BAB IV

**BEBERAPA MODEL DISTRIBUSI PELUANG
PEUBAH ACAK DISKRIT**

4.1 Distribusi BernoulliBelum ada

$f : S_x \rightarrow B$, dengan $f(0) = P(X=0) = 1 - \theta$ dan $f(1) = P(X=1) = \theta$ atau

$f(x) = P(X=x) = \theta^x (1-\theta)^{1-x}$, $x=0,1$. Apabila domain dari f diperluas menjadi

R , maka fungsi $f : B = S_x \cup S_x^c \rightarrow B$ adalah fungsi kepadatan peluang, dengan persamaan :

$$f(x) = \begin{cases} \theta^x (1-\theta)^{1-x} & ; x = 0,1 \\ 0 & ; \text{lainnya} \end{cases}$$

Catatan : $\theta = P$ (sukses) dinamakan parameter

Definisi :

Peubah acak X berdistribusi Bernoulli dengan parameter θ dan dikatakan sebagai peubah acak Bernoulli, jika fkpnya berbentuk :

$$f(x) = f(x, \theta) = P(X=x) = \begin{cases} \theta^x (1-\theta)^{1-x} & ; x = 0,1 \\ 0 & \text{lainnya} \end{cases}$$

Catatan :

Peubah acak Bernoulli X dengan parameter θ ditulis, $X : B(1, \theta)$ atau

$$X \approx B(1, \theta)$$

Jika $X : B(1, \theta)$, maka rerata, varians, dan fkp dari X adalah :

1. $\mu = \theta$

$$2. \sigma^2 = \theta(1 - \theta)$$

$$3. M_x(t) = 1 + \theta(e^t - 1), t \in \mathbb{R}$$

Bukti :

$$1. \mu = E[X] = \sum_x xf(x) = \sum_{x=0}^1 x\theta^x(1-\theta)^{1-x} = 0 + 1.\theta(1-\theta)^0 = \theta$$

$$\begin{aligned} 2. \sigma^2 &= E[(X - \mu)^2] = E[(X - \theta)^2] = \sum_{x=0}^1 (x - \theta)^2 \theta^x (1 - \theta)^{1-x} = \theta \\ &= (0 - \theta)^2 \theta^0 (1 - \theta)^{1-0} + (1 - \theta)^2 \theta^1 (1 - \theta)^{1-1} = \theta^2(1 - \theta) + (1 - \theta)^2 \theta \\ &= \theta(1 - \theta)[\theta + (1 - \theta)] = \theta(1 - \theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. M_x(t) &= E[e^{tx}] = \sum_{x=0}^1 e^{tx} \theta^x (1 - \theta)^{1-x} = e^0 \theta^0 (1 - \theta)^1 + e^t \theta^1 (1 - \theta)^0 \\ &= (1 - \theta) + \theta e^t = 1 + \theta(e^t - 1) \end{aligned}$$

4.2. Distribusi Binomial

Distribusi binomial berhubungan dengan percobaan yang mempunyai ciri-ciri tertentu, yaitu “percobaan Bernoulli”. Percobaan Bernoulli mempunyai ciri-ciri :

- (i) Percobaan dilakukan n kali ($n \geq 1$) dengan kondisi yang sama
- (ii) Tiap percobaan hanya mempunyai dua hasil yaitu “sukses” dan “gagal”
- (iii) Peluang sukses tiap percobaan sama, yakni $P(\text{sukse}) = \theta$ dan $P(\text{gagal}) = 1 - \theta$
- (iv) Percobaan yang satu dengan yang lain saling bebas

Misalkan peubah acak X adalah banyak sukses dalam n kali percobaan, maka range X adalah $S_x = \{0, 1, 2, \dots, n\}$. Misalkan kita adalah bagaimana distribusi dari X ? Khususnya bagaimana $P[X=x]$ dengan $X=0, 1, 2, \dots, n$? Misalkan dalam n kali pengulangan percobaan diperoleh x sukses dan n-x gagal dan salah satu susunan hasilnya adalah sss.....s gg ...g, karena muncul sukses tiap x kali (n-x) kali percobaan adalah sama yaitu $P(x) = \theta$ dan percobaan yang satu dengan yang lainnya saling bebas, maka $P(\text{sss} \dots \text{sgg} \dots \text{g}) = \theta^x (1 - \theta)^{n-x}$, karena banyak susunan x

sukses dan $(n-x)$ gagal dalam n kali pengulangan percobaan adalah $\binom{n}{x}$ atau

$\binom{n}{n-x}$ maka

$$P[X = x] = \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x} \quad x = 0, 1, 2, \dots, n$$

jadi fkp dari $X =$ ‘banyak sukses dalam n kali percobaan’ adalah

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x} & , x = 0, 1, 2, \dots, n \\ 0 & , \text{lainnya} \end{cases}$$

Dengan $\theta = P$ (sukses) dan $n =$ banyak percobaan dinamakan parameter-parameternya. Dapat ditunjukkan bahwa fungsi f di atas benar-benar sebuah fkp dari X sebagai berikut :

$$\text{Jelas } f(x) \geq 0 \forall x \in R \text{ dan } \sum_x f(x) = \sum_{x=0}^n \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x} = (\theta + (1-\theta))^n = 1^n = 1$$

Definisi :

Peubah acak X berdistribusi Binomial dan dikatakan sebagai peubah acak binomial jika fkp-nya berbentuk :

$$f(x) = b(x : n, \theta) = \begin{cases} \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x} & ; x = 1, 2, 3, \dots, n \\ 0 & ; \text{lainnya} \end{cases}$$

Catatan :

Peubah acak X berdistribusi binomial dengan parameter n dan θ ditulis dengan $X : B(n, \theta)$

A. Teorema

1. $\mu = n\theta$
2. $\sigma^2 = n\theta(1-\theta)$
3. $M_x(t) = [(1-\theta) + \theta e^t]^n$

B. Bukti

$$\begin{aligned}
 1. \mu &= E[X] = \sum_x x \cdot b(x; n; \theta) = \sum_{x=0}^n x \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x} \\
 &= \sum_{x=1}^n x \frac{n!}{(n-x)!x!} \theta^x (1-\theta)^{n-x} = \sum \frac{(n-1)!}{(n-x)(x-1)!} \theta \cdot \theta^{(x-1)} (1-\theta)^{n-x} \\
 &= n \theta \sum_{x=1}^n \frac{(n-1)!}{(n-x)!(x-1)!} \theta^{(x-1)} (1-\theta)^{n-x}
 \end{aligned}$$

missal $n-1 = m$, dan $x-1 = y$, $x = 1, 2, \dots, n$ $y = 0, 1, \dots, n-1 = m$

$n-x = m+1-(y+1) = m-y$, maka

$$\begin{aligned}
 &= n \theta \sum_{y=0}^m \frac{m!}{(m-y)!y!} \theta^y (1-\theta)^{m-y} \\
 &= n \theta \sum_{y=0}^m \binom{m}{y} \theta^y (1-\theta)^{m-y} \\
 &= n \theta [\theta + (1-\theta)]^m = n \theta
 \end{aligned}$$

2. $\sigma^2 = E[X^2] - E^2[X]$ dengan

$$\begin{aligned}
 E[X^2] &= \sum_{x=0}^n x^2 \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x} = \sum_{x=2}^n x^2 \frac{n!}{(n-x)!x!} \theta^x (1-\theta)^{n-x} \\
 &= \sum_{x=2}^n x^1 \binom{n}{x} \theta x (1-\theta)^{n-x} = \sum_{x=2}^n (x-1) \frac{n!}{(n-x)!x!} \theta^x (1-\theta)^{n-x} \\
 &= \sum_{x=2}^n n! \frac{\theta^x (1-\theta)^{n-x}}{(n-x)!(x-1)!} \\
 &= n(n-1)\theta^2 \sum_{x=2}^n \frac{(n-2)! \theta^{x-2} (1-\theta)^{n-x}}{(n-x)!(x-2)!} + n\theta \sum_{x=1}^n \frac{(n-1)!}{(n-x)!(x-1)!} \theta^{x-1} (1-\theta)^{n-x} \\
 &= n(n-1)\theta^2 + n\theta
 \end{aligned}$$

maka $\sigma^2 = n(n-1)\theta^2 + n\theta - n^2\theta^2 = n\theta(1-\theta)$

$$3. M_x(t) = E[e^{tx}] = \sum_{x=0}^n e^{tx} \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x}$$

$$= \sum_{x=0}^n \binom{n}{x} (\theta e^t)^x (1-\theta)^{n-x}$$

$$= [(\theta e^t + (1-\theta))]^n = [(1-\theta) + \theta e^t]$$

Contoh 4.1.

