

BAB 6

FUNGSI KOMPOSISI DAN FUNGSI INVERS

Standar Kompetensi:

Menentukan komposisi dua fungsi dan invers suatu fungsi

A. Fungsi dan Macam-macam Fungsi

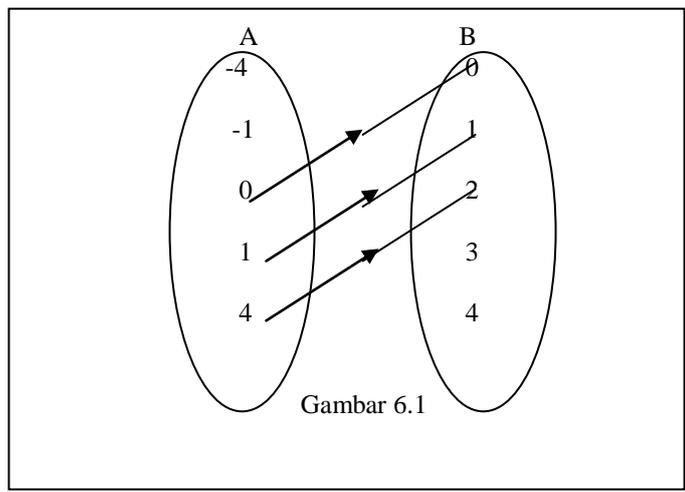
Pada saat di Sekolah Lanjutan Pertama (SMP) telah dipelajari tentang topik Relasi, Fungsi dan Grafik. Pada materi *relasi* ini selain menggunakan istilah yang sudah dikenal, seperti *himpunan*, *unsur (anggota/eleman)*, muncul pula istilah *hubungan*, *korespondensi (perkawanan/pemasangan)*, *diagram panah*, *grafik (Kartesius)*, *himpunan pasangan berurutan (terurut)*, dan *aturan perkawanan*. Istilah-istilah seperti *pemetaan*, *domain*, *kodomain*, dan *daerah hasil (range)*, muncul belakangan setelah adanya definisi *fungsi*. Berbagai istilah yang telah dikemukakan di atas perlu dipahami dengan baik agar tidak terjadi kesalahan dalam penggunaannya.

Dalam matematika konsep fungsi merupakan konsep yang sangat penting, karena terkait dengan konsep-konsep lainnya seperti persamaan, pertidaksamaan, limit, turunan, integral. Pembahasan fungsi selanjutnya lebih menekankan kepada fungsi bilangan real, meliputi fungsi aljabar dan fungsi transenden (fungsi trigonometri, fungsi eksponen dan fungsi logaritma).

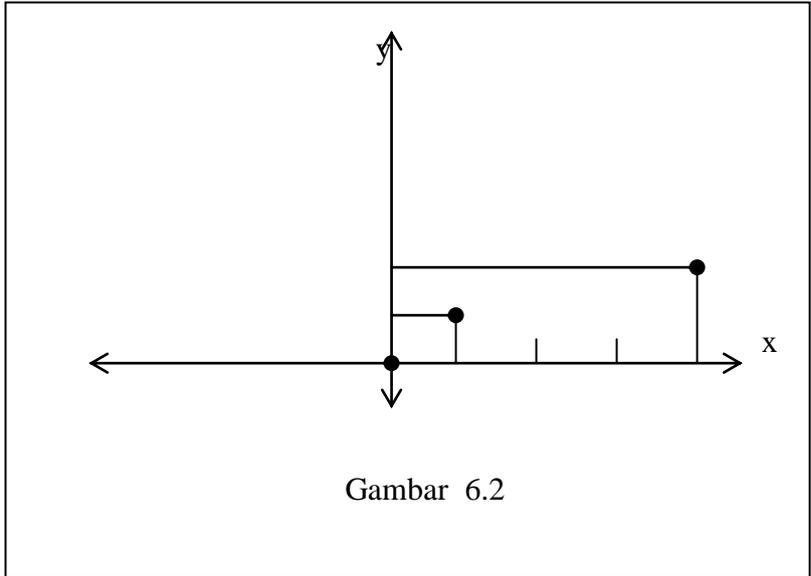
1. Relasi , Fungsi, Korespondensi Satu-satu

Relasi

Misalkan A dan B dua himpunan yang tidak kosong, maka A memiliki *hubungan (relasi)* dengan B, apabila ada anggota A yang *berkorespondensi (dikawankan/dipasangkan)* dengan anggota B. Relasi dua himpunan A dan B ini dapat disajikan melalui diagram panah, grafik, himpunan pasangan berurutan atau aturan pemasangan melalui kata-kata (deskripsi) atau ekspresi matematika. Sebagai contoh, misalkan $A = \{-4, -1, 0, 1, 4\}$ dan $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ dengan perkawanan anggota-anggota A ke B seperti dilustrasikan melalui diagram panah pada Gambar 6.1.



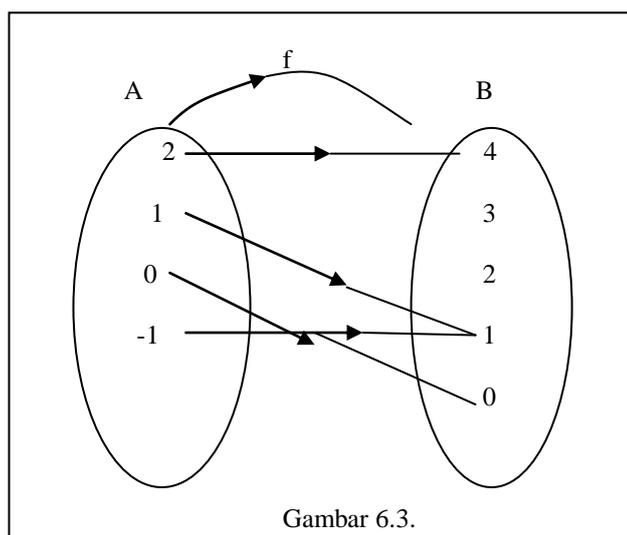
Himpunan A berelasi dengan himpunan B, karena ada anggota A yang berkorespondensi dengan anggota B, $0 \in A$ berkorespondensi (dikawankan) dengan $0 \in B$, $1 \in A$ berkorespondensi dengan $1 \in B$, dan $4 \in A$ berkorespondensi dengan $2 \in B$. Aturan relasi dari A ke B tersebut adalah akar pangkat dua dari, atau $y = \sqrt{x}$. Relasi tersebut dapat dinyatakan himpunan pasangan berurutan ditulis $\{(x,y): y = \sqrt{x}, x \in A, y \in B\} = \{(0,0), (1,1), (4,2)\}$.. Relasi tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk grafik seperti Gambar 6.2.



