Gambar 4. 21 memperlihatkan letak titik A dan B yang koordinat-koordinatnya berturut-turut (4, 5, 6) dan (-3, 2, -4) atau A(4, 5, 6) dan B(-3, 2, -4).



Gambar 4. 21

Ada dua kategori dalam sistem koordinat siku di ruang-3 (R^3), yaitu **sistem tangan kiri** (*left handed*) dan **sistem tangan** (*right handed*). Sifat sistem tangan kanan seperti skrup yang berarah positif pada sumbu z akan bergerak maju jika sumbu x positif dirotasikan sebesar 90^o menuju sumbu y positif (Gambar 4. 22 a). Sebaliknya, sistem itu sistem tangan tangan kiri, jika skrup tersebut tersebut bergerak mundur (Gambar 4. 22 b). Dalam pembicaraan kita selanjutnya, yang dipakai adalah sistem tangan kanan atau koordinat tangan kanan.



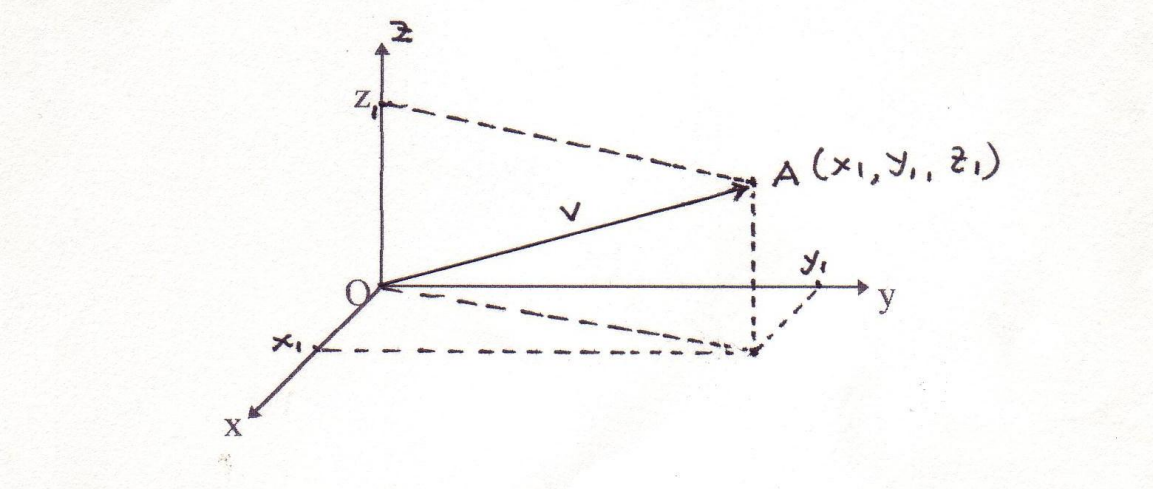
(a) (b)

Gambar 4. 22

2. Komponen Skalar Vektor Ruang (Tripel Terurut)

Jika sebuah vektor dalam ruang 3 diletakan sedemikian hingga titik awalnya berimpit dengan titik pangkal sistem koordinat siku-siku, maka koordinat-koordinat titik akhirnya dinamakan komponen-komponen skalar dari vektor **v** yang merupakan **vektor posisi** dapat kita tulis:

$$\mathbf{v} = [\, x_1, y_1, z_1 \,] = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$



Gambar 4. 23

Vektor v di atas disebut vektor posisi, sebab vektor tersebut berpangkal di titik pusat koordinat O, sedangkan titik ujungnya adalah titik $A(x_1,y_1,z_1)$.(bandingkan dengan vektor posisi pada pasal B bagian a yang lalu). Sesuai dengan vektor bidang (R^2), maka dalam ruang (R^3) juga terdapat hubungan satu-satu antara semua titik di R^3 dengan semua vektor yang berpangkal di titik pusat koordinat O.

Dengan adanya korespondensi satu-satu ini, maka kita dapat **mendefinisikan bahwa suatu vektor dalam ruang (tiga dimensi atau R^3) adalah tripel (rangkap terurut dari tiga) bilangan real**.

Contoh 4. 1

Jika koordinat titik R(3,-4,5) dan koordinat titik S(2,3,0), maka vektor posisi

$\overrightarrow{OR} = \mathbf{r} = [\ 3,-4,5\ ] = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$, dan

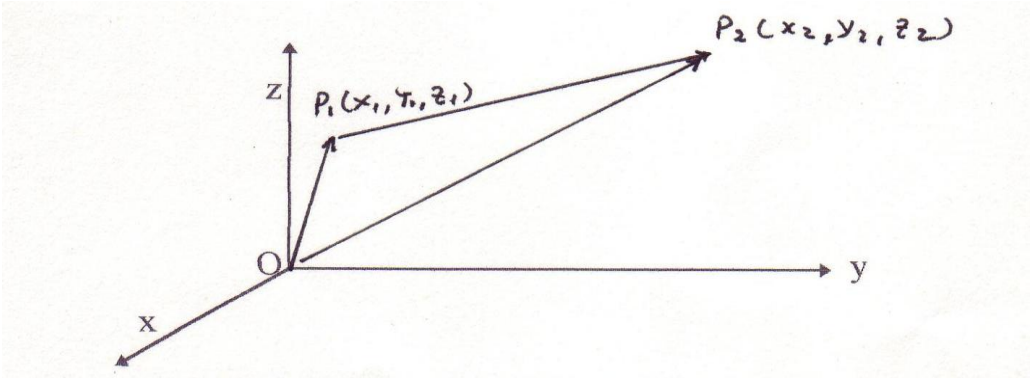
$\overrightarrow{QS} = \mathbf{s} = [\ 2\ ,\ 3\ ,\ 0\ ] = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