Dari sebuah kelas yang terdiri atas 20 mahasiswa dan 30 mahasiswi diambil 5 orang 1-1 secara acak dengan pengambilan. Jika p.a X menyatakan banyaknya mahasiswi terambil dalam 5 kali pengambilan maka :

- a. Tentukan distribusi atau f.k.p dari X, dan hitung peluang terambil 4 mahasiswa dalam 5 kali pengambilan
- b. Hitung harapan banyak mahasiswi terambil dalam 5 kali pengambilan
- c. Hitung varians dari X
- d. Tentukan f.p.m X

Penyelesaian ;

- a. Dapat ditunjukkan, bahwa percobaan pengambiln 5 orang ini memenuhi semua ciri dalam percobaan Bernoulli dengan peluang n = 5 kali dan peristiwa sukses adalah terambil mahasiswi

Dengan θ = peluang sukses muncul dalam tiap pengambilan
 = peluang mahasiswi terambil dalam tiap percobaan

$$= \frac{30}{50} = \frac{3}{5}$$

Sehingga X = banyaknya mahasiswi terambil dalam 5 kali pengambilan,

memiliki distribusi X:B $\left(5, \frac{3}{5}\right)$ dengan fungsi peluang $b\left(x; 5, \frac{3}{5}\right)$ atau f.k.p

$$f(x)=P(X=x)=b\left(x; 5, \frac{3}{5}\right) = \begin{cases} \frac{5}{x} (0,6)^x (0,4)^{5-x} & ; x = 0,1,2,3,4,5 \\ 0 & \text{lainnya} \end{cases}$$

dan $f(4) = P(X=4) = b(4; 5, 0,6) =$ Peluang terambil 4 mahasiswi dalam 5 kali pengambilan

$$\binom{5}{4}(0,6)^4(0,4) = 5(0,1296) \cdot 0,4 = 0,2592$$

b. $\mu = E[X] =$ Harapan (rerata) banyak mahasiswi terambil dalam 5 kali pengambilan

$$= \sum_{x=0}^5 x \binom{5}{x} [0,6]^x (0,4)^{5-x} = 5(0,6) = 3$$

c. $\sigma^2 \text{ var}(x) = E[(x - \mu)^2] = n\theta(1 - \theta) = 5(0,6)(0,4) = 1,2$

d. $M_x(t) = E[e^{tx}] = [(1 - \theta) + \theta e^t]^5 = (0,4 - 0,6e^t)^5 \quad t \in \mathfrak{R}$

4.3. Distribusi Trinomial

Distribusi trinomial merupakan perluasan dari distribusi binomial. Pandang percobaan Bernoulli dengan pengulangan n kali dan tiap percobaan muncul 3 peristiwa (3 hasil), yaitu ‘sukses 1’, ‘sukses 2’ dan ‘gagal’ dengan $P(\text{sukses 1}) = \theta_1$, $P(\text{sukses 2}) = \theta_2$, dan $P(\text{gagal}) = \theta_3 = 1 - (\theta_1 + \theta_2)$ dalam hal ini $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 1$

Misalkan p.a. X = banyaknya unsure sukses I muncul dalam n kali pengulangan

p.a. Y = banyaknya unsur sukses 2 muncul dalam n kali pengulangan

dan p.a. $n - X - Y$ = banyaknya unsur gagal muncul dalam n kali pengulangan

Berarti $S_x = S_y = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ dan $X + Y \leq n$. Masalah kita adalah bagaimana distribusi bersama dari X dan Y ? Karena X dan Y diskrit, berarti f.k.p bersama dari X dan Y adalah $f(x, y) = P(X = x, Y = y) = ?$

Dapat ditunjukkan bahwa fungsi peluang bersama dari X dan Y adalah

$$\frac{n!}{x!y!(n-x-y)!} \theta_1^x \theta_2^y (1 - \theta_1 - \theta_2)^{n-x-y} \text{ yang menyatakan peluang } x \text{ unsur sukses I dan}$$

y unsur sukses 2. Dalam hal ini n, θ_1, θ_2 adalah parameternya.

Definisi

Dua peubah acak X dan Y mempunyai distribusi bersama trinomial, dan dikatakan sebagai peubah acak trinomial, jika f.k.pnya berbentuk :

$$f(x, Y) = P(X=x, Y=y)$$

$$= \begin{cases} \frac{n!}{x!y!(n-x-y)!} \theta_1^x \theta_2^y (1-\theta_1-\theta_2)^{n-x-y} & ; 0 \leq x+y \leq n; x, y = 0, 1, 2, \dots, n \\ & ; x, y \text{ lainnya} \end{cases}$$

Catatan :

Peubah acak X dan Y memiliki distribusi bersama trinomial dengan parameter $n, \theta_1,$ dan θ_2 ditulis $X, Y ; T(n, \theta_1, \theta_2)$

C. Teorema

Jika $X, Y ; T(n, \theta_1, \theta_2)$, maka

- a. fpm bersama dari X dan Y , adalah

$$M_{xy}(t_1, t_2) = [(1-\theta_1-\theta_2) + \theta_1 e^{t_1} + \theta_2 e^{t_2}]^n, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$
- b. $X : B(n, \theta_1)$ dan $Y : B(n, \theta_2)$
- c. $\mu_x = n\theta_1, \mu_y = n\theta_2, \sigma_x^2 = n\theta_1(1-\theta_1)$ dan $\sigma_y^2 = n\theta_2(1-\theta_2)$

Bukti :

$$\begin{aligned} \text{a. } M_{xy}(t_1, t_2) &= E [e^{t_1x+t_2y}] = \sum_x \sum_y e^{t_1x+t_2y} f(x, y) \\ &= \sum_{x=0}^n \sum_{y=0}^{n-x} e^{t_1x+t_2y} \frac{n!}{x!y!(n-x-y)!} \theta_1^x \theta_2^y (1-\theta_1-\theta_2)^{n-x-y} \\ &= \sum_{x=0}^n \sum_{y=0}^{n-x} \frac{n!}{x!y!(n-x-y)!} (\theta_1 e^{t_1})^x (\theta_2 e^{t_2})^y (1-\theta_1-\theta_2)^{n-x-y} \\ &= \sum_{x=0}^n \frac{n!}{x!(n-x)!} (\theta_1 e^{t_1})^x \sum_{y=0}^{n-x} \frac{n!}{y!(n-x-y)!} (\theta_2 e^{t_2})^y (1-\theta_1-\theta_2)^{n-x-y} \\ &= \sum_{x=0}^n \frac{n!}{x!(n-x)!} (\theta_1 e^{t_1})^x \sum_{y=0}^{n-x} \binom{n-x}{y} (\theta_2 e^{t_2})^y (1-\theta_1-\theta_2)^{n-x-y} \\ &= \sum_{x=0}^n \binom{n}{x} (\theta_1 e^{t_1})^x (\theta_2 e^{t_2} + 1-\theta_1-\theta_2)^{n-x} \end{aligned}$$

$$= [(1-\theta_1 - \theta_2) + \theta_1 e^{t_1} + \theta_2 e^{t_2}]^n \quad t_1, t_2, \in \mathbb{R}$$

