BAB III
EKSPEKTASI MATEMATIK

Konsep ekspektasi matematik (nilai harapan secara matematik) dalam statistik sangat besar manfaatnya. Selain digunakan untuk pengembangan dalam statistik lanjutan dan terapan dibidang lain, juga sebagai konsep dasar untuk mendefinisikan atau membangun ukuran-ukuran dalam statistik, seperti rerata, varian, koesfisien, korelasi.

3.1. Pengertian Ekspektasi Matematik

Definisi :

Misalkan p, a X dengan fkp f (x), dan U (x) fungsi atau bentuk dalam X. Ekspektasi matematik atau nilai harapan dari U (x), ditulis dengan E [u (x)] dan

- Untuk X diskrit, E [u (x)] = $\sum_{x \in \Re}$ U (x) f (x) = $\sum_{x \in S_x}$ u (x). P[X = x]

- Untuk X kontinu, E [u)x)] = $\int_{-\infty}^{\infty}$ U (x) $f(x)\, dx$

Catatan : Nilai ekspektasi dari U (x) belum tentu ada !

Ekspektasi matematik untuk dua atau lebih peubah acak, didefinisikan berikut ini :

Definisi :

Misalkan f (x, y) fkp bersama dari peubah acak X dan Y, dan U (X, y) fungsi dalam X dan Y. Ekspektasi matematik dari U (X, Y) ditulis dengan E [U, X Y],dan

- Untuk X, Y diskrit, E [U(X, Y)] = $\sum_{x \in \Re} \sum_{y \in Sy}$ u (x, y) f (x, y)

$$= \sum_{x \in Sx} \sum_{y \in Sy} u(x, y).\ P(X = x, Y = y$$

- Untuk X, Y kontinu, E [U (X, Y)] = $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} u\,(x, y)\, f\,(x, y)\; dxdy$

Definisi :

misalkan f (x_1, x_2, ...x_n) fkp bersama dari x_1, x_2, ...x_n dan u (x_1, x_2, ...x_n) fungsi dalam x_1, x_2, ..., dan x_n. Ekspektasi dari u (x_1, x_2, ..., x_n), ditulis dengan E [u(x_1, x_2, ... , x_n)], dan

- Untuk peubah acak diskrit.

  E [u(x_1, x_2, ..., dan x_n)] = $\sum_{x_1}\sum_{x_2}\ldots\sum_{x_n} u\,(x_1, x_2, \ldots x_n)\, f\,(x_1, x_2, \ldots x_n)$

- Untuk peubah acak kontinu,

  E [u(x_1, x_2, ..., x_n)] = $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} u\,(x_1, x_2, \ldots x_n), (\,f\,(x_1, x_2, \ldots x_n)$

Contoh 3.1

Misalkan X memiliki fkp f (x) = $\begin{cases} 2\,(1-x); 0 < x < 1 \\ 0 \qquad\quad ; x \ lainnya \end{cases}$

Hitung (a) E [X], (b) E [X^2], dan (c) E [(6X – 3X^2)]

Penyelesaian

Jelas, X peubah acak kontinu

(a). Dalam hal ini u (x) = X, maka ;

$$E\,[X] = \int_{-x}^{\infty} xf\,(x)\,dx = \int_{-x}^{0} x\,(\;)\,dx + \int_{0}^{1} x\,2\,(1-x)\,dx + \int_{1}^{\infty} x\,(\,)\,dx = 2\left[\frac{1}{2}x^2 \;\; \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

(b). Dalam hal ini u (x) = X^2, maka ;

$$E\,[X^2] = \int_{-x}^{\infty} x^2\, f\,(x)\,dx = 2\int_{0}^{1}(x^2 - x^3)\,dx = 2\left[\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}\,x^3\right]_0^1 = \frac{1}{6}$$

(c). Dalam hal ini u (x) = 6X +3X^2, maka ;

$$E\,[(6x + 3x^2)] = \int_{-x}^{\infty}(6x + 3x^2)\, f\,(x)\,dx = 2\int_{0}^{1}(6x + 3^2)(1 - xydx$$

$$= 2\int_0^1 (6x - 3x^2)\,dx = 2\left[3x^2 - x^3 - \frac{3}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{5}{2}$$