Namun adakalanya vektor-vektor itu titik awalnya tidak di titik pangkal (bukan vektor posisi). Misalnya vektor P_1P_2 titik awalnya $P_1(x_1,y_1,z_1)$ dan titik akhirnya $P_2(x_2,y_2,z_2)$, maka

$$\overrightarrow{P_1P_2} = [\ x_2 - x_1\ ,\ y_2 - y_1\ ,\ z_2 - z_1\ ].$$

Komponen-komponen skalar $\overrightarrow{P_1P_2}$ diperoleh dengan mengurangi koordinat-koordinat titik akhir oleh koordinat-koordinat titik awal. Hal ini dapat diperlihatkan pada Gambar 4. 24, yaitu selisih dari vektor OP_2 dan OP_1 adalah vektor P_1P_2, berarti

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = [\ x_2\ ,\ y_2\ ,\ z_2\ ] - [x_1\ ,\ y_1\ ,\ z_1\ ]$$
$$= [\ x_2 - x_1\ ,\ y_2 - y_1\ ,\ z_2 - z_1\ ].$$



Gambar 4. 24

Contoh 4. 2

Komponen-komponen skalar dari vektor v = $\overrightarrow{P_1P_2}$ dengan titik pangkal $P_1(2 , -1 , 4)$ dan titik akhir $P_2(7 , 5 , -8)$ adalah

$\mathbf{v} = [\ 7 - 2 , 5 - (-1) , (-8) - 4\ ]$

$= [\ 5 , 6 , -12\ ]$

$= \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix}$

3. Operasi Hitung Vektor Ruang

Seperti halnya dalam operasi hitung untuk vektor bidang, maka dalam bagian inipun yang akan kita bahas hanyalah beberapa operasi hitung yang sederhana dalam vektor ruang. Khusus mengenai operasi kali antara vektor akan dibahas dalam modul mendatang.

Seperti halnya vektor bidang, maka definisi kesamaan dan operasi antar vektor dalam R^2, berlaku pula dalam R^3. Misalnya definisi vektor sama dalam R^2 berlaku pula untuk R^3 dengan pengertian pasangan terurut dan tripel terurut merupakan hal yang sangat penting. Jika

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \text{ dan } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

maka **a** = **b**, jika dan hanya jika

$$a_1 = b_1 , a_2 = b_2 , a_3 = b_3$$

Sedangkan jumlah

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

Diperluas :

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 + c_1 \\ a_2 + b_2 + c_2 \\ a_3 + b_3 + c_3 \end{pmatrix}$$

Dengan demikian jika k suatu skalar dan **a** suatu vektor, maka

$$k\mathbf{a} = k\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ ka_3 \end{pmatrix}$$

dan selisih

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}$$

Untuk lebih jelasnya kita perhatikan contoh-contoh berikut ini :

Jika $\mathbf{v}$ = [1 , -3 , 2] dan $\mathbf{w}$ = [4 , 2 , 1], maka

$\mathbf{v} + \mathbf{w}$ = [1 , -3 , 2] + [4 , 2 , 1] = [5 , -1 , 3],

$2\mathbf{v}$ = 2 [1 , -3 , 2] = [2 , -6 , 4],

$-\mathbf{w}$ = - [4 , 2 , 1] = [-4 , -2 , -1], dan

$\mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{v} + (-\mathbf{w})$ = [1 , -3 , 2] + [-4 , -2 , -1]

= [-3 , -5 , 1].

Seperti halnya dalam vektor bidang (R^2) ada beberapa aturan dasar ilmu hitung yang berlaku pula dalam vektor ruang (R^3), yaitu jika **u**, **v**, dan **w** adalah vektor-vektor di ruang 3 dan k serta l skalar-skalar, maka berlaku

(a) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$

(b) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$

(c) $\mathbf{u} + \mathbf{o} = \mathbf{o} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$

(d) $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{o}$

(e) $k(l\mathbf{u}) = kl(\mathbf{u})$

(f) $k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$

(g)$(k + l)\,\mathbf{u} = k\mathbf{u} + l\mathbf{u}$

(h) $l\mathbf{u} = \mathbf{u}$.

Sebelum membicarakan bukti dari beberapa sifat tersebut di atas, kita ingatkan kembali, nahwa sebenarnya kita telah mengembangkan dua pendekatan dalam vektor, yaitu pendekatan geometrik yang menyatakan vektor sebagai segmen garis berarah dan pendekatan analitik yang menyatakan vektor oleh pasangan terurut

atau tripel terurut bilangan-bilangan real yang dinamakan komponen-komponen skalar. Akibatnya hasil-hasil di atas dapat kita buktikan secara geometrik maupun secara analitik. Untuk memberikan gambaran kita akan membuktikan bagian (b) dengan kedua cara di atas. Untuk membuktikan yang lainnya diberikan sebagai latihan.