- b. Misalkan $M_x(t_1)$ fpm dari X maka,

$$M_x(t_1) = M_{xy}(t_1, 0)$$

$$= [(1-\theta_1 - \theta_2) + \theta_1 e^{t_1} + \theta_2] = [(1-\theta_1)\theta_1 e^{t_1}]^n$$

Ternyata ini adalah fpm dari X :B(n, θ_1) dengan cara yang sama diperoleh Y :B(n, θ_2)

- c. Karena X :B(n, θ_1) dan Y :B(n, θ_2) maka,

$$\mu_x = n\theta_1, \mu_y = n\theta_2, \sigma_x^2 = n\theta_1(1-\theta_1) \text{ dan } \sigma_y^2 = n\theta_2(1-\theta_2)$$

Contoh 4.2

Misalkan dari 80 peserta perkuliahan statistika matematik terdiri atas 10 orang angkatan tahun 2002, 20 orang angkatan tahun 2003, dan sisanya angkatan 2004. Untuk keperluan angket pendapat (polling) diambil secara acak 8 mahasiswa dengan pengembalian. Jika X dan Y masing-masing menyatakan banyak mahasiswa angkatan 2002 dan banyak mahasiswa angkatan 2003 terambil dalam 8 kali pengambilan

- Tentukan distribusi bersama dari X dan Y
- Hitung peluang terambil 2 orang mahasiswa angkatan 2002 dan 5 orang angkatan 2003
- Hitung rerata banyak mahasiswa terambil angkatan 2002, angkatan 2003 dan angkatan 2004.
- Tentukan distribusi bersyarat dari X, jika diberikan Y=y dan distribusi bersyarat dari Y jika diberikan X=x

Penyelesaian :

- Pengambilan 8 mahasiswa tersebut adalah Bernoulli dengan 8 kali pengulangan, sukses 1 adalah terambil mahasiswa angkatan 2002 dan sukses 2 adalah terambil mahasiswa angkatan 2003. Dalam hal ini

$$\theta_1 = p \text{ (sukses)} \frac{1}{8} = 0,125, \theta_2 = P \text{ (sukses)} = 0,25$$

$$\theta_3 = P(\text{terambil mahasiswa angkatan 2004}) = 1 - \theta_1 - \theta_2 = 0,625$$

Jadi $X, Y: T(8; 0,125, 0,25)$ dengan fkp bersama

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{8}{x!y!(8-x-y)!} (0,125)^x (0,25)^y (0,625)^{8-x-y} & ; 0 \leq x + y \leq 8, x, y, 0, 1, 2, \dots, 8 \\ 0 & ; x, y \text{ lainnya} \end{cases}$$

- b. $F(2,5) = P(X=2, Y=5) =$ peluang terambil 2 mahasiswa angkatan tahun 2002 dan 5 mahasiswa 2003 dalam 8 kali pengambilan

$$\begin{aligned} &= \frac{8}{251} (0,125)^2 (0,25)^2 (0,625)^1 \\ &= 168 (0,015625)(2,44 \times 10^{-4}) (0,625) \\ &= 4,005432 \times 10^{-4} = 0,0004005 \end{aligned}$$

- c. $\mu_x =$ rerata banyak mahasiswa terambil angkatan 2002 $= E[X] 8(0,125)$

$$\mu_y = \text{rerata banyak mahasiswa terambil angkatan tahun 2003} = E[Y] = 8(0,25) = 2$$

$$\mu_{n-x-y} = \text{rerata banyak mahasiswa terambil angkatan tahun 2001}$$

$$= E[n-X-Y] = E[n] - E[X] - E[Y] = 8 - 1 - 2 = 5$$

- d. Misalkan $f(x/y)$ fkp bersyarat dari X , jika diberikan $Y=y$, maka

$$\begin{aligned} f(x/y) &= \frac{f(x, y)}{f_y} = \frac{\frac{8}{x!y!(8-x-y)!} (0,125)^x (0,25)^y (0,625)^{8-x-y}}{\frac{8!}{(8-y)!y!} (0,25)^y (0,75)^{8-y}} \\ &= \frac{(8-y)!}{x!(8-x-y)!} \cdot \frac{(0,125)^x (0,625)^{8-x-y}}{(0,75)^{8-y}} \\ &= \binom{8-y}{x} \left(\frac{0,125}{0,625} \right)^x \left(\frac{0,625}{0,75} \right)^{8-y} = \binom{8-y}{x} (0,2)^x (0,833)^{8-y} \\ &= \binom{8-y}{x} (0,2)^x (0,833)^x (0,833)^{8-y} \end{aligned}$$

$$= \binom{8-y}{x} (0,1667)(0,833)^{8-x-y}$$

Jadi $X/Y = y : B(8-y, 0,1667)$

Misal $f(y/x)$ fkp bersyarat dari Y , jika diberikan $X = x$, maka

$$f(y/x) = \frac{f(x,y)}{f_x} = \frac{\frac{8!}{x!y!(8-x-y)!} (0,125)^x (0,25)^y (0,625)^{8-x-y}}{\frac{8!}{(8-x)!x!} (0,125)^x (0,875)^{8-x}}$$

$$= \frac{(8-y)!}{y!(8-x-y)!} \frac{(0,25)^y (0,625)^{8-x-y}}{(0,875)^{8-x}}$$

$$= \binom{8-y}{x} \left(\frac{0,25}{0,625}\right)^y \left(\frac{0,625}{0,875}\right)^y \left(\frac{0,625}{0,875}\right)^{-y} \left(\frac{0,625}{0,875}\right)^{8-x-y}$$

$$= \binom{8-y}{x} \left(\frac{0,15625}{0,546875}\right) \left(\frac{0,625}{0,875}\right)^{8-x-y}$$

$$= \binom{8-y}{x} (0,286)^y (0,714)^{8-x-y}$$

Jadi $Y/X = X : B(8-x, 0,286)$

4.4. Distribusi Multinomial

Distribusi multinomial merupakan perluasan dari distribusi trinomial. Pandang percobaan Bernoulli dengan n kali pengulangan, dan tiap percobaan muncul k hasil (k peristiwa) yaitu 'sukses 1, sukses 2, ..., sukses ($k-1$), dan 'gagal dengan

$$P(\text{sukses 1}) = \theta_1, P(\text{sukses 2}) = \theta_2, \dots, P(\text{sukses } k-1) = \theta_{k-1}$$

$$P(\text{gagal}) = \theta_k = 1 - \left(\sum_{i=1}^{k-1} \theta_i \right) \text{ Dalam hal ini } \sum_{i=1}^k \theta_i = 1$$

D. Misalkan

X_1 = banyak sukses ke I muncul dalam n kali pengulangan percobaan I, 1,2,...k-1

Dan $X_k = n - \sum_{i=1}^k x_i$ = banyak gagal muncul dalam n kali pengulangan percobaan

maka dapat ditunjukkan, bahwa fkp bersama dari : $X_1, X_2, \dots, X_{k-1}$ adalah

$f(x_1, \dots, x_{k-1}) = P[X_1 = x_1, \dots, X_{k-1} = x_{k-1}]$

$$= \frac{n!}{\prod_{i=1}^k x_i} \pi \theta_1^{x_i} \left(1 - \sum_{i=1}^{k-1} \theta_i \right)^{n - \sum x_i}$$

Definisi :

Peubah acak $X_1, X_2, \dots, X_{k-1}$ mempunyai distribusi bersama multinomial dan dikatakan sebagai peubah acak peubah acak multinomial. Jika fkpnya atau fungsi peluangnya berbentuk :

$f(x_1, \dots, x_{k-1}) = P[X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_{k-1} = x_{k-1}]$

$$= \frac{n!}{\prod_{i=1}^k x_i} \pi \theta_1^{x_i} \left(1 - \sum_{i=1}^{k-1} \theta_i \right)^{n - \sum x_i}$$