Contoh 3.2

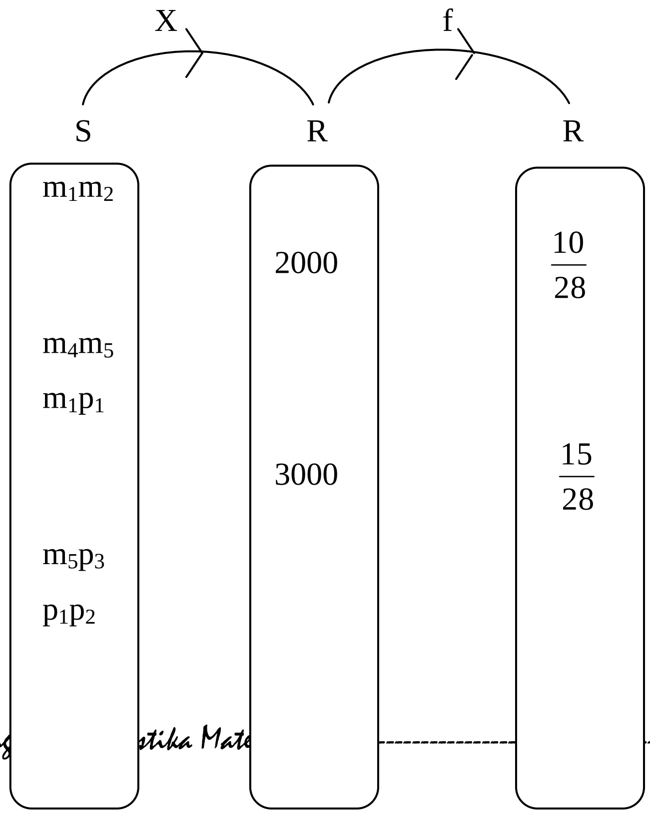
Dari dalam kotak yang terdiri atas 5 bola merah dan 3 bola putih diambil 2 bola secara acak. Untuk setiap terambil bola merah diberi hadiah 1.000 rupiah dan setia*P*terambil bola putih diberi hadiah 2.000 rupiah. Hitung ekspektasi besar hadiah yang diperoleh !

Penyelesian

Harus ditentukan dulu ruang *sampel* S, peubah acak X, dan distribusinya, dalam hal ini

S = {m_1, m_2, ...m_4, m_5, m_1, p_1, ..., m_5, p_3, p_1, p_2, p_1, p_3, p_2, p_3}, dengan N (S) = $\binom{5+3}{2}$ = 28, dan peubah acak X. S $\rightarrow$ R, dengan X ≡ “besar hadiah” sehingga S_x {2000, 3000, 4000}

Perhatikan diagram pada gambar 3.1 !



4000 $\frac{3}{28}$

$p_2 p_3$

Gambar 3.1

Berdasarkan gambar 3.1 diperoleh fkp dari X, yakni :

$$F\,(x) = P(X = x) = \begin{cases} \dfrac{10}{28};\ x = 2000 \\ \dfrac{15}{28};\ x = 3000 \\ \dfrac{3}{20};\ x = 4000 \\ 0\ \ ;\ x\ lainnya \end{cases}$$

Sehingga E [X] = Ekspektasi besar hadiah

$$= \sum_{x} xf\,(x) = \sum_{x \in S_x} x,\ P(X = x)$$

$$= 2000\ \frac{10}{28} + 30000\ \frac{15}{18} + 4000\ \frac{3}{28}$$

$$= 2750$$

Jadi besar hadiah yang diharapkan dari X dan Y, adalah 2750 rupiah

Contoh 3.3

Diketahui fkp bersama fkp dari X dan Y, adalah

$$f\,(x, y) = \begin{cases} x + y\ ;;\ 0 < x,\ \ 1 \\ 0 \quad ;\ x\ lainnya \end{cases}$$

Hitung E [X], E [Y], E [XY] dan E [XY^2 – 8X]

Penyelesaian :

$$\text{E [X]} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x.\,f\,(x, y)\,dxdy = \int_0^1\int_0^1 x\,(x+y)\,dxdy = \int_0^1 \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}^2\ y\right]_{-0}^{1} dy$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} y \right) dy = \left[\frac{1}{3} y + \frac{1}{4} y^2 \right]_0^1 = \frac{7}{12}$$

$$\text{E [Y]} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x.\, f\,(x,y)\, dxdy = \int_0^1 \int_0^1 yx(x+y)\, dxdy = \int_0^1 \left[\frac{1}{2} x^3 + \frac{1}{2}^2 y \right]_{-0}^{1} dy$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} + y^2 \right)_0^1 dy = \left[\frac{1}{4} y + \frac{1}{3} y^3 \right]_0^1 = \frac{7}{12}$$