Bukti bagian (b) (Secara analitik). Akan diberikan bukti untuk vektor di ruang 3. Bukti untuk di ruang 2 dapat dilakukan dengan cara yang sama. Jika $\mathbf{u} = [\, u_1 , u_2 , u_3 \,]$, $\mathbf{v} = [\, v_1 , v_2 , v_3 \,]$, dan $\mathbf{w} = [\, w_1 , w_2 , w_3 \,]$, maka

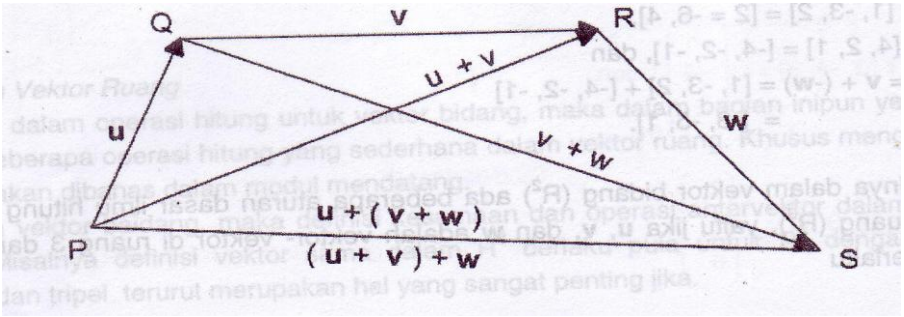
$$
\begin{aligned}
(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} &= ([u_1 , u_2 , u_3] + [\, v_1 , v_2 , v_3 \,]) + [\, w_1 , w_2 , w_3 \,] \\
&= [u_1 + v_1, u_2 + v_2 , u_3 + v_3] + [\, w_1 , w_2 , w_3 \,] \\
&= [\, (u_1 + v_1) + w_1, (u_2 + v_2) + w_2 , (u_3 + v_3) + w_3 \,] \\
&= [\, u_1 + (v_1 + w_1), u_2 + (v_2 + w_2) , u_3 + (v_3 + w_3) \,] \\
&= [u_1 , u_2 , u_3] + [\, v_1 + w_1 , v_2 + w_2 , v_3 + w_3 \,] \\
&= \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}).
\end{aligned}
$$

Bukti bagian (b) (Secara geometrik). Misalkan **u**, **v**, dan **w** berturut-turut dinyatakan dengan PQ, QR, dan RS seperti diperlihatkan dalam Gambar 4.25. Maka

$\mathbf{v} + \mathbf{w}$ = QS dan $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) =$ PS

Juga $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ = PR dan $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$ = PS

Akibatnya $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$



Gambar 4. 25

4. Panjang atau Besar Vektor di R^3

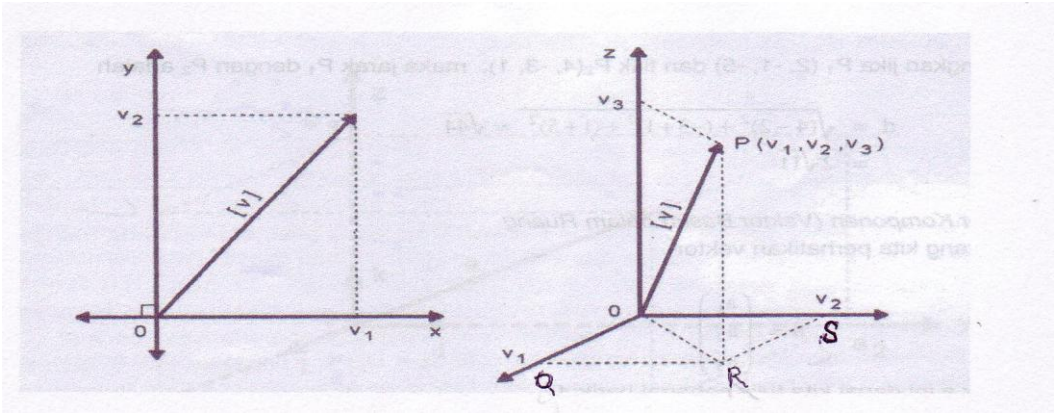
Panjang dari sebuah vektor seringkali dinamakan norm (besar) dari **v** dan dinotasikan $|\mathbf{v}|$. Menurut teorema Pythagoras, bahwa panjang dari vektor v = (v_1 , v_2) di ruang 2 adalah :

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^{\,2} + v_2^{\,2}}$$

Dalam hal ini diperlihatkan oleh Gambar 4. 26(a). Selanjutnya misalkan **v** = (v_1 , v_2 , v_3) adalah sebuah vektor di ruang 3. Dengan menggunakan gambar 1. 26(b) dan dua kali pemakaian teorema Pythagoras, maka kita dapatkan :

$$\begin{aligned} |\mathbf{v}|^2 &= |OR|^2 + |RP|^2 \\ &= |OQ|^2 + |OS|^2 + |RP|^2 \\ &= v_1^{\,2} + v_2^{\,2} + v_3^{\,2} \end{aligned}$$

Jadi : $$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^{\,2} + v_2^{\,2} + v_3^{\,2}} \quad \text{..... (3.1)}$$



(a) (b)