Catatan:

Peubah acak $X_1, X_2, \dots, X_{k-1}$ berdistribusi multinomial dengan parameter n, $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{k-1}$, ditulis $X_1, X_2, \dots, X_{k-1} : (n; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{k-1})$

E. Teorema

Jika $X_1, X_2, \dots, X_{k-1} : (n; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{k-1})$ maka fpm gabungannya adalah :

$$M(t_1, t_2, \dots, t_{k-1}) = \left[\left(1 - \sum_{i=1}^{k-1} \theta_i \right) + \sum_{i=1}^{k-1} \theta_i e^{t_i} \right]^n$$

F. Contoh 4,3

Misalkan distribusi persentase golongan darah A,B,O dan AB dari karyawan disebut pabrik berturut-turut 30, 35, 25 dan 10. Dinas PMI memerlukan 10 labu darah bergolongan A,B dan O. untuk ini diambil 10 karyawan secara acak dan kemudian diambil darahnya sesuai anturan. Dengan memisalkan X,Y dan Z berturut-turut adalah banyaknya karyawan terambil bergolongan darah A,B dan O.

- Tentukan distribusi bersama dari X,Y dan Z
- Berapakan peluang dinas PMI memperoleh karyawan 1 orang bergolongan A, 2 orang bergolongan B, dan 7 orang bergolongan O
- Berapa rerata a(harapan matematik) memperoleh banyaknya karyawan bergolongan darah O ?

Penyelesaian :

- Karena distribusi golongan darah dari karyawan pabrik itu hanya diketahui persentasenya maka dianggap karyawan banyak dan persentase banyak. Golongan darah sebagai peluangnya (dapat dianggap memenuhi percobaan Bernoulli), $\theta_1 = P(\text{sukses 1}) = P(\text{terambil karyawan bergolongan darah A}) = 30\% = 0,30$, $\theta_2 = P(\text{sukses 2}) = P(\text{terambil karyawan bergolongan darah B}) = 35\% = 0,35$ dan $\theta_3 = P(\text{sukses 3}) = P(\text{terambil karyawan bergolongan darah O}) = 25\% = 0,25$. Sehingga X,Y,Z $M(10:0,30, 0,35, 0,25)$ maka

$$f(x,y,z) = \frac{8!}{\prod_{i=1}^3 x_i!} \prod_{i=1}^3 \theta_i^{x_i} \left(1 - \sum_{i=1}^3 \theta_i\right)^{8 - \sum_{i=1}^3 x_i} \quad (X_1 = x, X_2 = y, \text{ dan } X_3 = z)$$

$$= \frac{8!}{x! y! z! (x + y + z)!} (0,3)^x (0,35)^y (0,25)^z (0,1)^{8-x-y-z}$$

- $F(1,2, 7) = p$ (dinas PMI memperoleh karyawan 1 orang bergolongan A, 2 orang bergolongan darah B, 7 orang bergolongan darah O)

$$\frac{8!}{1!2!7!} (0,3)^1 (0,35)^2 (0,25)^7 (0,1)^0$$

$$= 4(0,3)(0,1225)(6,1 \times 10^{-5}) = 8,9722 \times 10^{-4} = 0,0000089722$$

c. Akan dicari dengan fungsi pembangkit moment !

$M(t_1, t_2, t_3) =$ fpm gabungan dari X, Y dan Z

$$= E \left[e^{t_1 x + t_2 y + t_3 z} \right] = \left[(1 - 0_1 \cdot 0_2 - 0_3) \right] + 0_1 e^{t_1} + 0_2 e^{t_2} + 0_3 e^{t_3} \Big]^n$$

$$= \left[0,1 + 0,3 + 0,35 + 0,25 e^{t_3} \right]^0 = (0,75 + 0,25 e^{t_2})^{10}$$

ternyata Z : B (10; 0,25)

jadi $\mu_z =$ rerata 9harapan matematika) memperoleh banyak karyawan bergolongan darah O

$$= 10 \cdot 0,25 = 2,5 \text{ orang}$$

4.5. Distribusi Geometrik

Pandang sebuah percobaan yang hanya mempunyai dua hasil (dua peristiwa), yaitu 'sukses' dan 'gagal' dengan $P(\text{sukses}) = \theta$ dan $P(\text{gagal}) = 1 - \theta$. Kita lakukan percobaan berkali-kali (diulang dan berhenti apabila telah muncul / mendapatkan sukses pertama). Misalkan peubah acak X menyatakan banyak percobaan (banyak gagal) sebelum mendapatkan sukses pertama, dan disumsikan percobaan-percobaan saling bebas maka :

$P[X=x] = P[\text{mendapatkan sukses pertama}]$

$$= P[\underbrace{\text{gg} \dots \text{gg}}_x \text{ s}] = \underbrace{P(\text{g}) P(\text{g}) \dots P(\text{g})}_{f \text{ faktor}} P(\text{g}) P(\text{g}) P(\text{g}) P(\text{s})$$

$$= \left(\prod_{i=1}^x (1 - \theta) \right) \theta = (1 - \theta)^x \theta$$

$$\text{sehingga fkp dari X adalah } f(x) = \begin{cases} (1 - \theta)^x \theta, & x = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{lainnya} \end{cases}$$

Definisi

Peubah acak berdistribusi geometric, dan dinamakan peubah acak geometric jika fkp nya berbentuk

$$f(x) = g(x; \theta) = \begin{cases} (1-\theta)^x \theta, & x = 1, 2, \dots \\ 0, & \text{lainnya} \end{cases}$$

Catatan

p.a X = banyak gagal atau banyak percobaan sebelum mendapatkan sukses pertama

p.a X = berdistribusi geometrik dengan parameter $\theta = P$ (sukses) ditulis X:G(0)

Teorema

Jika X: G(0), maka rerata, varian, dan fpm dari X adalah

1. $\mu = \frac{1-\theta}{\theta}$
2. $\sigma^2 = \frac{1-\theta}{\theta^2}$
3. $M_x(t) = \theta [1 - (1-\theta)e^t]^{-1}$, $t < \ln(1-\theta)$

Bukti

$$1. M_x(t) = \frac{dM_x(t)}{dt} = -\theta(1 - (1-\theta)e^t)^{-2}(-1 + \theta)$$

$$\mu = M_x(0) = -\theta(1-\theta)^{-2}(-1+\theta) = -\theta(\theta)^{-2}(-1+\theta) = \frac{1-\theta}{\theta}$$

2. Coba sendiri sebagai latihan !

$$3. M_x(t) = E[e^{tX}]$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} (1-\theta)^x \theta$$

$$= \theta \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} [(1-\theta)e^t]^x$$

$$= \theta [1 + (1-\theta)e^t + ((1-\theta)e^t)^2 + \dots + ((1-\theta)e^t)^x + \dots]$$

$$= \theta \left[\frac{1}{1 - (1-\theta)e^t} \right]$$

$$= \theta [1 - (1-\theta)e^t]^{-1}, \text{ dengan } (1-\theta)e^t < 1 \text{ atau } t < \ln(1-\theta)$$

Contoh 4.4

Misalkan sepasang suami istri bercita-cita menginginkan seorang anak laki-laki dan jika telah melahirkan bayi laki-laki maka proses kehamilan dihentikan. Dokter ahli mengatakan bahwa peluang mempunyai anak laki-laki adalah 0,2. jika X menyatakan banyak melahirkan bayi perempuan sebelum melahirkan bayi laki-laki.

- Tentukan distribusi dari X !
- Berapakah peluang anak ketiga lelaki ?
- Hitung rerata (harapannya) mendapatkan anak-anak laki-laki !

