SEJARAH DAN FILSAFAT MATEMATIKA

Oleh: Endang Mulyana

A. Aliran dalam Matematika

Formalisme

Formalis seperti David Hilbert (1642 –1943) berpendapat bahwa matematika adalah tidak lebih atau tidak kurang sebagai bahasa matematika. Hal ini disederhanakan sebagai deretan permainan dengan rangkaian tanda –tanda lingistik, seperti huruf-huruf dalam alpabet Bahasa Inggeris. Bilangan dua ditandai oleh beberapa tanda seperti 2, II atau SS0. Pada saat kita membaca kadang-kadang kita memaknai bacaan secara matematika, tetapi sebaliknya istilah matematika tidak memiliki sebarang perluasan makna (Anglin, 1994). Formalis memandang matematika sebagai suatu permainan formal yang tak bermakna (meaningless) dengan tulisan pada kertas, yang mengikuti aturan (Ernest, 1991).

Menurut Ernest (1991) formalis memiliki dua dua tesis, yaitu

1. Matematika dapat dinyatakan sebagai sistem formal yang tidak dapat ditafsirkan sebarangan, kebenaran matematika disajikan melalui teorema-teorema formal.
2. Keamanan dari sistem formal ini dapat didemostrasikan dengan terbebasnya dari ketidak konsistenan.

Ada bermacam keberatan terhadap formalisme, antara lain; (1) formalis dalam memahami obyek matematika seperti lingkaran, sebagai sesuatu yang kongkrit, padahal tidak bergantung pada obyek fisik; (2) formalis tidak dapat menjamin permainan matematika itu konsisten. Keberatan tersebut dijawab formalis bahwa (1) lingkaran dan yang lainnya adalah obyek yang bersifat material dan (2) meskipun beberapa permainan itu tidak konsisten dan kadang-kadang trivial, tetapi yang lainnya tidak demikian (Anglin, 1994).

Intuisionisme

Intuisionisme seperti L.E.J. Brouwer (1882-1966), berpendapat bahwa matematika suatu kreasi akal budi manusia. Bilangan, seperti cerita bohong adalah hanya entitas mental, tidak akan ada apabila tidak ada akal budi manusia memikirkannya. Selanjutnya intuisionis menyatakan bahwa obyek segala sesuatu termasuk matematika, keberadaannya hanya terdapat pada pikiran kita, sedangkan secara eksternal dianggap tidak ada. Kebenaran pernyataan *p* tidak diperoleh melalui kaitan dengan obyek realitas, oleh karena itu intusionisme tidak menerima kebenaran logika bahwa yang benar itu *p* atau *bukan p* (Anglin, 1994).

Intuisionisme mengaku memberikan suatu dasar untuk kebenaran matematika menurut versinya, dengan menurunkannya (secara mental) dari aksima-aksioma intuitif tertentu, penggunaan intuitif merupakan metode yang aman dalam pembuktian. Pandangan ini berdasarkan pengetahuan yang eksklusifpada keyakinan yang subyektif. Tetapi kebenaran absolut (yang diakui diberikan intusionisme) tidak dapat didasarkan pada padangan yang subyektif semata (Ernest, 1991).

Ada berbagai macam keberatan terhadap intusionisme, antara lain; (1) intusionisme tidak dapat mempertanggung jawabkan bahwa obyek matematika bebas, jika tidak ada manusia apakah 2 + 2 masih tetap 4; (2) matematisi intusionisme adalah manusi timpang yang buruk dengan menolak hukum logika p atau bukan p dan mengingkari ketakhinggaan, bahwa mereka hanya memiliki sedikit pecahan pada matematika masa kini. Intusionisme, menjawab keberata tersebut seperti berikut; tidak ada dapat diperbuat untuk manusia untuk mencoba membayangkansuatu dunia tanpa manusia; (2) Lebih baik memiliki sejumlah sejumlah kecil matematika yang kokoh dan ajeg dari pada memiliki sejumlah besar matematika yang kebanyakan omong kosong (Anglin, 1994).