Gambar 4. 26

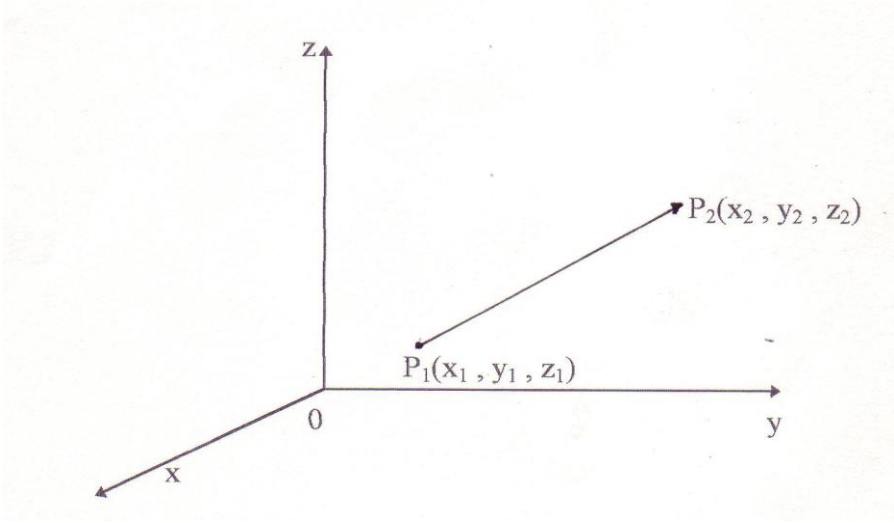
Jika $P_1(x_1 , y_1 , z_1)$ dan $P_2(x_2 , y_2 , z_2)$ adalah dua buah titik sembarang dalam ruang 3, maka jarak diantara dua titik tersebut adalah sama panjang dari vektor P_1P_2 (Gambar 4. 27).

Karena

$$\overrightarrow{P_1P_2} = [\, x_2 - x_1 , y_2 - y_1 , z_2 - z_1 \,]$$

menurut (3.1)

$$d = |\, P_1P_2 \,| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$



Gambar 4. 27

Selanjutnya kita perhatikan contoh berikut : Misal **v** = [-3 , 2 , 1], maka panjang atau norm vektor **v** = [-3 , 2 , 1] adalah $|v| = \sqrt{(-3)^2 + (2)^2 + (1)^2} = \sqrt{14}$

Sedangkan jika $P_1(2 , -1 , -5)$ dan titik $P_2(4 , -3 , 1)$, maka jarak P_1 dengan P_2 adalah

$$d = \sqrt{(4-2)^2 + (-3+1)^2 + (1+5)^2} = \sqrt{44}$$

$$= 2\sqrt{11}$$

5. Vektor Komponen (Vektor Basis) dalam Ruang

Sekarang kita perhatikan vektor

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

vektor **a** ini dapat kita tulis sebagai berikut :

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

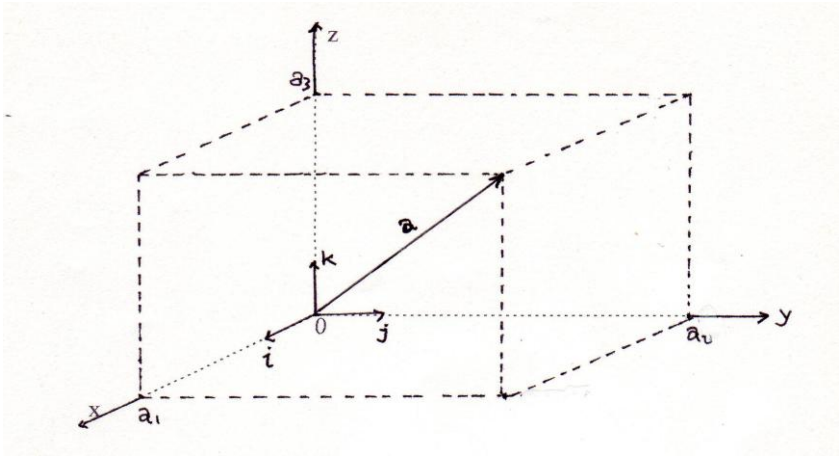
$$= a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$$

Jadi, $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$.

Vektor-vektor $\begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_3 \end{pmatrix}$ disebut **vektor komponen** dari vektor a pada sumbu-sumbu koordinat, dan bilangan-bilangan a_1 a_2, dan a_3 disebut **komponen-komponen skalar vektor a**. Sedangkan vektor-vektor

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{dan } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Gambar 4. 28

disebut vektor-vektor satuan pada sumbu-sumbu koordinat x, y, dan z. Vektor-vektor satuan pada sumbu x, sumbu y, dan sumbu z berturut-turut kita tulis :

$$\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ dan } \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vektor-vektor **i** , **j**, dan **k** ini disebut pula vektor-vektor basis di ruang-3 (R^3).

Jadi untuk sembarang vektor a dapat kita tulis seperti berikut :

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$= a_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + a_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$$

Contoh 4. 3

Jika $\mathbf{v} = \begin{pmatrix}2\\3\\-4\end{pmatrix}$, maka

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\-4\end{pmatrix}$$

$$= 2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

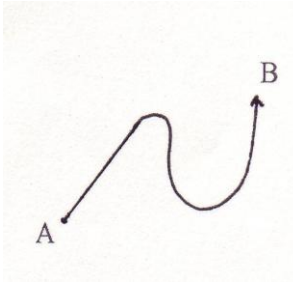
$= 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$.

Selanjutnya untuk lebih memantapkan pemahaman Anda mengenai materi **Kegiatan Belajar** di atas, kerjakanlah soal-soal latihan berikut.