Penyelesaian

- Dalam hal ini, X adalah banyak percobaan sebelum muncul sukses pertama atau X banyak gagal sebelum terjadi sukses pertama dengan $P(\text{sukses}) = \theta = 0,2$ dan $P(\text{gagal}) = 0,8$. Jika melahirkan (percobaan) satu dengan yang lainnya saling bebas, maka $X = G(0,2)$

$$\text{Jadi } f(x) = f(x ; 0,2) = \begin{cases} (0,8)^x 0,2 = 0,2(0,8)^x & x = 0,1,2, \dots \\ 0 & \text{lainnya} \end{cases}$$

- Anak ketiga laki-laki, dengan kata lain anak ke-1 dan ke-2 adalah perempuan berarti $x = 2$ jadi

$$P(\text{anak ketiga laki-laki}) = P(x=2) = f(2) = 0,2 (0,8)^2 = 0,128$$

- $\mu = E[X] =$ rerata (harapan) memperoleh banyak anak perempuan sebelum lahir anak laki-laki

$$= \frac{1-\theta}{\theta} = \frac{1-0,2}{0,2} = 4$$

jadi rerata (harapan) mendapatkan anak laki-laki adalah anak ke-5

4.6 Distribusi Pascal (Binomial Negatif)

Distribusi ini merupakan perluasan dari distribusi geometri. Pandang suatu percobaan yang diulang saling bebas sampai dengan memperoleh sukses ke r ($r = 1,2,3, \dots$). Misal p.a X menyatakan banyak gagal sebelum memperoleh sukses ke r,

berarti $X + r$ adalah banyaknya percobaan sedemikian sehingga diperoleh r sukses, seperti diperlihatkan pada diagram berikut :

$gg \dots gsg \dots gsg \dots gg \dots ggs$ (percobaan ke $X + r$)
 Sukses ke ke1 ke2 ker

Banyaknya percobaan sebelum sukses ke r adalah $X + r - 1$, dan diantaranya terdapat $(r-1)$ sukses dan X gagal. Jadi $(r-1)$ sukses dalam $(X + r - 1)$ percobaan yang saling bebas, peluangnya adalah

$$\binom{x+r-1}{r-1} \theta^{r-1} (1-\theta)^x \text{ (distribusi binomial)}$$

jadi :

$$\begin{aligned}
 f(x) = P(X=x) &= \binom{x+r-1}{r-1} \theta^{r-1} (1-\theta)^x \theta \\
 &= \binom{x+r-1}{x} \theta^r (1-\theta)^x \quad x = 0,1,2,\dots \\
 &= \text{Peluang } x \text{ gagal sebelum sukses ke } r
 \end{aligned}$$

Definisi :

Peubah acak X dikatakan berdistribusi Pascal atau berdistribusi binomial negatif dan dinamakan peubah acak Pascal dengan parameter r dan $\theta = P$ (sukses) jika fkp nya berbentuk

$$f(x) = \begin{cases} \binom{x+r-1}{x} \theta^r (1-\theta)^x & ; x = 0,1,2,\dots \\ 0 & ; \text{lainnya} \end{cases}$$

Untuk soal latihan buktikanlah ini sebagai fkp Dan hitung $\mu, \sigma^2, M_x(x)$

Contoh 4.5

Perhatikan 4.4 tetapi sekarang suami istri bercita-cita menginginkan tiga anak lelaki, dan jika telah tercapai maka proses kehamilan dihentikan ! Jika X memperoleh banyak anak perempuan sebelum melahirkan ke 3

- tentukan distribusi X
- Hitung peluang anak laki-laki ke 3 diperoleh pada waktu melahirkan anak yang ke 7
- Hitung peluang memperoleh 2 anak perempuan

Penyelesaian :

- Fenomena dalam masalah ini mengikuti : distribusi Pascal (Binomial Negatif) dengan parameter $r = 3$ dan $\theta = P$ (sukses) = 0,2, maka persamaan fkp dari X adalah

$$f(x) = P(X = x) = f(x; (r-1), 0,2) = \begin{cases} \binom{x+2}{x} (0,2)^3 (1-0,2)^x & ; x = 0,1,2,\dots \\ 0 & ; \text{lainnya} \end{cases}$$

- Peristiwa ‘anak lelaki ke 3 diperoleh pada waktu melahirkan anak ke 7 sama artinya dengan pada 6 kali melahirkan anak pertama telah diperoleh dua anak lelaki dan 4 anak perempuan, berarti sama dengan peristiwa $X = 4$. Jadi ($[X = 4] = P$ [anak lelaki ke 3 diperoleh pada waktu melahirkan anak yang ke 7]

$$= f(4) = \binom{6}{4} 0,01(0,8)^5 = \frac{6!}{4!2!} 0,1(0,32768) = 0,49152$$

- Peristiwa memperoleh 2 anak perempuan, sama artinya dengan 2 anak perempuan dan 3 anak lelaki dengan syarat yang bungsu adalah lelaki dengan kata lain peristiwa $X = 2$

Jadi $P[X = 2] = P$ [memperoleh 2 anak perempuan, jika diketahui anak bungsu adalah lelaki ke 3]

$$= f(2) = \binom{2+2}{2} 0,01(0,8)^4 = \binom{4}{2} 0,1(0,512) = 0,03072$$

4.7 Distribusi Hipergeometrik

Pandang sebuah percobaan (pengambilan) berulang n kali 1-1 secara acak tanpa pengembalian. Jika banyak unsur yang diambil adlah N dan diantaranya terdapat a unsur sukses, b unsure gagal ($N = a + b$), berarti peluang terambil sukses

mampu peluang terambil gagal dalam tiap pengambilan tidak tetap. Hal ini juga memberikan petunjuk khusus bahwa percobaan yang satu dengan yang lainnya tak bebas. Berarti percobaan ini bukan percobaan Bernoulli.

Kita telah sepakat bahwa ruang sample S dari percobaan 1-1 tanpa pengembalian memberikan hasil yang sama dengan percobaan pengembalian sekaligus (urutan tidak diperhatikan). Jadi kardinal dari S atau anggota dari S adalah $N(S) = \binom{N}{n} = \binom{a+b}{n}$, karena pengambilan secara acak maka dapat dianggap ruang sample S adalah uniform.

Jika $p.a$ X menyatakan banyak unsur sukses dalam n pengambilan, maka range X yaitu $S_x = \{0, 1, 2, \dots, a\}$ Masalah kita adalah bagaimana distribusi dari X ? Dalam n pengambilan dari $(a + b)$ unsur diantaranya terdapat x sukses dan $(n - x)$ unsur gagal, yang mana salah satu susunannya seperti :

$$ss \dots s \quad gg \dots g$$

X unsur $(n-x)$ unsur

Karena terdapat a unsur sukses, maka terdapat $\binom{a}{x}$ cara dalam mengambil x unsur sukses dari a unsur, dan tiap cara dapat dipasangkan dengan $(n-x)$ unsure gagal dengan $(n-x)$ cara. Jadi banyak cara terdapat x unsur sukses dalam n pengambilan adalah $\binom{a}{x} \binom{b}{n-x}$

Jadi $P[X=x] = P [x \text{ unsur sukses terambil dalam } n \text{ pengambilan}]$

$$= \frac{\binom{a}{x} \binom{b}{n-x}}{\binom{a+b}{n}}, x = 0, 1, \dots, a$$

Definsi

Peubah acak X dikatakan berdistribusi hipergeometrik dan dinamakan pula peubah acak hipergeometrik. Jika fkp nya berbentuk :

$$F(x) = P[X = x] = h(x; n, a, b) = \begin{cases} \frac{\binom{a}{x} \binom{b}{n-x}}{\binom{a+b}{n}} & ; x = 0, 1, \dots, \min\{a, n\} \\ \frac{\binom{a+b}{n}}{n} & ; \text{lainnya} \\ 0 & \end{cases}$$

Cacatan :

Peubah acak X berdistribusi hipergeometrik dengan parameter n, a, dan b ditulis X : H (n, a, b). Dimana a menyatakan banyaknya unsur sukses, b banyaknya unsur gagal dan n banyaknya percobaan.