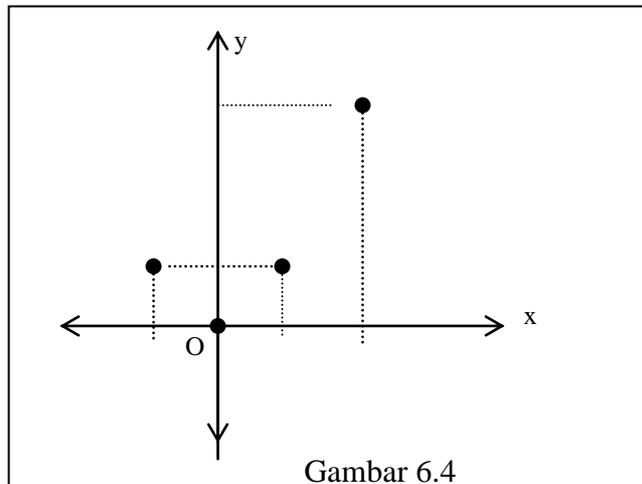
Fungsi

Fungsi dari himpunan A ke himpunan B merupakan relasi khusus dari A ke B. Fungsi dari A ke B disebut pula pemetaan dari A ke B. Himpunan A pada pemetaan A ke B disebut domain, sedangkan B disebut kodomain. Himpunan unsur dari B yang menjadi kawan unsur-unsur A disebut daerah hasil atau range.

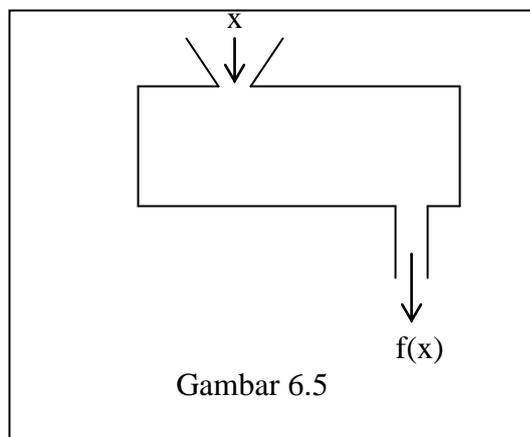
Sebagai contoh, perhatikan relasi dari A ke B, dengan $A = \{-1, 0, 1, 2\}$, dan $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ dengan aturan perkawanan $f: x \rightarrow x^2$ atau dinyatakan sebagai $f(x) = x^2$. Relasi ini dapat digambarkan sebagai diagram panah pada Gambar 6.3. Relasi ini merupakan sebuah fungsi. Himpunan A disebut *daerah asal (domain)*, B disebut *daerah kawan (kodomain)*, dan $\{0, 1, 4\} \subset B$ merupakan *daerah hasil (range)* dari fungsi f .



Fungsi f tersebut dapat disajikan dalam bentuk grafik Kartesius seperti pada Gambar 6.4.



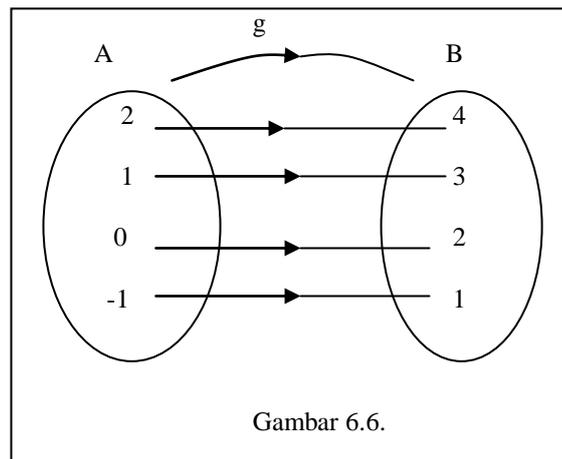
Sebuah fungsi dapat dianggap sebagai suatu mesin, yang memiliki masukan dan keluaran. Masukannya merupakan anggota domain, dan himpunan semua keluaran merupakan daerah hasil (range). Dengan demikian f yang memetakan x ke $f(x)$ memiliki masukan x dan keluaran $f(x)$, seperti diilustrasikan pada Gambar 6.5.



Misalkan fungsi f dengan aturan $f(x) = x^2 + 1$, jika masukannya $x = 3$ maka keluarannya $f(3) = 3^2 + 1 = 10$, jika masukannya $x = -2$, maka keluarannya adalah $f(-2) = (-2)^2 + 1 = 5$, dan seterusnya.

Korespondensi satu-satu

Misalkan $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ dan $B = \{1, 2, 3, 4\}$, g merupakan pemasangan dari A ke B dengan aturan $g(x) = x + 2$. Relasi dari A ke B dapat diilustrasikan melalui diagram panah pada Gambar 6.6. Relasi tersebut merupakan suatu pemetaan atau fungsi, juga sebaliknya relasi dari B ke A juga merupakan sebuah pemetaan. Korespondensi antara A dan B yang demikian disebut *korespondensi satu-satu*.



Gambar 6.6.

Misalkan A dan B dua himpunan yang kedua-duanya tidak kosong. Perhatikan Tabel 1 di bawah ini. Agar terjadi relasi dari A ke B hanya diperlukan syarat nomor 1 saja. Sedangkan agar terjadi fungsi dari A ke B harus memenuhi syarat nomor 2, dan nomor 3. Akan tetapi jika nomor 2 dipenuhi, maka dengan sendirinya nomor 1 dipenuhi pula. Sedangkan untuk terjadinya korespondensi satu-satu antara A dan B perlu dipenuhi empat syarat yaitu nomor 2, 3, 4, dan 5.

Tabel 1
Kaitan antara Relasi, Fungsi dan Korespondensi Satu-satu
Dari Himpunan A ke Himpunan B