Logisisme

Logisisme memandang bahwa matematika sebagai bagian dari logika. Penganutnya antara lain G. Leibniz, G. Frege (1893), B. Russell (1919), A.N. Whitehead dan R. Carnap(1931). Pengakuan Bertrand Russell menerima logisime adalah yang paling jelas dan dalam rumusan yang sangat ekspilisit. Dua pernyataan penting yang dikemukakannya, yaitu (1) semua konsep matematika secara mutlak dapat disederhanakan pada konsep logika; (2) semua kebenaran matematika dapat dibuktikan dari aksioma dan aturan melalui penarikan kesimpulan secara logika semata (Ernest, 1991).

Menurut Ernest (1991), ada beberapa keberatan terhadap logisisme antara lain:

1. Bahwa pernyataan matematika sebagai impilikasi pernyataan sebelumnya, dengan demikian kebenaran-kebenaran aksioma sebelumnya memerlukan eksplorasi tanpa menyatakan benar atau salah. Hal ini mengarah pada kekeliruan karena tidak semua kebenaran matematika dapat dinyatakan sebagai pernyataan implikasi.
2. Teorema Ketiddaksempurnaan Godel menyatakan bahwa bukti deduktif tidak cukup untuk mendemonstrasikan semua kebenaran matematika. Oleh karena itu reduksi yang sukses mengenai aksioma matematika melalui logika belum cukup untuik menurunkan semua kebenaran matematika.
3. Kepastian dan keajegan logika bergantung kepada asumsi-asumsi yang tidak teruji dan tidak dijustifikasi. Program logisis mengurangi kepastian pengetahuan matematika dan merupakan kegagalan prinsip dari logisisme. Logika tidak menyediakan suatu dasar tertentu untuk pengetahuan matematika.

B. Filsafat Matematika

Berdasarkan perspektif epistemologi, kebenaran matematika terbagi dalam dua kategori, yaitu pandangan absolut dan pandangan fallibilis. Absolutis memandang kebenaran matematika secara absolut, bahwa ‘mathematics is the one and perhaps the only realm of certain, unquestionable and objective knowledge’, sedangkan menurut fallibilis mathematicak truth is corrigible, and can never regarded as being above revision and correction’ (Ernest, 1991).

Menurut Woozley (dalam Ernest, 1991), pengetahuan terbagi dalam dua kategori, yaitu pengetahuan a priori dan pengetahuan a posteriori (empirical). Pengetahuan a priori memuat proposisi yang didasarkan atas , tanpa dibantu dengan observasi terhadap dunia. Penalaran di sini memuat penggunaan logika deduktif dan makna dari istilah-istilah, secara tipikal dapat ditemukan dalam definisi. Secara kontras pengetahuan a posteriori memuat proposi yang didasarkan atas pengalaman, yaitu berdasarkan observasi dunia.

Absolutis memandang pengetahuan matematika didasarkan atas dua jenis asumsi; matematika ini berkaitan dengan asumsi dari aksioma dan definisi, dan logika yang berkaitan dengan asumsi aksioma, aturan menarik kesimpulan dan bahasa formal serta sintak. Ada lokal (micro) dan ada global (macro) asumsi, seperti deduksi logika cukup untuk menetapkan kebenaran matematika.

Menurut Wilder (dalam Ernest, 1991), pandangan absolutis menemui masalah pada permulaan permulaan abad 20, ketika sejumlah antinomis dan kontradiksi yang diturunkan dalam matematika. Russel telah menunjukkan bahwa sistem yang dipublikasikan Gottlob Frege tahun 1879 dan 1893 tidak konsisten. Kontradiksi lainnya muncul dalah teori himpunan dan teori fungsi. Penemuan ini berakibat terkuburnya pandangan absolutis tentang matematika. Jika matematika itu pasti dan semua semua teoremanya pasti, bagaimana dapat terjadi kontradiksi di antara teorema-teorema itu?

Tesis dari fallibilis memiliki dua bentuk yang ekivalen, satu positif dan satu negatif. Bentuk negatif berkaitan dengan penolakan terhadap absolutis; pengetahuan matematika bukan kebenaran yang mutlak dan tidak memiliki validitas yang absolut. Bentuk positifnya adalah pengetahuan matematika dapat dikoreksi dan terbuka untuk direvisi terus menerus.