Teorema

Jika X : H (n, a, b) maka rerata dan varians dari X adalah

1. $\mu = \frac{na}{a+b}$
2. $\sigma^2 = \frac{nab(a+b-n)}{(a+b)^2(a+b-1)}$

Bukti

$$\begin{aligned} 1. \mu = E[X] &= \sum_{x=0}^n x \frac{\binom{a}{x} \binom{b}{n-x}}{\binom{a+b}{n}} = \frac{1}{\binom{a+b}{n}} \sum_{x=1}^n x \frac{xa! \binom{b}{n-x}}{(a-x)!x!} \\ &= \frac{1}{\binom{a+b}{n}} \sum_{x=1}^n \frac{a!}{(a-x)!(x-1)} \binom{b}{n-x} \\ &= \frac{a}{\binom{a+b}{n}} \sum_{x=1}^n \frac{(a-1)!}{(a-x)!(x-1)} \binom{b}{n-x} \end{aligned}$$

$$= \frac{a}{\binom{a+b}{n}} \sum_{y=0}^{n-i} \frac{(a-1)!}{(a-y-1)!y!} \binom{b}{n-x}$$

Misal $x-1 = y \rightarrow x = Y + 1 : \leq x \leq n \quad 0 \leq y \leq n-1, n-1 = n$ maka

$$\begin{aligned} &= \frac{a}{\binom{a+b}{n}} \sum_{y=0}^{n-i} \frac{(a-1)!}{(a-y-1)!y!} \binom{b}{n-y-1} \\ &= \frac{a}{\binom{a+b}{n}} \sum_{y=0}^m \frac{(a-1)!}{(a-y-1)!y!} \binom{b}{m-y} \\ &= \frac{a}{\binom{a+b}{n}} \sum_{y=0}^{n-i} \binom{a-1}{y} \binom{b}{m-y} = \frac{a}{\binom{a+b}{n}} \binom{a+b-1}{m} \\ &= \frac{a(a+b-n)!n!}{(a+b)!} \cdot \frac{(a+b-1)!}{(a+b-1-n+1)!(n-1)!} = \frac{na}{a+b} \end{aligned}$$

Catatan :

Dalam proses pembuktian di atas, kita menggunakan sebuah teorema (tak dibuktikan) yakni

$$\sum_{r=0}^k \binom{m}{r} \binom{n}{k-r} = \binom{m+n}{r+(k-r)} = \binom{m+n}{k}, \text{ sehingga}$$

$$\sum_{r=0}^m \binom{a-1}{y} \binom{b}{m-y} = \binom{a+b-1}{m}$$

2. Untuk pembuktian $\sigma^2 = \text{var}(x)$, hanya akan diberikan langkah-langkah (petunjuk) saja, silahkan anda buktikan secara rinci ! sebagai berikut :

$$\sigma^2 = \text{var}(x) = E[X^2] - E^2[X], \text{ dengan}$$

$$E[X^2] = E[X^2 - X + X] = E[X(X-1)] + E[X], \text{ dimana}$$

$$E[X(X-1)] = \frac{a(a-1)}{\binom{a+b}{n}} \sum_{x=2}^n \binom{a-2}{x-2} \binom{b}{n-x} = \frac{a(a-1)}{\binom{a+b}{n}} \binom{a+b-2}{n-2}$$

$$= \frac{n(n-1)a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)}$$

jadi $\sigma^2 = \text{var}(x)$

$$\begin{aligned} &= \frac{n(n-1)a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)} + \frac{na}{(a+b)} - \frac{n^2 a^2}{(a+b)^2} \\ &= \frac{nab(a+n-1)}{(a^2+b)(a+b-1)} \end{aligned}$$

Contoh 4.6

Dari dalam sebuah wadah yang terdiri atas 15 kelereng merah dan 10 kelereng biru diambil 5 kelereng sekaligus secara acak. Jika X merupakan banyak kelereng merah terambil dalam pengambilan 5 kelereng tersebut.

- Tentukan distribusi dari X
- Hitung peluang terambil 2 kelereng merah
- Hitung rerata banyak kelereng merah terambil
- Hitung rerata banyak kelereng biru terambil

Penyelesaian :

- Ruang sample $S = \{m_1 m_2 m_3 m_4 m_5, \dots, m_{11} m_{12} m_{13} m_{14} m_{15}, \dots, b_6 b_7 b_8 b_9 b_{10}\}$

$$\text{Uniform dengan } N(S) = \binom{15+10}{5} = \frac{25!}{205!} = 53130$$

Dan range $S_x = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Dalam hal ini sukses adalah terambil kelereng merah dengan demikian maka

$$X : H(n; a, b) = H(5; 15, 10) \text{ dengan fkp}$$

- Jika A dan B dua selang dengan $A \cap B = \emptyset$ (A dan B saling lepas) maka banyak sukses dalam A dan banyak sukses dalam B independent (kenaikan bebas)

Peubah acak X yang diamati adalah menyatakan banyaknya sukses terjadi dalam eksperimen Poisson tersebut, dengan range $S_x = \{0, 1, 2, \dots\}$ $C =$ himpunan semua

bilangan cacah, dengan percobaan Bernoulli pada distribusi binomial, bahwa range X , $S_x = \{0,1,2, \dots n\}$. Pada eksperimen Poisson, diulang berkali-kali dan tidak diketahui berapa persisnya, contoh fenomena (masalah) sehubungan dengan proses Poisson, antara lain :

- (1) Banyak kendaraan yang lewat dalam satuan waktu tertentu
- (2) Banyak hasil produksi yang cacat dari sebuah mesin
- (3) Banyak kecelakaan lalu lintas di suatu daerah dalam waktu tertentu
- (4) Panjang atau banyak antrian

Masalah kita adalah bagaimana distribusi dari p.a X sehubungan dengan eksperimen Poisson ? Dalam sesi ini tidak akan diperlihatkan proses memperoleh fkp dari X karena menggunakan konsep matematik yang lebih tinggi, tetapi langsung diberikan definisinya sebagai berikut :

Definisi :

Peubah acak X dikatakan berdistribusi Poisson dengan parameter λ dan dinamakan pula peubah acak Poisson jika fkp nya berbentuk.

$$F(x) = P(X = x) = \begin{cases} \frac{\lambda e^{-\lambda}}{x!} & ; x = 0,1,2,\dots \\ 0 & ; \text{lainnya} \end{cases}$$

G. Catatan

Dapat ditunjukkan bahwa $\sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = 1$

- Parameter λ dalam distribusi Poisson menyatakan intensitas atau rerata terjadinya banyak sukses muncul dalam suatu interval
- Peubah acak X berdistribusi Poisson dengan parameter λ , ditulis $X : P(\lambda)$

Teorema :

Jika $X : P(\lambda)$ maka rerata, varians dan fpm dari X adalah :

1. $\mu = \lambda$
2. $\sigma^2 = \lambda$
3. $M_x(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$

Bukti ;

$$1. \mu = E[X] = \sum_{\lambda=0}^{\infty} x \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{(x-1)!} = \lambda \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1} e^{-\lambda}}{(x-1)!} = \lambda \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^{y-1} e^{-\lambda}}{y!} = \lambda \cdot 1 = \lambda$$

2. $\sigma^2 = E[X^2] - E^2 [X]$ dengan $X[X^2] = E[X^2..X+X] = E[X(X-1)] + EE[X]$ dan

$$E[X(X-1)] = \sum_{\lambda=0}^{\infty} x(x-1) \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{(x-2)!} = \lambda^2 \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\lambda^{x-2} e^{-\lambda}}{(x-2)!}$$
$$= \lambda^2 \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^y e^{-\lambda}}{y!} = \lambda^2 \cdot 1 = \lambda^2$$

maka : $\sigma^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$

$$3. M_x(t) = E[e^{tx}] = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^x}{x!}$$
$$= e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda e^t} = e^{\lambda(e^t-1)}$$