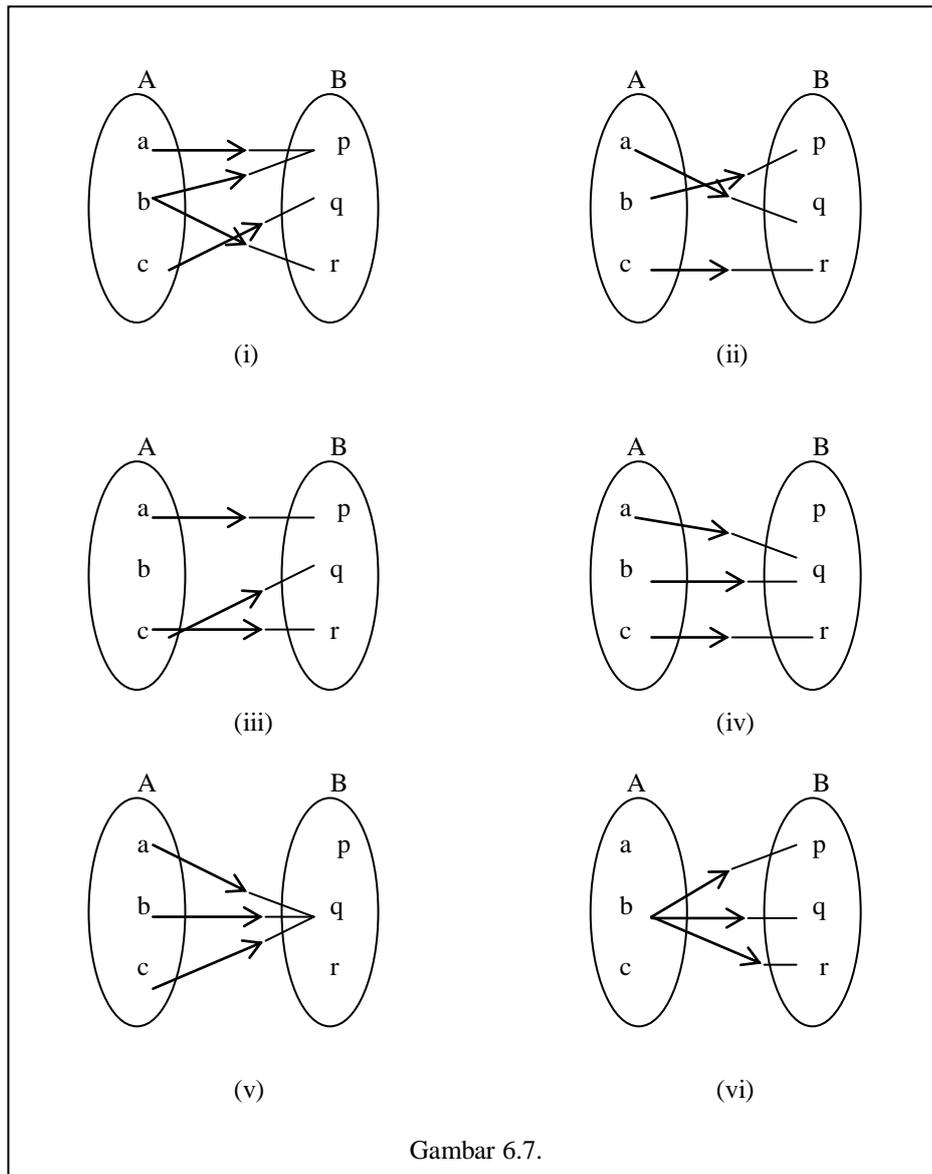
No.	Syarat-syarat	Relasi dari A ke B	Fungsi dari A ke B	Korespondensi satu satu antara A dan B
1.	Paling sedikit ada satu anggota A yang berpasangan dengan anggota B	√	√	√
2.	Setiap anggota A memiliki pasangan di B		√	√
3.	Tiap anggota A hanya memiliki satu pasangan di B		√	√
4.	Setiap anggota B memiliki pasangan di A			√
5.	Tiap anggota B hanya memiliki satu pasangan di A			√

Berdasarkan syarat-syarat tersebut dapat disimpulkan:

- (i) Suatu fungsi merupakan suatu relasi
- (ii) Suatu korespondensi satu-satu adalah suatu relasi
- (iii) Suatu korespondensi satu-satu adalah suatu fungsi

Latihan 1.

1. Perhatikan relasi-relasi dari himpunan $A = \{a, b, c\}$ ke himpunan $B = \{p, q, r\}$ digambarkan pada Gambar 7.
 - a. Relasi (i) bukan fungsi sebab
 - b. Relasi (ii) fungsi, sebab
 - c. Relasi (iii) yang mana merupakan pemetaan(fungsi)? Berikan alasan!
 - d. Manakah yang menunjukkan korespondensi satu-satu antara himpunan A dan B ? Berikan alasan !



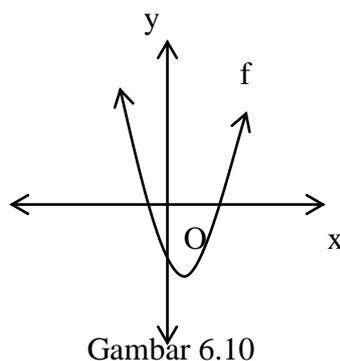
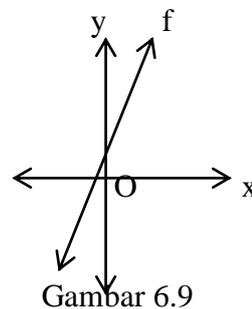
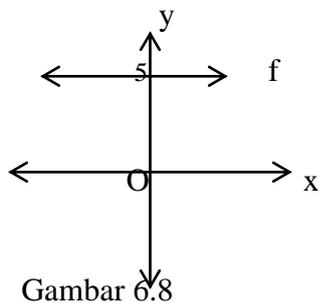
2. Manakah pernyataan di bawah ini yang benar !

- a. Jika A ke B suatu pemetaan, maka daerah hasilnya sama dengan B .
- b. Jika A ke B suatu pemetaan, maka daerah hasilnya merupakan himpunan bagian dari B .
- c. Jika A dan B berkorespondensi satu-satu, maka relasi dari B ke A juga merupakan suatu fungsi.
- d. Jika A dan B berkorespondensi satu-satu, daerah hasil pemetaan dari A ke B adalah B .

3. Diketahui $S = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Tuliskan relasi-relasi pada S sebagai pasangan berurutan dan grafik dari
- lebih dari
 - kurang dari
4. Diketahui $A = \{x \mid -4 \leq x \leq 4, x \in \mathbb{R}\}$ dan $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ditentukan oleh $f(x) = x^2 - 9$. Gambarlah grafik f dan tentukan daerah hasil fungsi.
5. Diketahui $A = \{x \mid -3 \leq x \leq 3, x \in \mathbb{R}\}$ dan $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ditentukan oleh $f(x) = x(x+2)(x-3)$.
- Carilah pembuat nol dari f
 - Hitunglah $f(1)$, $f(-1)$, $f(3)$, $f(-3)$
 - Gambarlah grafik f dan tentukan daerah hasil f
 - Selesaikan pertidaksamaan $f(x) > 0$

2. Macam-macam Fungsi

Kalian telah mengenal beberapa macam fungsi aljabar seperti, fungsi konstan, fungsi linear, fungsi kuadrat. Sebagai contoh, $f(x) = 5$ adalah fungsi konstan, $f(x) = 2x + 1$ adalah fungsi linear, dan $f(x) = x^2 - x - 2$ adalah fungsi kuadrat. Grafik dari masing-masing fungsi di atas adalah seperti berikut.



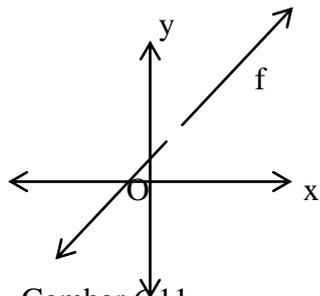
Ada macam-macam fungsi lain misalnya,

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1} \text{ disebut fungsi rasional,}$$

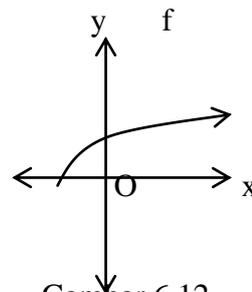
$$f(x) = \sqrt{x + 2} \text{ disebut fungsi akar,}$$

$$f(x) = |x| \text{ disebut fungsi nilai mutlak.}$$

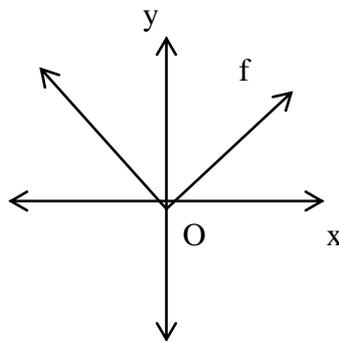
Grafik masing-masing fungsi tersebut adalah sebagai berikut.