C. Obyek-obyek Matematika

Plato (427-349 SM) merupakan seorang realis, dia mempercayai bahwa realitas itu ada dan tidak terikat pikiran manusia. Suatu sistem dikatakan benar jika suatu pernytaaan menjelaskan keadaan sesungguhnya dari realitas yang terbebas dari pikiran. Pernyataan Plato yang terkenal adalah “ Sesuatu adalah saya sebagaimana hal itu terjadi pada saya, dan sesuatu itu adalah kamu sebagaimana hal itu terjadi pada kamu.

Plato meyakini bahwa benda-benda di alam semesta terbagi ke dalam dua kelas, yaitu yang berbentuk materi dan non materi. Benda-benda seperti matahari, pohon, binatang berbentuk materi, sementara kebaikan, keburukan, jiwa seorang manusia termasuk kaategori non materi. Suatu gambar empat persegi panjang termasuk kategori materi, tetapi persegi panjang itu sendiri termasuk ke dalam kategori non materi.

Aristoteles (384-322 SM) seorang murid dari Plato selama duapuluh tahun, tetapi ia sendiri tidak setuju dengan Plato mengenai hakekat matematika. Bagi dia kata " dua" bukan suatu kata benda untuk suatu obyek abstrak yang bebas dari obyek fisik, tetapi suatu keterangan merumuskan suatu obyek fisik, misal panjangnya dua meter (Anglin, 1994).

Aristoteles meletakkan ketakberhinggan pada tempatnya begitu kokoh, sehingga hampir setiap orang tidak bisa mempertimbangkan secara langsing hingga abad ke IX. Pendekatan yang digunakan adalah fragmatik, dengan menyatakan bahwa ketakhinggan pasdti ada, sebab waktu muncul tanpa awal dan tanpa akhir, demikian juga dengan bilangan. Andaikata ada ada bilangan yang paling besar disebut dengan 'maximal' (max), kemudian bagaimana dengan max+1 atau max + 2 ? tetapi sebaliknya ketakhinggaan tidak ada di dunia nyata, andaika ada, contohnya tubuh manusia juga tak berhingga, itu tak terbatas pada sebuah tubuh.

D. Kontribusi Newton, Wallis, Barrow, dan Leibniz pada Kalkulus

Isaac Newton (1642 –1727).

Penemuan Newton tentang matematika yang penting antara lain generalisai teorema binomial dalam bentuk

$$(P+PQ)^{m/n} = P^{m/n} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \ldots$$

dengan A merepresentasikan suku pertama yaitu $P^{m/n}$, B merepresentasikan suku kedua yaitu (m/n)AQ, C merepresentasikan suku ketiga dan seterusnya.

Matematika lain yang lebih penting dikemukakan Newton adalah metode fluksion yang ia sampaikan kepada Barrow tahun 1669. Metode fluksion telah ditulis pda tahun 1671, tetapi hingga tahun 1736 maasih belum diterbitkan. Dalam buku itu Newton memandang suatu kurva sebagaimana gerakan titik yang kontinu. Berdasarkan hal ini absis dan ordinat membentuk titik, secara umum sebagai perubahan besaran. Suatu perubahan besaran disebut fluent dan rata-rata perubahan itu disebut fluxion dari fluent. Jika suatu fluent seperti ordinat dari titik mengahsilkan suatu kurva yang direpresentasikan dengan y, maka fluxion dari fluent ditulis dengan &. Dalam notasi modern notasi % ini ekivalen dengan dy/dt, dimana t representasi dari waktu. Pada memperkenalkan ke dalam geometri, waktu dapat dipandang sebagai besaran yang bergerak, misalnya absis yang bertambah secara tetap. Konstatanta rata-rata pertambahan dari beberapa fluent disebut prinsipal fluxion, dan fluxion dari sebarang fluent lainnya dapat dibandingkan dengan prinsipal fluxion ini. Fluxion dari % adalah χ dan seterusnya untuk fluxion berderajat lebih tinggi (Eves, 1964).