$$\text{E [XY]} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x.\, f\,(x,y)\, dxdy = \int_0^1 \int_0^1 (x^2 y + xy^2)\, dxdy = \int_0^1 \left[\frac{1}{3} x^3 y + \frac{1}{2}^2 x^2 y_2 \right]_{-0}^{1} dy$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{3} y + \frac{1}{2} y^2 \right) dy = \left[\frac{1}{6} y^2 + \frac{1}{6} y^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$\text{E [XY2-8X]} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (xy^2, -8x)\, f\,(x,y)\, dxdy = \int_0^1 \int_0^1 (xy^2 - 8x)(x+y)\, dxdy$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 (x^2 y^2, -8x^2 + xy^3 - 8xy)\, dxdy = \int_0^1 \left[\frac{1}{3} x^3 y^2 - \frac{8}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 y^3 - 4x^2 y \right]_0^1 dy$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{3} y^2 - \frac{8}{3} + \frac{2}{2} y^2 - 4y \right) dy = \left[\frac{1}{9} y^3 - \frac{8}{3} y + \frac{1}{8} y^4 - 2y^2 \right]_0^1 = \frac{1}{9} - \frac{8}{3} + \frac{1}{8} - 2$$

$$= - \frac{351}{72}$$

Catatan

Perhatikan, bahwa E [u(x)] bisa bernilai positif, negatif atau nol dan E [XY] belum tentu sama dengan E [X], E [Y] ! Selanjutnya dapat dibuktikan bahwa jika X dan Y dua p, a bebas stokastik, maka E [u (X), v (x)] = E [u (X)]. E [v(X)]

Sifat-sifat ekspektasis berikut ini dapat dibuktikan, dan fungsi atau operator yang bersifat seperti ini, dinamakan operator linier. Jadi ekspekatsi E merupakan <u>operator linier</u>

Sifat-sifat Ekspektasi :

(1) E [k] = k, $\forall$ k konstanta real

(2) E [k, u(X)] = kE [u (X)], $\forall$ k konstanta real

(3) $E\left[\sum_{I=1}^{N} k_i u_i X\right] = \sum_{i=1}^{n} k_i E[u_i X], \forall k_1, k_2 \ldots, kn\ kon\tan tareal$

Sebagai contoh penggunaan sifat ekspektasi sebagai operator linier, coba anda perhatikan kembali contoh 3.1 ! Telah dihitung bahwa E (x) = $\frac{1}{3}$ dan E (x^2) = $\frac{1}{6}$, maka F [$6x - 3x^2$] = E [6x] + E [$3x^2$] = 6E [x] + 3E [x2] = 6 ($\frac{1}{3}$) + 3 ($\frac{1}{6}$) = 2 + $\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

3.2 Rerata dan Varian

jika X peubah acak, dengan u (X) = X, maka E [u (X) = E [X].

Definisi :

Jika f (x) fkp dari peubah acak X, maka

(1) Untuk X peubah acak diskrit, rerata dari X adalah μ = E [X] = $\sum_x$ xf (x)

(2) Untuk X peubah acak kontinu, rerata dari X adalah μ E [X] = $\int_{-0}^{\infty} x, f(x)dx$

Catatan :

- Mean dari X belum tentu ada, dan jika ada sangat berguna sebagai salah satu ukuran tendensi sentral, antara lain untuk mengukur karakteristik sekumpulan data kuantitatif atau populasi (sebagai wakil)
- E [u(x)] diartikan sebagai rerata dari u (x)

Contoh 3.4

Peubah acak X dengan range Sx = {1,2,3,4,5} memiliki fkp f (x) =

$$\begin{cases} \frac{x}{15} & ; x = 1,2,3,4,5 \\ 0 & ;\ x\ lainnya \end{cases}$$

Hitung rerata X, kemudian hasilnya bandingkan dengan rumus yang biasa digunakan dimasyarakat.

Penyelesaian :

Jelas X adalah peubah acak diskrit, maka

μ = E (x) = $\sum_{x} xf(x) + \sum_{x=1}^{5} x \frac{x}{15} = \frac{1}{15} 5\sum_{x=1} x^2 (1+4+9+16+25) = 3{,}67$

Bila dihitung dengan rumus rerata yang biasa digunakan adalah μ = $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{5}(1+2+3+4+5) = 3$ Kenapa hasilnya berbeda ? Hal ini terjadi karena bergantung pada fkp yang digunakan atau didefinisikan atau pad bobot yang diberikan untuk setia*P*data X. Dalam hal ini, masyarakat menggunakan fkp

f (x) = $\begin{cases} \frac{1}{5} \; ; x = 1{,}2{,}3{,}4{,}5 \\ 0 \quad ; \; x \; lainnya \end{cases}$

Rumus rerata yang digunakan di masyarakat adalah hal khusus dari definisi rerata secara statistik matematik.

Contoh 3.5

Misalkan peubah acak X memiliki fkp f (x) = $\begin{cases} \frac{1}{x^2} \; ; 1 < x < \infty \\ 0 \quad ; \; x \; lainnya \end{cases}$

Hitung rerata X, jika ada !

Penyelesaian ;

Jelas X peubah acak kontinu !