Gambar 6.11



Gambar 6.12



Gambar 6.13

Latihan 2

- Diberikan himpunan pasangan berurutan di bawah ini.

$$A = \{ (-1,-5), (0,-3), (-1,-1), (1,2), (3,3), (4,5) \}$$

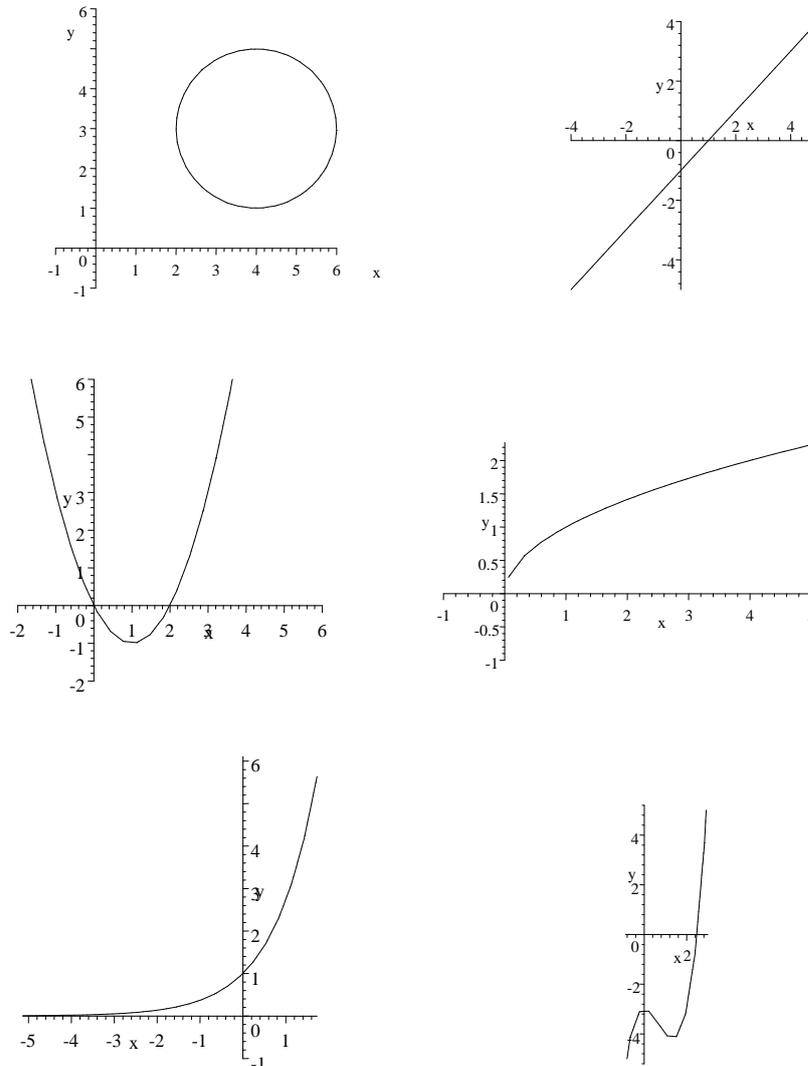
$$B = \{ (-1,-5), (0,-3), (1,-1), (2,1), (3,3), (4,5) \}$$

$$C = \{ (-5,-1), (-3,0), (-1,1), (0,2), (1,1), (2,0) \}$$

$$D = \{ (0,0), (1,0), (2,0), (0,1), (1,1), (2,1), (0,2) \}$$

- Himpunan manakah yang merupakan fungsi?
- Himpunan manakah yang merupakan korespondensi satu-satu ?

2. Perhatikan grafik-grafik pada Gambar 6.14 di bawah ini.



Gambar 6.14

- a. Manakah yang merupakan grafik fungsi?
- b. Manakah yang merupakan korespondensi satu-satu?

3. Tentukan daerah asal dan daerah hasil serta buat sketsa grafik fungsi-fungsi berikut.

a. $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$

b. $f(x) = x^2 - 4x + 3$

c. $f(x) = |x|$

d. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

e. $f(x) = \sqrt{x - 1}$

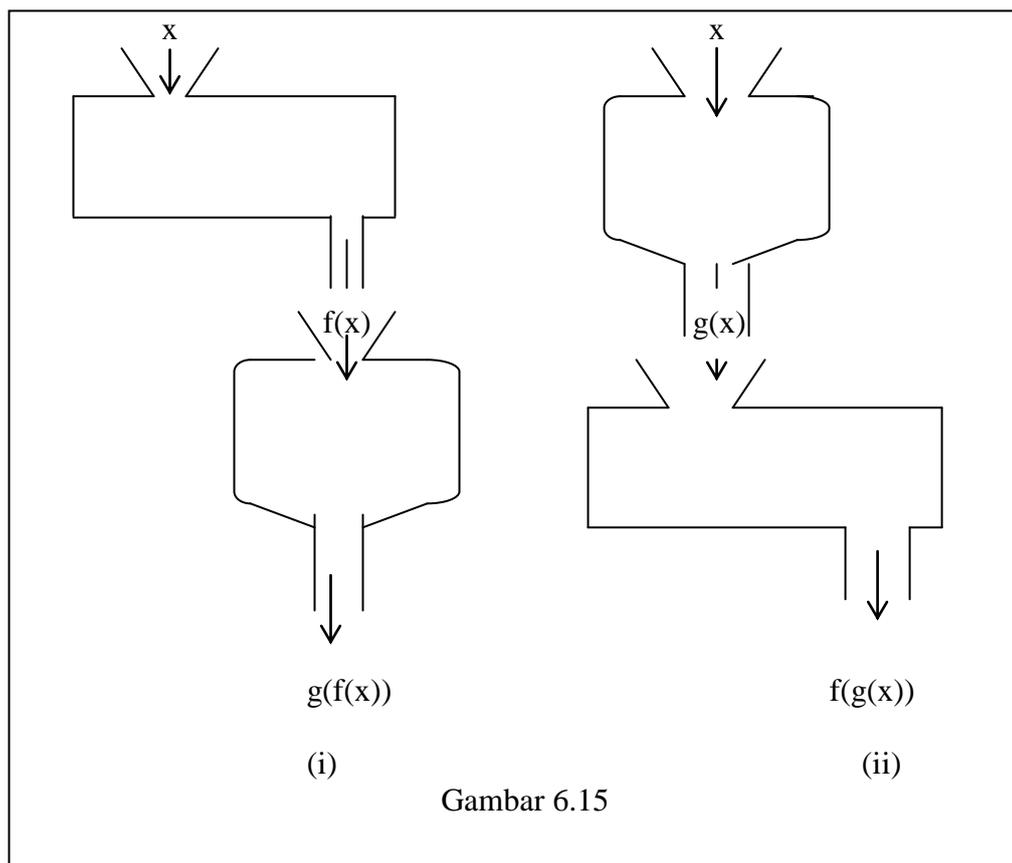
f. $f(x) = 1 - 2x - x^2$

B. Fungsi Komposisi

1. Komposisi Fungsi

Tinjau fungsi-fungsi dengan domain dan kodomainnya berupa himpunan bagian dari bilangan real. Ada beberapa nama fungsi seperti fungsi konstan linear, kuadrat atau fungsi polinom, fungsi nilai mutlak, fungsi trigonometri, fungsi logaritma, fungsi eksponen dan lain sebagainya. Bila kita memiliki sebuah himpunan fungsi, maka kita dapat melakukan operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian pada fungsi-fungsi itu. Misalnya $f(x) = x^2$ dan $g(x) = 2$, maka $f(x) + g(x) = (f+g)(x) = x^2 + 2$, $f(x) - g(x) = (f-g)(x) = x^2 - 2$, $f(x).g(x) = (f.g)(x) = x^2.2 = 2x^2$ dan $\frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2}{2}$.