John Wallis (1616-1703)

Wallis salah seorang yang pertama kali mendiskusikan irisan kerucut sebagai kurva. Pada tahun 1656 ia menyusun sebuah buku *Aritmetica infinitorum*. Pada buku ini metode Decartes dan Cavalieri disistematisasikan dan diperluas dan sejumlah hasil yang luar biasa diperkenalkan dari kasus-kasus khusus., antara lain:

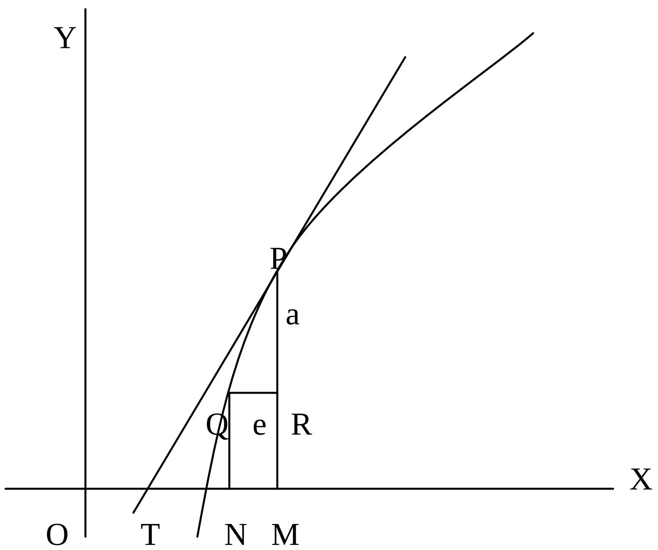
$\int_0^1 x^m dx = \dfrac{1}{m+1}$ dengan m adalah bilangan bulat positif, dan diklim berlaku untuk m bilangan rasional atau negatif kecuali –1. Wallis pertama kali yang menjelaskankelengkapan dari signifikansi nol, negatif, dan pangkat pecahan dan memperkenalkan simbol ketakhinggaan ∞.

Wallis berusaha keras untuk mendifinisikan π sebagai ekspresi luas daerah, $\pi/4$ adalah luas daerah sebuah kuadran dari lingkaran $x^2 + y^2 = 1$. Luas tersebut ekivalen dengan hasil perhitungan $\int_0^1 (1-x^2)^{1/2} dx$, yang Willis tidak dapat menyelesaikannya secara langsung. Ia berturut-turut menghitung $\int_0^1 (1-x^2)^0 dx$, $\int_0^1 (1-x^2)^1 dx$, $\int_0^1 (1-x^2)^2 dx$, dan seterusnya hingga diperoleh barisan 1, 2/3, 8/15, 16/35… Selanjutnya ia meninjau masalah ini sebagai menemukan aturan untuk n= 0, 1, 2, 3, … dari barisan tersebut. Dengan melakukan interpolasi aturan tersebut untuk n = ½ diperoleh bahwa $\pi/2 = \dfrac{2.2.4.4.6.6.8\ldots}{1.3.3.5.5.7.7\ldots.}$ atau $\pi/4 = \dfrac{2.4.4.6.6.8\ldots}{3.3.5.5.7.7\ldots.}$.

Wallis mencapai hal lain dalam matematika. Ia salah satu matematisi yang dapat mendekati tantangan Pascal dalam sikloid, bahwa diperoleh suatu frumus yang ekivalen $ds = [1 +(dy/dx)^2]^{1/2} dx$ untuk panjang sepotong busur pada kurva. Wallis memberikan kontribusi pada perkembangan kalkulus dengan meletakkan teori integrasi (Eves, 1964).