Catatan :

Berdasarkan perluasan (uraian) deret Mc Laurin bahwa $e^{\lambda} = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!}$ dan

$$e^{\lambda e^t} = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^x}{x!}$$

Contoh 4.7

Misalkan banyak kendaraan roda empat atau lebih perdetik, menuju pintu TOL Pasteur berdistribusi Poisson dengan rerata 4 kendaraan

- a) Tuliskan persamaan fkp dari X = banyak kendaraan roda empat atau lebih perdetik, yang masuk pintu ‘TOL Pasteur’.
- b) Hitung peluang 2 kendaraan masuk pintu TOL
- c) Hitung rerata dan varians banyak kendaraan yang masuk
- d) Tentukan fkp dari X

Penyelesaian

a. Peubah acak X banyak kendaraan roda empat atau lebih perdetik yang masuk pintu “TOL Pasteur”. Ini diasumsikan memenuhi eksperimen Poisson.

$$\mu = E[X] \text{ rerata peubah acak } X = 4, \text{ berarti } \lambda = 4 \text{ maka } X : P(4)$$

jadi fkp dari X adalah :

$$f(x) = P[X=x] = \begin{cases} \frac{4^x e^{-4}}{x!} & ; x = 0,1,2,\dots \\ 0 & : \text{lainnya} \end{cases}$$

b. $P[X=2]$ = Peluang dua kendaraan masuk pintu “TOL Pasteur” perdetik

$$\begin{aligned} &= f(2) \\ &= \frac{4^2 e^{-4}}{2!} = 8 \frac{1}{e^4} = 8.(0.0183) = 0,1465 \end{aligned}$$

c. $\mu = E[X] = \lambda = 4$, dan $\sigma^2 = \lambda = 4$

d. $M_x(t) = E[e^{tx}] = e^{4(et-1)}$

Model distribusi Poisson dapat digunakan sebagai pendekatan dari model distribusi binomial $B(n, \theta)$, bila n cukup besar ($n \rightarrow \infty$) dan θ cukup kecil ($\theta \rightarrow 0$) sedemikian sehingga $n\theta = \lambda$ konstan. Hal ini dikemukakan dalam teorema berikut.

Teorema

Misalkan $X : B(n, \theta)$

Jika n besar ($n \rightarrow \infty$), θ kecil ($\theta \rightarrow 0$), dan $n\theta = \lambda$ konstan, maka peubah acak X memiliki distribusi pendekatan Poisson dengan parameter λ .

$$\begin{aligned} \text{Ditulis } X : B(n, \theta) &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\theta \rightarrow 0} X : P(\lambda), \\ &\lambda = n\theta \end{aligned}$$

dan dikatakan $X : B(n, \theta)$ konvergen dalam distribusi ke $X : P(\lambda)$

Bukti :

$$X : B(n, \theta), \text{ maka fkp dari X adalah } b(x;n, \theta) = \begin{cases} \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x} & ; x = 0,1,\dots,n \\ 0 & \text{lainnya} \end{cases}$$

Khusus untuk $x = 0, 1, \dots, n$ dengan $\theta = \frac{\lambda}{n}$ maka

$$\begin{aligned}
 B(x; n, \theta) &= \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x} \\
 &= \frac{n!}{(n-x)!x!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} \\
 &= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(-x+1)}{x!} \cdot \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \\
 &= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(-x+1)}{x!} \cdot \frac{\lambda^x}{n^x} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \\
 &= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(-x+1)}{x!} \cdot \frac{\lambda^x}{x!} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \\
 &= 1 \left(1-\frac{1}{n}\right) \left(1-\frac{2}{n}\right) \dots \left(1-\frac{x-1}{n}\right) \cdot \frac{\lambda^x}{x!} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n
 \end{aligned}$$

Karena (lihat analisis/kalkulus)

$$\begin{aligned}
 &1 \left(1-\frac{1}{n}\right) \left(1-\frac{2}{n}\right) \dots \left(1-\frac{x-1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1, \quad \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1, \text{ dan} \\
 &\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-\lambda}
 \end{aligned}$$

maka :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b(x; n, \theta) = 1 \frac{\lambda^x}{x!} \cdot 1 \cdot e^{-\lambda} = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

$$n \rightarrow \infty$$

jadi

$$f(x, \lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} b; n, \theta = \begin{cases} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} & ; x = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & ; \text{lainnya} \end{cases}$$

$$n \rightarrow \infty$$

$$\theta \rightarrow 0$$

$$\lambda = n\theta$$

Ternyata $X : P(\lambda)$

Contoh 4.8

Suatu proses produksi menghasilkan sejenis barang. Peluang barang tersebut cacat adalah 0,001. Hitung peluangnya diantara 6000 barang yang diteliti (yang diamati) terdapat kurang dari 5 yang cacat (secara eksak dan secara pendekatan)

Penyelesaian

Proses produksi tersebut memenuhi percobaan Bernoulli dengan barang cacat dianggap sebagai sukses dan $\theta = P(\text{cacat}) = 0,001$, sedangkan banyak percobaan adalah $n = 6000$. Jika dimisalkan peubah acak $X =$ banyak barang cacat dari 6000 barang yang diamati. Maka $X:B(6000; 0,001)$ dan masalah kita adalah $P(X < 5) = ?$

Secara eksak maka $P(X < 5) = \sum_{x=0}^4 b(x; 6000; 0,001) = ?$

Secara pendekatan adalah sebagai berikut, dengan menganggap $n = 6000$ cukup besar ($n \rightarrow \infty$) dan $\theta = P(\text{sukses}) = 0,001$ cukup kecil ($\theta \approx 0$) serta $n\theta = \lambda = 6$ konstan selama proses produksi, maka masalah binomial bias diselesaikan dengan pendekatan Poisson, yaitu $X:P(6)$

$$\begin{aligned} \text{Jadi } P(X < 5) &= \sum_{x=0}^4 \frac{6^x e^{-6}}{x!} = \frac{1}{e^6} \sum_{x=0}^4 \frac{6^x}{x!} = \frac{1}{e^6} \left[\frac{6^0}{0} + \frac{6^1}{1} + \frac{6^2}{2} + \frac{6^3}{6} + \frac{6^4}{24} \right] \\ &= \frac{1}{e^6} (1 + 6 + 18 + 36 + 54) = \frac{115}{e^6} = 0,2851 \text{ (pendekatan)} \end{aligned}$$

4.9 Soal-soal Latihan

1. Jika peubah acak $X:B\left(100, \frac{1}{2}\right)$
 - a. Tentukan persamaan fkp, dan fpm dari X
 - b. Hitung rerata dan varian X
 - c. Hitung $P[45 < X \leq 55]$

2. Perhatikan bahwa untuk peubah acak Bernoulli $X : B(1, \theta)$ berlaku momen ke r , $\mu_r^1 = \theta$ untuk $r = 1, 2, 3, \dots$, dengan :
- menghitung langsung $\mu_r^1 = E[X^r]$
 - menentukan terlebih dahulu persamaan fpm nya $M_X(t)$ kemudian $\mu_r^1 = M_X^{(r)}(0)$
3. Seorang siswa dites dengan 10 soal pilihan ganda yang masing-masing pertanyaan dilengkapi 4 jawaban (a, b, c, d). jika setiap soal dijawab secara acak dan dari 4 pilihan yang benar hanya satu.
- Berikan penjelasan bahwa memberikan jawaban untuk setiap soal secara acak (tanpa dipikir) merupakan percobaan Bernoulli
 - Jika peubah acak X menyatakan banyak jawaban yang benar. Tentukan persamaan fkp dari X
 - Berapakah peluang mendapatkan 3 jawaban yang benar
 - Hitung harapan mendapat jawaban yang benar
4. Jika peubah acak $X, Y : T(12; 0,3, 0,5)$
- Tentukan persamaan fkp dan fpm bersama dari X
 - Hitung rerata dan varians dari Y
 - Hitung rerata X , dan rerata bersyarat dari X jika ditentukan $Y = 6$
5. Jika peubah acak diskrit $X, Y, Z : M(50; 0,3, 0,2, 0,4)$
- Tentukan fkp dan fpm bersama dari X, Y , dan Z
 - Hitung $P[X = 20, Y = 25, Z = 5]$
6. Jika peubah acak diskrit X berdistribusi geometric dengan parameter θ atau $X : G(\theta)$ Buktikan secara langsung yaitu dengan definisi (tanpa fpm), bahwa rerata dan varians dari X adalah :
- $\mu = \frac{1-\theta}{\theta}$
 - $\sigma^2 = \frac{1-\theta}{\theta^2}$
7. Peluang seorang penembak mengenai target adalah 0,80. Berapakah peluang dia mengenai target 3 kali 4 tembakan.