Sekarang perhatikan apabila kita memiliki dua mesin fungsi f dan g bekerja secara berurutan, f dilanjutkan dengan g atau g dilanjutkan dengan f , seperti terlihat pada Gambar 9.



Misalkan f dan g berturut-turut memiliki aturan $f(x) = x^2$, $g(x) = x-1$. Berdasarkan Gambar 6.15(i), lengkapilah Tabel 2. Juga berdasarkan Gambar 6.15(ii), lengkapilah Tabel 3.

Tabel 2

x	f(x)	g(f(x))
-1		
0		
1		
2		
a		
c		
x		

Tabel 3

x	g(x)	f(g(x))
-1		
0		
1		
2		
a		
c		
x		

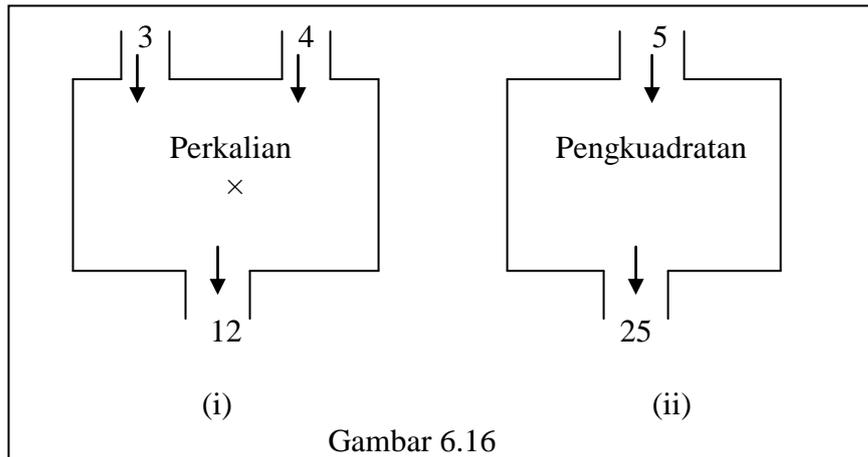
Perhatikan Tabel 2. dengan hanya memperhatikan kolom pertama dan ketiga saja (kolom kedua diabaikan) serta menganggap sebagai suatu mesin fungsi h , maka masukan fungsi h adalah x dan keluarannya adalah $h(x) = g(f(x))$. Selanjutnya h dikatakan sebagai *komposisi* f dan g , ditulis $g \circ f$. Sedangkan pada Tabel 3, $h(x) = f(g(x))$ merupakan komposisi g dan f ditulis $f \circ g$.
 Definisi: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ dan $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

Latihan 3

1. Misalkan f dan g pemetaan dari \mathcal{R} ke \mathcal{R} , dengan $f(x) = x + 1$ dan $g(x) = x^3$. Tentukan (a) $(g \circ f)(1)$, $(g \circ f)(-3)$, $(g \circ f)(x)$; (b) $(f \circ g)(1)$, $(f \circ g)(-3)$, $(f \circ g)(x)$. Apakah $f \circ g = g \circ f$?
2. Misalkan g dan h pemetaan dari \mathcal{R} ke \mathcal{R} , dengan $g(x) = 2x$ dan $h(x) = x^2 + 4$. Tentukan $(h \circ g)(x)$, $(g \circ h)(x)$, $(g \circ g)(x)$, dan $(h \circ h)(x)$. Apakah $g \circ h = h \circ g$?
3. Berikut ini pemetaan dari \mathcal{R} ke \mathcal{R} . Carilah rumus $g \circ f$ dan $f \circ g$ untuk setiap hal.
 - a. $f(x) = x + 3$ dan $g(x) = 2x + 1$
 - b. $f(x) = x - 1$ dan $g(x) = x^2 + x + 1$
 - c. $f(x) = x^2$ dan $g(x) = \sin x$
4. Diketahui $g(x) = 1 - 3x$ dan $h(x) = x^2 - 1$
 - a. Carilah $(h \circ g)(3)$
 - b. Jika $(h \circ g)(x) = 3$, carilah x

2. Sifat-sifat Komposisi Fungsi

Apa yang dimaksud *operasi hitung* pada himpunan bilangan? Penjumlahan, pengurangan, perkalian, pembagian, pengkuadratan, penarikan akar pangkat dua merupakan contoh-contoh operasi hitung. Penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian termasuk pada *operasi biner*. Sedangkan pengkuadratan dan penarikan akar pangkat dua termasuk pada *operasi uner*. Jika operasi itu dipandang sebagai mesin produksi, operasi biner merupakan mesin yang memiliki dua masukan (input) dan sebuah keluaran (output). Sedangkan operasi uner suatu mesin yang memiliki sebuah input dan sebuah output. Gambar 6.16(i) mengilustrasikan operasi biner (penjumlahan), dan Gambar 6.16(ii) mengilustrasikan operasi uner (pengkuadratan).

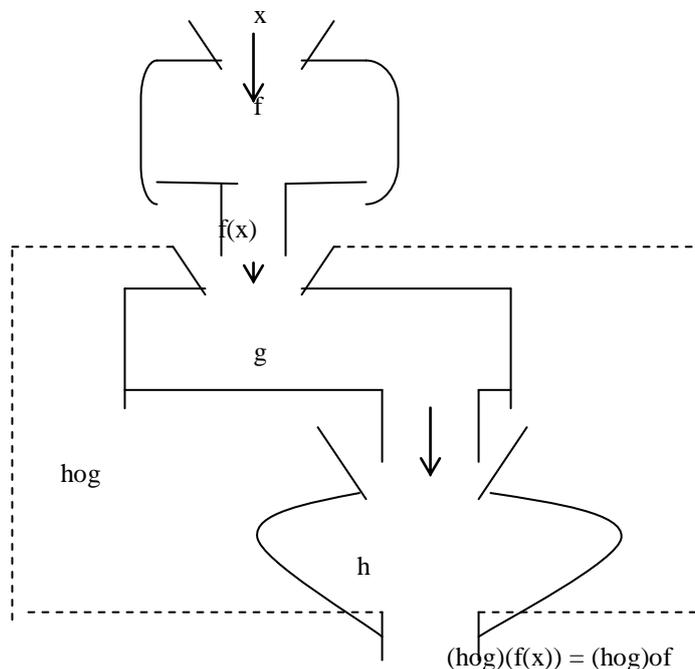


Komposisi fungsi dapat dipandang sebagai operasi biner, dengan memiliki input dua buah fungsi dan outputnya sebuah fungsi. Komposisi fungsi memiliki sifat-sifat sebagai berikut.