Isaac Barrow (1630-1677)

Barrow memberikan kontribusi yang sangat penting pada perkembangan kalkulus yang terkait dengan teori diferensial. Dalam bukunya berjudul Lectiones opticae et geometricae, ia menemukan pendekatan yang paling mirip dengan proses diferensial modern. Ia menggunakan istilah yang sekarang disebut segitiga diferensial. Misalkan kita ingin menemukan gradien garis singgung di titik P dari kurva yang diberikan. Misalkan Q titik lain pada kurva tersebut (Gambar 1). Segitiga PTM hampir sebangun dengan segitiga PQR. Segitiga yang kecil dapat lebih kecil lagi tanpa batas RP/QR = MP/MT. Misalkan QR = e dan RP = a. Jika koordinat P(x,y), maka koordinat Q(x-e, y-a). Dengan mensubsitusi nilai tersebut ke dalam persamaan kurva dan mengabaikan kuadrat atau pangkat yang lebih tinggi dari e dan a diperoleh perbandingan e/a. Selanjutnya diperoleh OT = OM – TM = OM –MP(QR/RP) = x – y(e/a) dan gradien garis singgung kurva tersebut diperoleh.



Gambar 1.

Selanjutnya Barrow mengaplikasikan metode tersebut dalam mencari gradien garis singgung pada kurva-kurva berikut:

(i) $x^2(x^2 + y^2) = r^2y^2$ (kurva kappa),

(ii) $x^3 + y^3 = r^3$ (kurva Lame),

(iii) $x^3 + y^3 = rxy$ (folium of Descartes atau la galande),

(iv) $y = (r - x) \tan \frac{\pi x}{2r}$ (the quadratic),\

(v) $y = r \tan \frac{\pi x}{2r}$ (kurva tangen).

Sebagai suatu ilustrasi kita coba aplikasikan metode tersebut pada kurva (ii) $x^3 + y^3 = r^3$ sehingga diperoleh $(x-e)^3 + (y-a)^3 = r^3$ atau $x^3 - 3x^2e + 3xe^2 - e^3 + y^3 - 3y^2a + 3ya^2 - a^3 = r^3$. Dengan mengabaikan kuadrat atau pangkat yang lebih tinggi dari e dan a dan persamaan $x^3 + y^3 = r^3$, persamaan tersebut dapat disederhanakan menjadi $3x^2e + 3y^2a = 0$ atau $a/e = -x^2/y^2$.

Perbandingan a/e adalah sama dengan dy/dx sekarang ini dan prosedur Barrow yang dipertanyakan ini secara mudah dapat dibuat secara ketat dengan menggunakan teori limit.

Gottfried Wilhlem Leibniz (1646-1716).

Leibniz adalah yang pertama kali menggunakan tanda integral modern, menggunakan huruf S yang diambil dari kata Latin summa seperti $\int ydy$ dan $\int ydx$. Dalam makalahnya ia memperkenalkan dx sebagai interval terhingga sebarang dan kemudian mendefinisikan dy melalui proporsi dy : dx = y : subtangen. Berbagai tauran diferensial yang elementer yang kemudian dipelajari oleh siswa diturunkan oleh Libniz. Aturan untuk menemukan turunan ke n dari perkalian fungsi yang dikenal dengan *Aturan Leibniz* (Eves, 1964).

Leibniz berpendapat bahwa dy dan dx pada dy/dx sebagai besaran desimal yang tak berhingga (infinesimal). Jadi dx adalah suatu inkremen yang tidak nol tetapi kecil sekali dalam x dan mendefinisikan dy = f(x + dx) – f(x) dan biasanya tidak sama dengan nol. Sebagai contoh, jika $y = f(x) = x^2$, maka $dy = (x + dx)^2 - x^2 = 2x(dx) + (dx)^2$. Ini merepresentasikan ‘rise’ pada fungsi f yang berkorespondensi dengan ‘run’ dari dx. Kemiringan dari garis singgung pada x adalah $\frac{rise}{run} = \frac{dy}{dx} = 2x + dx$, dan karena dx menuju nol maka kemiringan garis singgung tersebut adalah 2x (Anglin, 1994).

E. Daftar Pustaka

Anglin, W. S. (1994). *Mathematics: A Concise History and Philosophy*. New York: Springer-Verlag.

Eves, H. (1964). *An Introduction to the History of Mathematics*. New York: Holt, Rinehart and Winston:

Ernest, P. (1991). *The Philosophy of Mathematics Education*. London: The Falmer Press