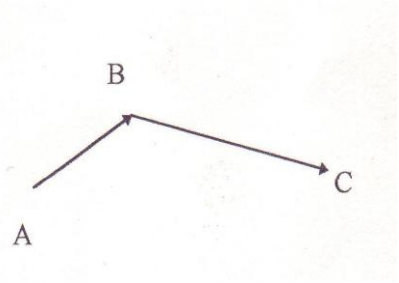
Latihan

1. Diskusikanlah dengan kawan Anda, untuk menjawab pertanyaan-pertanyaan berikut :

a) Jika Anda menggerakkan ujung pensil, mulai dari titik A sampai ke titik B seperti diperlihatkan Gambar 4. 29. Dapatkah Anda menyatakan bahwa garis lengkung A ke B itu merupakan vektor? Jelaskan!



Gambar 4. 29



Gambar 4. 30

b) Gerakkan lagi ujung pensil kita mulai dari titik A ke titik B, lalu geraknya dilanjutkan ke titik C seperti Gambar 4. 30. Apakah terbentuk vektor? Jika terbentuk vektor, ada berapa banyak vektor yang terjadi?

c) Tentukan yang mana diantara besaran-besaran berikut yang merupakan besaran vektor dan yang mana yang merupakan besaran skalar?

(a) berat
(b) tenaga
(c) kuat medan
(d) kalori
(e) isi
(f) jarak

2. Jika **u** = [3 , 2] dan **v** = [4 , -1]

a) Hitunglah **u + v** dan **v + u**

b) Lukislah grafik **u + v** dan **v + u**

c) Tentukanlah vektor **w** = 2**u** - **v**

d) Lukislah grafik **w** = 2**u** - **v**

e) Tentukan besar (panjang) **u** dan panjang **w**.

3. Tentukan letak titik berikut dalam sistem koordinat tangan kanan

(a) A(-2 , 3 , 4)

(b) B(2 , 3 , -4)

4. Diketahui **u** = [1 , 3 , 2] dan **v** = [1 , 1 , 0]. Carilah

(a) $|\, 2\mathbf{u} - 5\mathbf{v} \,|$

(b) $|-2\mathbf{u}| + 2|\mathbf{v}|$

5. Jika diketahui **a** = 3**i** - **j** - 4**k**, **b** = 2**i** + 4**j** - 3**k** dan **c** = **I** + 2**j** - **k**. Hitumglah 3**a** -2**b** +4**c**.

Setelah Anda mencoba menyelesaikan soal-soal latihan di atas, bandingkanlah jawabannya dengan petunjuk jawaban latihan berikut.

Petunjuk Jawaban Latihan

1. a) Lengkungan dari A ke B seperti yang ditunjukkan oleh Gambar 4. 29 di atas tentunya bukanlah vektor. Kenapa? Karena sekalipun ujung pensil yang kita miliki tadi menempuh jarak tertentu, namun gerakanya itu selalu berubah arah.

   b) Jika demikian adanya tentulah pada Gambar 4.30 di atas terdapat dua vektor, yaitu $\overrightarrow{AB}$ dan $\overrightarrow{BC}$.

   c) Karena medan dan tenaga adalah contoh-contoh besaran dalam fisika yang mempunyai besar dan arah (vektor), sedangkan berat jenis, kalori, isi, dan jarak besaran-besaran yang hanya mempunyai besar saja tidak mempunyai arah (skalar).

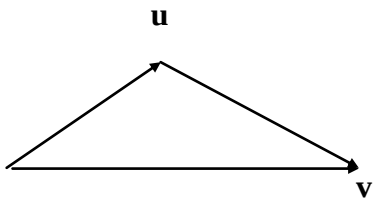
2. Karena **u** = [3 , 2] dan **v** = [4 , -1]

   maka :

   a) **u + v** = [3 , 2] + [4 , -1] = [7 , 1] dan

   v + **u** = [4 , -1] + [3 , 2] = [7 , 1].

   b)