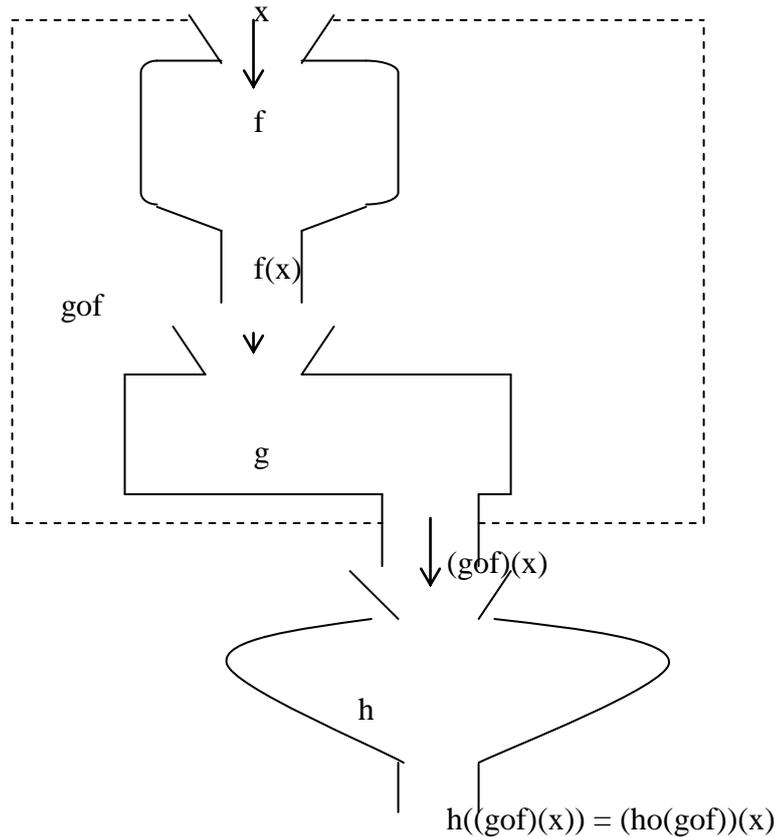
(1) Dari penyelesaian latihan 3, pada umumnya $g \circ f \neq f \circ g$, ini menyimpulkan bahwa komposisi fungsi tidak memenuhi sifat **komutatif**.

(2) **Asosiatif**, yaitu bila f, g dan h fungsi maka $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

Misalkan f, g , dan h fungsi, Gambar 6.17 (i) dan (ii) berturut-turut mengilustrasikan bahwa komposisi fungsi bersifat sifat asosiatif yaitu, $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.



Gambar 6.17(i)



Gambar 6. 17 (ii)

(3) Memiliki **unsur identitas**, yaitu $I(x) = x$, sehingga untuk setiap fungsi f berlaku $foI = Iof = f$. Sebagai contoh, bila $f(x) = x^2 - 3x$, maka $(foI)(x) = f(I(x)) = f(x) = x^2 - 3x$, juga $(Iof)(x) = I(f(x)) = x^2 - 3x = f(x)$

(4) Bila f korespondensi satu-satu, maka ada **fungsi invers** dengan lambang f^{-1} sehingga $fof^{-1} = f^{-1}of = I$. Sebagai contoh, bila $f(x) = x - 3$ maka $f^{-1}(x) = x + 3$ sebab $(fof^{-1})(x) = (x+3) - 3 = x = I(x)$ dan $(f^{-1}of)(x) = (x-3) + 3 = x = I(x)$

Latihan 4.

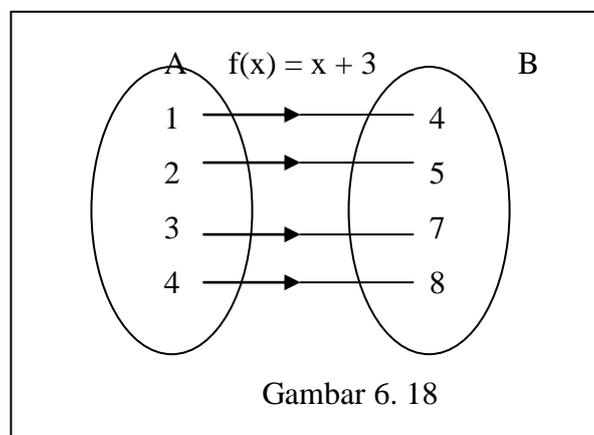
1. Diketahui $f(x) = x - 2$, $g(x) = x^3$ dan $h(x) = 4x$
 - a. Tentukan goh dan kemudian $fo(goh)$
 - b. Tentukan fog dan kemudian $(fog)oh$
 - c. Apakah $fo(goh) = (fog)oh$?
2. Diketahui $f(x) = 2x$, $g(x) = x + 1$, dan $h(x) = x^2$
 - a. Carilah rumus $(hogof)(x)$ dan $(fogoh)(x)$.

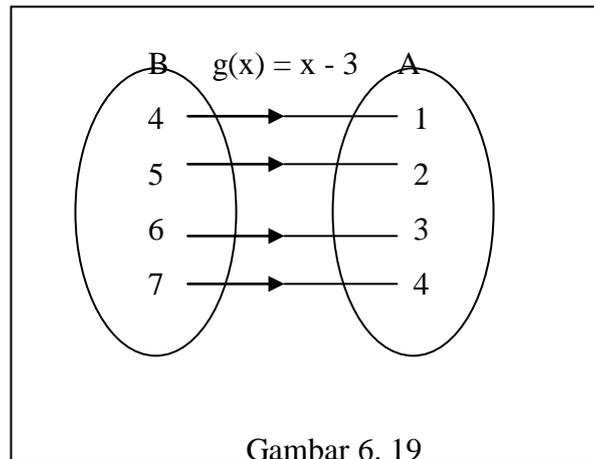
- b. Tentukan nilai-nilai $(f \circ g)(2)$ dan $(g \circ f)(2)$.
3. Misalkan $I(x) = x$, $u(x) = 2x - 3$, $v(x) = x^2 - x + 5$
- Carilah $I \circ u$, $u \circ I$, $I \circ v$, dan $v \circ I$
 - Jika f suatu fungsi, tunjukkan $I \circ f = f \circ I = f$.
- $I(x) = x$ disebut fungsi identitas
4. Tentukan daerah asal dan daerah hasil masing-masing fungsi f , g , $f \circ g$ dan $g \circ f$ bila $f(x) = \sqrt{x-1}$ dan $g(x) = x^2$.
5. Jika f fungsi linear dan g fungsi kuadrat, tunjukkan $f \circ g$ dan $g \circ f$ merupakan fungsi kuadrat.