8. Buktikan rumus rekursi distribusi binomial :

$$b(x+1; n, \theta) = \frac{\theta(n-x)}{(x+1)(1-\theta)} b(x, n, \theta)$$

9. Jika $X \sim H(5, 20, 10)$

- Tentukan persamaan fkp-nya yaitu $h(x; 5, 20, 10)$
- Hitung rerata dan variansnya
- Hitung $P[X=2]$, $P[X=5]$, dan $P[X=10]$

10. Lima kartu dibagikan kepada 5 orang, seorang satu kartu dari 52 kartu bridge lengkap. Berikan penjelasan, apakah pembagian kartu ini merupakan eksperimen acak atau bukan ? Jika peubah acak X menyatakan banyak kartu AS yang diperoleh

- Tentukan distribusi atau persamaan fkp dan X
- Hitung peluang mendapat tepat satu AS
- Hitung peluang mendapat paling sedikit 3 AS

11. Buktikan rumus rekursi distribusi hypergeometrik

$$h(x+1; na, b) = \frac{(n-x)(a-x)}{(a+1)(b-n+x+1)} h(x; na, b)$$

12. Suatu perhimpunan beranggota 12 pria dan 8 wanita. Jika dibentuk komisi yang terdiri dari 5 orang secara dilot, dan jika X menyatakan banyak pria dalam komisi yang dibentuk :

- Tentukan persamaan fkp dan fpm dari X
- Hitung peluang komisi terdiri tepat 3 pria dan 2 wanita
- Hitung peluang komisi terdiri dari jenis yang sama
- Hitung rerata atau harapan banyak pria dalam komisi

13. Dalam main billiard, seorang terus mendapat giliran sampai dia tidak mengenai bolanya. Jika peubah acak X menyatakan banyak giliran dan kemungkinan gagal untuk mengenai bolanya bagi si A adalah 0,20

- Tentukan distribusi si A adalah 0,20
- Hitung peluang giliran si A tepat 5 kali
- Hitung peluang giliran si A paling sedikit 5 kali

14. Diketahui rerata 40% dari satu bibit bunga akan tumbuh. Kita mempunyai 12 bibit. Jika X adalah banyak bibit bunga yang tumbuh
15. Diketahui dari pengalaman bahwa peluang seorang pasien sembuh dari suatu penyakit tertentu adalah 0,25, untuk mengetes suatu obat, 10 pasien yang berpenyakit tersebut di beri obat tadi, Peneliti menetapkan, bahwa obat tadi dinyatakan efektif jika paling sedikit 4 dari 10 pasien tadi sembuh. Jika X menyatakan banyak pasien yang sembuh setelah diberi obat.
- Hitung peluang obat tadi dinyatakan tidak efektif dalam penelitian ini walaupun sesungguhnya meningkatkan rerata yang sembuh menjadi 0,35 (Petunjuk : nyatakan peluang dengan X) !
 - Berapakah peluang obat dinyatakan efektif walaupun rerata yang sembuh tetap 0,25
16. Dalam suatu pemilu presiden – wakil presiden secara langsung dengan 5 pasang kandidat capres dan cawapres, diperoleh data berdasarkan lembaga yang dipercaya bahwa persentase perolehan hasil adalah 26, 22, 15, 34 dan 3 berturut-turut untuk pasangan capres dan cawapres I, II, III, IV dan V, misalkan disebut instansi, team sukses calon tertentu mengadakan penelitian dengan memilih 10 karyawan secara acak untuk ditanya pencoblosan pada waktunya. Dengan memisalkan X , Y dan Z berturut-turut adalah banyak karyawan yang pada saatnya mencoblos calon I, II dan IV
- Tentukan distribusi bersama dari X , Y dan Z
 - Berapakah peluang team sukses memperoleh karyawan sebanyak 2 orang mencoblos calon I, 3 orang mencoblos calon II, dan 5 orang mencoblos calon IV
 - Berapakah rerata (harapan matematis) memperoleh banyak karyawan yang mencoblos calon IV ?
17. lembaga konsumen Indonesia (LKI) ingin mengetes pernyataan bahwa 60% dari semua ibu rumah tangga di kota B lebih menyukai sabun cuci merek R dari pada merk merk lainnya. Untuk ini diambil sample acak 18 ibu rumah tangga dari kota B tersebut, dan menolak pernyataan tersebut, kalau kurang dari 9 ibu

- menyukai sabun merek R dibanding dengan merek lainnya. Berapakah peluangnya LKI menolak pernyataan tadi walaupun sesungguhnya benar
18. Dalam sebuah dus terdapat 100 buah kondensor mobil. Untuk pemeriksaan diambil 5 buah secara acak dari dus tersebut. Kondensor dalam dus dinyatakan baik seluruhnya tanpa diperiksa satu demi satu, jika tak satupun dari yang lima tadi rusak. Berapakah peluang isi dus itu dinyatakan baik seluruhnya walaupun sesungguhnya ada 5 yang rusak.
 19. Jika peubah acak diskrit X berdistribusi Pascal atau binomial negatif dengan parameter r dan θ .
 - a) Tulislah persamaan fkp-nya, dan tunjukkan ini benar-benar sebuah tkp dari X
 - b) Hitung rerata dan varians dari X .
 - c) Tentukan fpm-nya.
 20. Misalkan dari 100 mahasiswa, sebanyak 60% diantaranya menyukai disenya. Kita ambil 10 mahasiswa secara acak. Berapa peluang 5 diantara 10 mahasiswa menyukai dosennya, secara:
 - a) Eksak.
 - b) Pendekatan (dengan distribusi binomial).
 21. Jika peubah acak $X: P(5)$.
 - a) Tentukan persamaan fkp dan fpm-nya.
 - b) Hitung rerata dan variansnya.
 - c) Hitung $P[X \geq 3]$.
 22. Rata-rata banyaknya permintaan sambungan telpon per menit disuatu sentral telpon adalah 10 buah. Kapasitas f sentral tersebut hanya mampu melayani 15 permintaan per menit. Berapakah peluang dalam 1 menit tertentu ada permintaan yang tidak terlayani.
 23. Suatu proses produksi menghasilkan sejenis barang, peluang barang tersebut cacat adalah 0,0005. Hitung peluangnya dianta 8000 buah barang yang dihasilkan secara acak terdapat lebih dari 5 buah yang cacat, secara:
 - a) Eksak.
 - b) Pendekatan (Poisson)

24. Diketahui fungsi pembangkit momen dari peubah X adalah $(t) = \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}e^t\right)^6$

- a) Tentukan fkp dari X.
- b) Jika peubah acak $Y = 3X + 1$, hitung $P [Y \leq 9]$.
- c) Tentukan $M_{Y(t)}$, yaitu fpm dari Y.
- d) Berdasarkan hasil (c), hitung $E [Y]$ dan varians (Y).