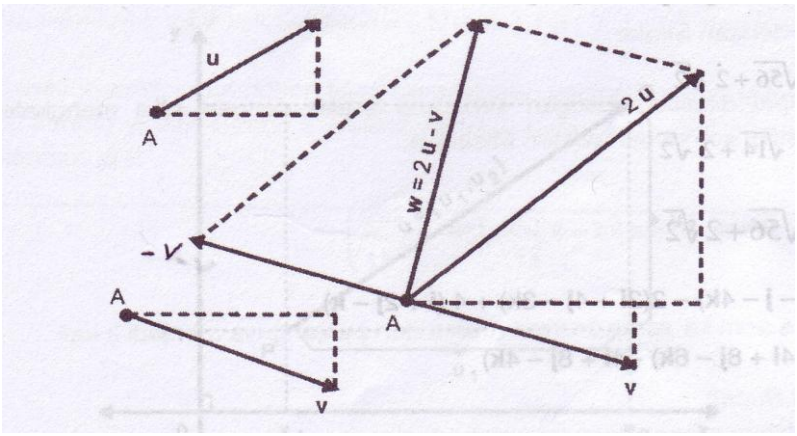
u + v = v + u

Gambar 4. 31

   c) **w** = 2**u - v**

$$= 2\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$$

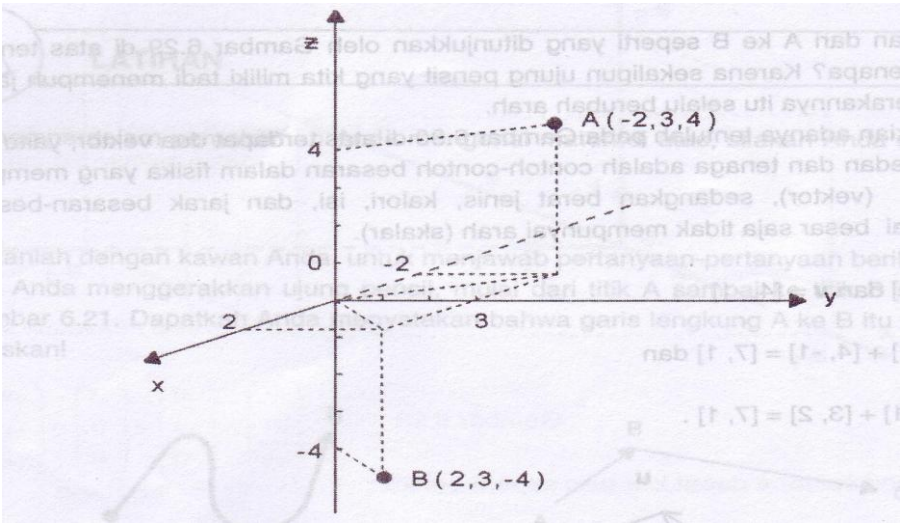
   d)



Gambar 4. 32

e) $|\mathbf{u}| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$ dan $|\mathbf{w}| = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}$.

3.



Gambar 4. 33

4. (a) Karena $2\mathbf{u} - 5\mathbf{v} = 2\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-6\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\5\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\-11\\4\end{pmatrix}$

maka $|\ 2\mathbf{u} - 5\mathbf{v}\ | = \sqrt{(-3)^2 + (-11)^2 + 4^2} = \sqrt{146}$

(b) $|-2\mathbf{u}| + 2|\mathbf{v}| = \left| -2\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix} \right| + \left| \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \right|$

$= \sqrt{56} + 2\sqrt{2}$

$= 2\sqrt{14} + 2\sqrt{2}$

$= 2\left(\sqrt{14} + \sqrt{2}\right)$

5. $3a - 2b + 4c = 3(3\mathbf{i} - \mathbf{j} - 4\mathbf{k}) - 2(2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) + 4(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k})$

$= (9\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 12\mathbf{k}) - (4\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 6\mathbf{k}) + (4\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 4\mathbf{k})$

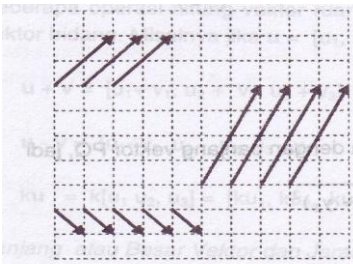
$= 9\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 10\mathbf{k}$

Sekarang coba Anda buat rangkuman dari **Kegiatan Belajar 1**, kemudian bandingkan dengan rangkuman berikut.

Rangkuman

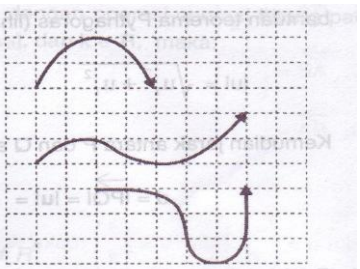
1. Pengertian vektor

Vektor adalah himpunan segmen (ruas garis) berarah yang mempunyai panjang



Gambar 4. 34

Pada gambar ini ada tiga buah himpunan vektor vektor



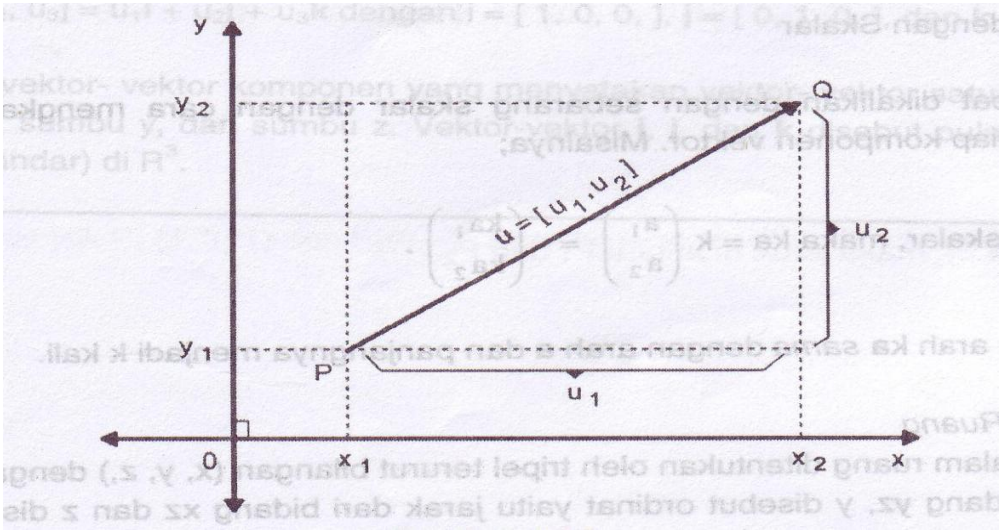
Gambar 4. 35

Pada gambar ini tidak terdapat

(besar) dan arah yang sama, dan salah satu dari anggota himpunan tersebut dapat mewakilinya. Dengan kata lain vektor adalah besaran yang mempunyai besar dan arah, sedangkan yang hanya mempunyai besar saja dinamakan skalar.

2. Penulisan Vektor Bidang

Jika $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ dengan titik awalnya di $P(x_1,y_1)$ dan titik akhirnya di $Q(x_2,y_2)$, maka **u** dapat ditulis sbb : $\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ}$.