C. Fungsi Invers dan Sifat-sifatnya

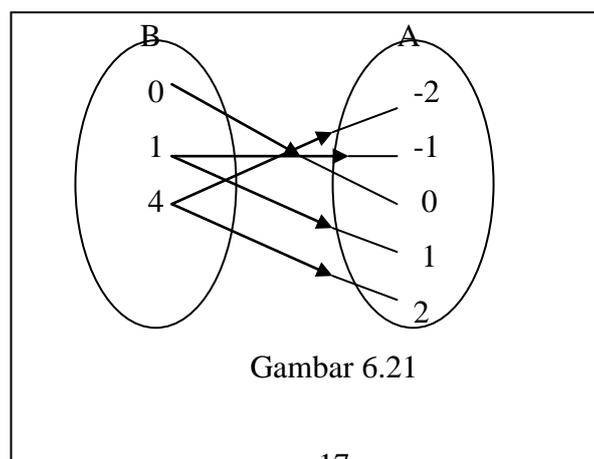
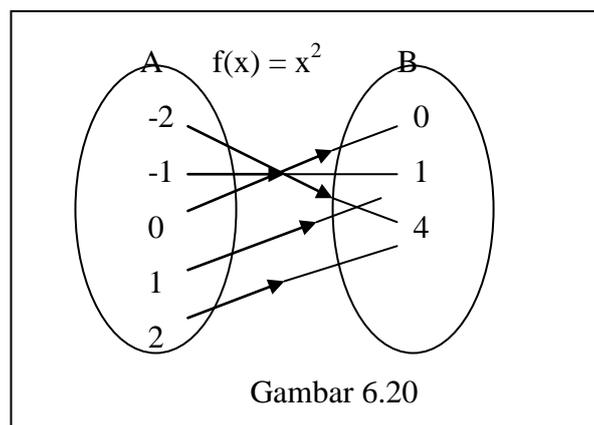
1. Fungsi Invers

Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4\}$ dan $B = \{4, 5, 6, 7\}$ dan fungsi f dari A ke B dengan $f(x) = x + 3$. Melalui diagram panah dapat ditunjukkan A dan B dalam korespondensi satu-satu oleh pemetaan f (Gambar 6.18). Jika diagram panah tersebut di balik dari B ke A , relasi tersebut berupa fungsi, misalkan g dengan $g(x) = x - 3$ (Gambar 6.19). Fungsi g tersebut disebut fungsi invers dari f .





Jika $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \{0, 1, 4\}$ f pemetaan dari A ke B dengan $f(x) = x^2$. Melalui diagram panah dapat diketahui bahwa A dan B tidak berada dalam korespondensi satu-satu (Gambar 6.20), sehingga jika diagram panah itu dibalik dari B ke A bukanlah suatu pemetaan atau fungsi (Gambar 6.21), oleh karena itu fungsi invers dari f tidak terdefinisi.



Dari kedua contoh di atas suatu fungsi $f : A \rightarrow B$ memiliki fungsi invers $g : B \rightarrow A$ apabila A dan B ada dalam korespondensi satu-satu. Jika g ada, maka g dinyatakan dengan f^{-1} (f invers), daerah hasil f adalah daerah asal dari f^{-1} , dan daerah asal f adalah daerah hasil dari f^{-1} .

Contoh 6.1:

Tentukan fungsi invers dari f atau f^{-1} jika $f(x) = \frac{2x}{3-x}$. Tentukan juga daerah asal dan daerah hasil dari f .

Jawab:

Misalkan y peta dari x atau $f(x) = y$

$$\frac{2x}{3-x} = y \text{ atau } y(3-x) = 2x \text{ atau } 3y - xy = 2x \text{ atau } 2x + xy = 3y \text{ atau } x(2+y) = 3y$$

$$\text{atau } x = \frac{3y}{2+y} \text{ atau } f^{-1}(y) = \frac{3y}{2+y}. \text{ Jadi } f^{-1}(x) = \frac{3x}{2+x}.$$

Domain dari $f(x) = \frac{2x}{3-x}$ adalah $A = \{x \mid x \neq 3, x \in \mathfrak{R}\}$, dengan memperhatikan

rumus $f^{-1}(x) = \frac{3x}{2+x}$ diperoleh daerah hasil dari f sama dengan daerah asal dari f^{-1}

yaitu $B = \{x \mid x \neq -2, x \in \mathfrak{R}\}$.

Latihan 5.

1. Carilah rumus untuk fungsi invers f^{-1}

a. $f(x) = 1 - 3x$

b. $f(x) = \frac{x+1}{2x-3}$

c. $f(x) = \frac{x}{x-4}$

d. $f(x) = x^3 - 4$

e. $f(x) = \sqrt{3-x}$

2. $A = \{x : x > 0, x \in \mathfrak{R}, \text{ dan } f, g, \text{ dan fungsi-fungsi pada } A, \text{ dengan } f(x) = x + 1,$
 $g(x) = 2x, \text{ dan } h(x) = x^2$
- Carilah $f^{-1}, g^{-1}, \text{ dan } h^{-1}$
 - Hitunglah $f^{-1}(1), g^{-1}(8), \text{ dan } h^{-1}(4)$
3. Diketahui $f(x) = 2x$ dan $g(x) = x + 2$
- Tulislah rumus f^{-1} dan g^{-1}
 - Carilah rumus untuk $g \circ f, f^{-1} \circ g^{-1}, \text{ dan } (g \circ f)^{-1}$
 - Nyatakan hubungan $f^{-1} \circ g^{-1}$ dan $(g \circ f)^{-1}$
4. a. Gambarkan sketsa grafik $f(x) = x^2$
- Apa sebabnya tidak ada invers?
 - Tentukan daerah asal yang terbatas untuk f sehingga ada fungsi invers f^{-1} .
 - Tulis rumus f^{-1} dan gambar grafiknya.

2. Sifat-sifat Fungsi Invers.

Sudah dikemukakan sebelumnya $I(x) = x$ disebut fungsi identitas karena untuk setiap fungsi f berlaku $f \circ I = I \circ f = f$. Selanjutnya bagaimana kaitan antara fungsi, fungsi inversnya dan fungsi identitas ?

Misalkan $f(x) = \frac{2x}{3-x}, x \neq 3$, maka fungsi inversnya adalah

$$f^{-1}(x) = \frac{3x}{2+x}(x), x \neq -2.$$

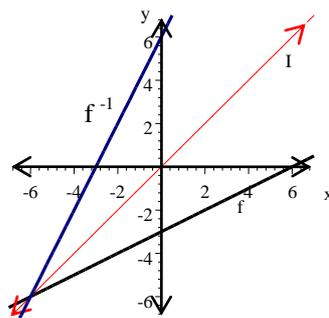
$$\text{Perhatikan } (f \circ f^{-1})(x) = \frac{2\left(\frac{3x}{2+x}\right)}{3 - \left(\frac{3x}{2+x}\right)} = \frac{\frac{6x}{2+3x}}{\frac{3(2+x) - 3x}{2+3x}} = \frac{6x}{6+3x-3x} = x \quad \text{dan}$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = \frac{3\left(\frac{2x}{3-x}\right)}{2 + \left(\frac{2x}{3-x}\right)} = \frac{\frac{6x}{3-x}}{\frac{2(3-x) + 2x}{3-x}} = \frac{6x}{6-2x+2x} = x$$

Dari contoh di atas f^{-1} fungsi invers dari f berlaku $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = I$ (fungsi identitas).