Gambar 4.36

dengan $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ dan $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$ sehingga berlaku hubungan :

$$u_1 = x_2 - x_1, \text{ dan}$$

$$u_2 = y_2 - y_1$$

dengan u_1 dan u_2 disebut komponen-komponen (komponen-komponen skalar) dari vektor tersebut. Sedangkan panjang atau besar suatu vektor $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ ditulis $|\mathbf{u}|$, dan dengan bantuan teorema Pythagoras (lihat Gambar 4. 36)

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{u_1^{\,2} + u_2^{\,2}}$$

Kemudian jarak antara P dan Q atau d adalah sama dengan panjang vektor PQ, jadi

$$d = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = |\mathbf{u}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

3. Penjumlahan Vektor

Dua vektor atau lebih dapat dijumlahkan (dikurangkan) dengan cara mengurangkan komponen-komponen yang seletaknya. Misalnya :

$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ dan $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, maka $\mathbf{u} \pm \mathbf{v} = \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \pm v_1 \\ u_2 \pm v_1 \end{pmatrix}$.

Sedangkan secara geometris dua vektor atau lebih dapat dijumlahkan (dikurangkan) dengan aturan segitiga atau aturan jajarangenjang dengan cara sepasang demi sepasang.

4. Perkalian Vektor dengan Skalar

Suatu vektor dapat dikalikan dengan sembarang skalar dengan cara mengalikan skalar tersebut pada setiap komponen vektor. Misalnya :

$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ dan k = skalar, maka k$\mathbf{a}$ = k$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \end{pmatrix}$.

Untuk k > 0, maka arah k**a sama** dengan arah **a** dan panjangnya menjadi k kali.

5. Sistem Koordinat Ruang

Letak suatu titik dalam ruang ditentukan oleh tripel terurut bilangan (x,y,z) dengan x disebut absis yaitu jarak dari bidang yz, y disebut ordinat yaitu jarak dari bidang xz dan z disebut aplikat yaitu jarak dari bidang xy.

6. Komponen Skalar Vektor Ruang

Komponen skalar suatu vektor ruang adalah tripel terurut bilangan real. Misalnya koordinat titik $P_1(x_1, y_1, z_1)$ dan koordinat $P_2(x_2, y_2, z_2)$ maka komponen-komponen vektor : $\overrightarrow{OP_1} = [x_1 - 0, y_1 - 0, z_1 - 0] = [x_1, y_1, z_1]$

$\overrightarrow{OP_2} = [x_2 - 0, y_2 - 0, z_2 - 0] = [x_2, y_2, z_2]$

$\overrightarrow{P_1P_2} = [x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1]$, dan $\overrightarrow{P_2P_1} = [x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2]$.

7. Beberapa Operasi Hitung Vektor Ruang

Beberapa operasi hitung vektor ruang umumnya sama dengan operasi-operasi hitung pada vektor bidang. Misalnya jika **u** = $[u_1, u_2, u_3]$, **v** = $[v_1, v_2, v_3]$ dan k $\in$ R, maka :

(a) **u + v** = $[u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3]$

(b) **u - v** = $[u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3]$

(c) k**u** = k$[u_1, u_2, u_3]$ = $[ku_1, ku_2, ku_3]$, dsb.

8. Panjang atau Besar Vektor dan Jarak antara Dua Titik di R^3

Panjang atau Besar Vektor dan Jarak antara Dua Titik di R^3 sama seperti halnya vektor-vektor di R^2. Misalnya, jika $P_1(x_1, y_1, z_1)$ dan $P_2(x_2, y_2, z_2)$, maka

$$d = |P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

9. Vektor Komponen dalam Ruang

Setiap vektor ruang dapat dinyatakan sebagai jumlah hasil kali dalam komponen-komponen skalarnya dengan vektor-vektor komponennya merupakan vektor-vektor satuan pada sumbu x, sumbu y, dan sumbu z. Misalnya **u** = $[u_1, u_2, u_3]$, maka :

u = $[u_1, u_2, u_3] = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ dengan **i** = [1 , 0 , 0], **j** = [0 , 1 , 0], dan **k** = [0 , 0 , 1] sebagai vektor-vektor komponen yang menyatakan vektor-vektor satuan berturut-turut pada sumbu x, sumbu y, dan sumbu z. Vektor-vektor **i** , **j**, dan **k** disebut pula vektor-vektor basis (basis standar) di R^3.

Kerjakanlah soal-soal **Tes Formatif** berikut dengan cara memberi tanda silang (X) diantara pernyataan yang menurut Anda paling benar.

Tes Formatif

1. Jika A(-5,2) dan B(2 ,-2), maka

A. $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \end{pmatrix}$

C. $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$

B. $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}$

D. $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \end{pmatrix}$

2. Jika $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ dan $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ maka $\mathbf{w} = 3\mathbf{u} + \mathbf{v}$ =

A. $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

D. A, B, dan C salah

3. Nilai x dan y dari persamaan vektor

$$3\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A. x = -3 , y = 3

C. x = -3 , y = -3

B. x = 3 , y = -3

D. x = 3 , y = 3

4. Jika $P_1(2,3)$ dan $P_2(4,6)$, maka jarak diantara P_1 dan P_2

A. $\sqrt{13}$

C. $\sqrt{65}$

B. $\sqrt{52}$

D. $\sqrt{117}$

5. Jika koordinat titik A(-8,7,4) dan B(-13,-2,0), maka komponen skalar vektor BA

A. [5 , 5 , 4]

C. [-21 , 5 , -4]

B. 5 , 9 , 4]

D. [-21 , -9 , -4]

6. Titik akhir suatu vektor **v** = [7 , 6 , -3] dengan koordinat titik awalnya (2 , -1 , 4)

A. (5 , 7 , -7)

C. (-5 , -7 , 7)

B. (-9 , -5 , -1)

D. (9 , 5 , 1)

7. Diketahui vektpr-vektor **u** = [1 , 2 , 3], **v** [2 , -3 , 1] dan **w** = [3 , 2 , -1], maka vektor x yang memenuhi persamaan $2\mathbf{u} - \mathbf{v} + \mathbf{x} = 7\mathbf{x} + \mathbf{w}$

A. $[\ \frac{-1}{2}, \frac{5}{6}, 1\ ]$

C. [-3 , 5 , 6]

B. [3 , 5 , -6]

D. $[\ \frac{1}{2}, \frac{-5}{6}, 1\ ]$

8. Diketahui **v** = [1 , 2 , 4] dan $\left| k\mathbf{v} \right|$ = 3, maka skalar k =

A. $\frac{3}{\sqrt{21}}$

C. $\pm\frac{3}{\sqrt{21}}$

B. $\frac{-3}{\sqrt{21}}$

D. A, B, dan C salah

9. Jika **u** = [5 , -4 , 2] dan **v** = [2 , 0 , -4] maka **u - v** =

A. 3**i** - 4**j** + 6**k**

C. -3**i** + 4**j** - 6**k**

B. 10**i** - 8**k**

D. **i** , **j** , **k**

10. Jika koordinat titik P_1(1 , 1 , 1) dan P_2(6 , -7 , 3) maka jarak diantara P_1 dengan P_2

A. $\sqrt{13}$

C. $\sqrt{43}$

B. $\sqrt{76}$

D. $\sqrt{94}$

KUNCI JAWABAN TES FORMATIF

---

1. D Karena A(-5 , 2) dan B(2 , -2), maka BA titik awalnya di titik B dan titik akhirnya di A, sehingga BA = [-5 - 2 , -2 - (-2)] = [-7 , 4]

2. C Karena **w** 3**u** + **v** = 3 [-2 , 0] + [5 , 3] = [-6 + 5 , 0 + 3] = [-1 , 3]

3. B Karena 3 [2 , 1] = x[1 , 0] - y [1 , 1]

[6 , 3] = x [x - y , -y]

berarti : x - y = 6 atau y = -3 dan x = 3

4. A Karena P_1P_2 = (4 - 2 , 6 - 3) = (2 , 3)

maka d = $\left| P_1P_2 \right| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$

5. B BA = [$x_A - x_B$, $y_A - y_B$, $z_A - z_B$] = [-8 - (-13) , 7 - (-2) , 4 - 0] = [5 , 9 , 4]

6. D Jika koordinat titik akhir (x , y , z) maka **v** = [7 , 6 , -3] = [x - 2 , y + 1 , z - 4]
atau x - 2 = 7 atau x = 9, y + 1 = 6 atau y = 6, atau y = 5, dan z - 4 = -3 atau z = 1. Jadi koordinat titik akhirnya (9 , 5 , 1).

7. A $2\mathbf{u} - \mathbf{v} + \mathbf{x} = 7\mathbf{x} + \mathbf{w}$

$6\mathbf{x} = 2\mathbf{u} - \mathbf{v} - \mathbf{w}$

6[x , y , z] = 2 [1 , 2 , 3] - [2 , -3 , 1] - [3 , 2 , -1]

[6x , 6y , 6z] = [-3 , 5 , 6]

6x = -3 atau x = $-\frac{1}{2}$, 6y = 5 atau y = $\frac{5}{6}$, dan 6z = 6 atau z = 1.

Jadi x = [$-\frac{1}{2}$, $\frac{5}{6}$, 1].

8. C

$\left| k\mathbf{v} \right| = 3$

$\left| k \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = 3$

$\left| \begin{pmatrix} k \\ 2k \\ 4k \end{pmatrix} \right| = 3$

$\sqrt{k^2 + 4k^2 + 16k^2} = 3$

$k = \pm \frac{3}{\sqrt{21}}$

9. A $\mathbf{u} - \mathbf{v} = (5\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) - (2\mathbf{i} - 4\mathbf{k}) = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$

10. C Karena $P_1P_2 = (6 - 1 , -7 - 1 , 3 - 1) = (5 , -8 , 2)$

maka $d = \left| P_1P_2 \right| = \sqrt{5^2 + (-8)^2 + 2^2} = \sqrt{93}$

DAFTAR PUSTAKA

Ayres, Frank, JR.Ph.D, (1982). *Theory and Problems of Matrices*, Singapore: Schaum's Outline, Mc-Graw Hill Book Company.

Anton Howard, (1987), *Elementary Linear Algebra*, 5th Edition New York: John Wiley & Sons.

Larry Smith. (1998). *Linear* Algebra. Gottingen: Springer.

Raisinghania & Aggarwal, R.S, (1980), *Matrices*, New Delhi: S.Chan & Company Ltd.

Roman Steven (1992). *Advanced Linear Algebra*, New York, Berlin, Herdelberg, London, Paris, Tokyo, Hongkong, Barcelona, Budapest: Springer-Velag.

Seymour Lipschutz. (1981). *Linear Algebra*, Singapore: Schaum's Outline, Mc-Graw Hill Book Company.