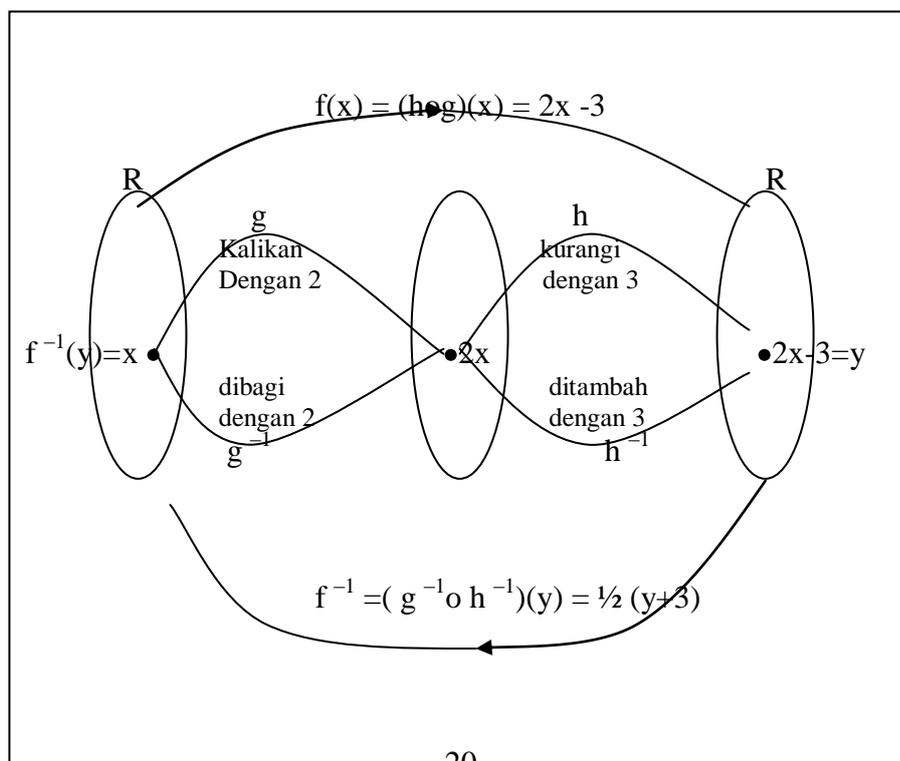
a. Bila f korespondensi satu-satu maka grafik f^{-1} merupakan hasil pencerminan grafik f terhadap garis $y = x$

Sekarang perhatikan $f(x) = 2x + 6$ dan inversnya adalah $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - 3$. Bila ketiga grafik fungsi f , f^{-1} dan I digambarkan dalam satu sistem koordinat akan terlihat seperti pada Gambar 6.22. Ini menunjukkan bahwa grafik f^{-1} merupakan hasil pencerminan grafik f terhadap grafik $I(x) = x$.



Gambar 6.22

Bagaimana kaitan antara invers dari suatu komposisi dua fungsi dengan invers masing-masing fungsi ? Perhatikan $h(x) = x - 3$ dan $g(x) = 2x$. misalkan $f(x) = (hog)(x) = 2x - 3$. Dari Gambar 6.23 di bawah ini menunjukkan bahwa jika $f = hog$ maka $f^{-1} = (hog)^{-1} = g^{-1} \circ h^{-1}$.



Gambar 6.23

b. Bila g dan h korespondensi satu-satu maka $(hog)^{-1} = g^{-1}oh^{-1}$

Dengan menggunakan sifat fungsi identitas dan sifat $f^{-1}of = fo f^{-1} = I$, maka $(hog)^{-1} o(hog) = I$.

$$\Leftrightarrow (hog)^{-1} o(hog)og^{-1} = Iog^{-1} \text{ (kedua ruas dikomposisikan dengan } g^{-1} \text{)}$$

$$\Leftrightarrow (hog)^{-1} oho(gog^{-1}) = Io g^{-1} \text{ (sifat asosiatif)}$$

$$\Leftrightarrow (hog)^{-1} oho I = g^{-1} \text{ (sifat fungsi invers)}$$

$$\Leftrightarrow ((hog)^{-1} oh = g^{-1} \text{ (sifat fungsi identitas)})$$

$$\Leftrightarrow (hog)^{-1} oh o h^{-1} = g^{-1} o h^{-1} \text{ (kedua ruas dikomposisikan dengan } h^{-1} \text{)}$$

$$\Leftrightarrow (hog)^{-1} o(h o h^{-1}) = g^{-1} o h^{-1} \text{ (sifat asosiatif)}$$

$$\Leftrightarrow (hog)^{-1} o I = g^{-1} o h^{-1} \text{ (sifat fungsi invers)}$$

$$\Leftrightarrow (hog)^{-1} = g^{-1} o h^{-1} \text{ (sifat fungsi identitas)}$$

Latihan 6

1. Jika domain dari $f(x) = x^2 - 2x - 3$ adalah $x \leq 0$, tentukan f^{-1} .
2. Jika $f(x) = \frac{1}{x+3}$ dan $g(x) = x^2$ untuk $x \geq 0$ tentukan $(fog)^{-1}(x)$
3. Jika $f(2x-1) = 6x-7$, tentukan nilai $f(7)$.
4. Jika $fog = h$ dan g dalam korespondensi satu-satu, tunjukkan $f = h o g^{-1}$
5. Diketahui $g(x) = \frac{x}{x-4}$ dan $h(x) = \frac{1}{x+1}$. Jika $fog = h$, tentukan f .

Bab 6 Fungsi komposisi dan fungsi invers

Soal Apersepsi

- Jika $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dan $B = \{0, 1, 4, 9, 16\}$
Tuliskan sebuah contoh relasi dan sebuah contoh pemetaan (fungsi) dari A ke B untuk membedakan relasi dan fungsi.
- Ada berapa cara menyatakan suatu relasi atau fungsi? Sebutkan!
- Melalui contoh, jelaskan arti dari domain, kodomain, dan range (daerah hasil).

Perdalam Konsepmu

- Bila biaya produksi merupakan fungsi dari bahan baku dan upah, sedangkan bahan baku dan upah merupakan fungsi dari banyaknya barang yang diproduksi. Operasi fungsi yang paling tepat dari biaya produksi adalah penjumlahan, perkalian atau komposisi fungsi.
- Mengapa jika fungsi f bukan korespondensi satu-satu tidak memiliki fungsi invers.

Rangkuman

- Kaitan antara Relasi, Fungsi dan Korespondensi Satu-satu

No.	Syarat-syarat	Relasi dari A ke B	Fungsi dari A ke B	Korespondensi satu satu antara A dan B
1.	Paling sedikit ada satu anggota A yang berpasangan dengan anggota B	√	√	√
2.	Setiap anggota A memiliki pasangan di B		√	√
3.	Tiap anggota A hanya memiliki satu pasangan di B		√	√
4.	Setiap anggota B memiliki pasangan di A			√
5.	Tiap anggota B hanya memiliki satu pasangan di A			√

- Komposisi fungsi f dan g didefinisikan $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ dan $(g \circ f)(x) = g(f(x))$
- Sifat-sifat komposisi fungsi
 - Tidak komutatif
 - Memiliki sifat asosiatif $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$
 - Memiliki fungsi identitas $I(x) = x$ sehingga $f \circ I = I \circ f = f$
- Jika f korespondensi satu-satu, maka ada fungsi invers dari f ditulis f^{-1} , sehingga $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I$.
- Sifat-sifat fungsi invers
 - Grafik fungsi f^{-1} merupakan hasil pencerminan grafik f terhadap grafik fungsi identitas I .
 - $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ dan $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$
 - Jika f korespondensi satu-satu dan $f \circ g = h$, maka $g = f^{-1} \circ h$