Maka μ = E [X] = $\int_{-x}^{\infty} x\, f(x)\, dx = \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x}\, dx = 1\, nx = \infty$

Dalam hal ini rerata X diangga*P*tidak ada !

Jika μ rerata peubah acak X, dan u (x) = $(x - \mu)^2$, maka E $[(x - \mu)^2]$ dinamakan varian dari X, dan dinotasikan dengan σ^2 atau .... = E $[(x - \mu)^2]$

Definisi :

Jika f (x) fkp peubah acak X, maka

(1) Untuk X peubah acak diskrit, σ^2 = var (x) = E $[(x - \mu)^2]$ = ...$(x - \mu)^2$ f (x)

(2) Untuk X peubah acak kontinu, σ^2 = var (x) = E $[(x - \mu)^2]$ = ...$(x - \mu)^2$

f (x) dx

Catatan :

- Varians dari X belum tentu ada, dan jika ada sangat berguna sebagai salah satu ukuran variasi, antara lain untuk mengukur tingkat tersebarnya sekumpulan data kuantitatif
- Jika μ tidak ada, maka σ^2 juga tidak ada. Jika μ ada, maka belum tentu σ^2 ada !
- Akar kuadrat positif dari, σ^2 yaitu σ = $\sqrt{E\left[(x-\mu)^2\right]}$ dinamakan standar deviasi atau simpangan baku X
- Untuk populasi-populasi dengan satuan dan ketelitian yang sama, maka varians atau simpangan baku semakin kecil menunjukkan populasi tersebut semakin merata atau homogen (uniform).

Teorema

Var (X) = E [X^2] – (E[X])^2 = E [X2] – μ^2

Bukti :

Var (X) = E $\left[(x^2-\mu)^2\right] = E\left[x^2 - 2\mu x + \mu^2\right]$

= E $\left[x^2\right] - 2\mu \; E\left[x\right] + E\left[\mu^2\right]$

= E $\left[x^2\right] - 2\mu \; - \mu^2$

Var (X) = E [X^2] - μ^2 (terbukti)

Contoh 3.6

Misalkan peubah acak X dengan fkp f (x) = $\begin{cases} \frac{1}{2}(x+1); -1 < x < 1 \\ 0 \qquad ; x \textit{ lainnya} \end{cases}$

Hitung varians dan simpangan baku dari X !

Penyelesaian

Jelas X peubah acak kontinu !

Karena

$$\mu = E[x] + \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x) + \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} x(x+1)\, dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^2\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)\right] = \frac{1}{3}$$

Maka $\sigma^2 = E\,[x - \mu)^2 = E\left[\left(x - \frac{1}{3}\right)^2\right] + \int_{i}^{1} \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 \frac{1}{2}(x+1)\, dx$

$$= \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{6}x^2 - \frac{5}{18}x + \frac{1}{18}\right) dx + \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{18}x^3 - \frac{5}{36}x^2 + \frac{1}{18}x \Big]_{-1}^{1}$$

$$= \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{18} - \frac{5}{36} + \frac{1}{18}\right) - \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{18} - \frac{5}{36} - \frac{1}{18}\right)$$

$$= \frac{2}{9}$$

Jika dihitung dengan teorema yaitu $= \sigma^2 = E[x^2\} - \mu^2$, dimana

$E\,[X^2]\ \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} x^2 (x+1)\, dx = \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^2\right) dx = \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{6}x^3 \Big]_{-1}^{1} = \frac{2}{6}$ }maka $\sigma^2 =$

$\frac{2}{6} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}$ (hasilnya sama dengan menggunakan definisi)

σ = simpangan baku = $\frac{1}{3}\sqrt{2}$

Contoh 3.7

Misalkan S adalah ruang sampel pengetosan sebuah dadu tak jujur dan peluang muncul sisi dadu seperti didefinisikan pada contoh 1.8.

a). Hitung rerata meuncul angka sisi dadu

b). Hitung varians dan simpangan bakunya

Penyelesaian :

a). Jelas S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, dan jika X ≡ ”angka sisi dadu” Jelas pula bahwa S_x = S = { 1, 2, 3, 4, 5, 6}. Berdasarkan 1.8 maka

$\mu = E\,[X] = \sum_{x=1}^{6} x.\, P[X = x]$

= 1 (0,2) + 2(0,2) + 3(0,3) + 4(0,5) + 5(0,1) + 6(0,15) = 3,1

Ternyata, apabila dadu tersebut ditos atau diundi terus menerus, maka diharapkan rerata akan muncul angka 3, 1.

b). Karena E [X^2] = $\sum_{x=1}^{6} x^2$ p (X = x) = 1(0,2) + 4(0,2) + 9(0,3) + 16(0,05) + 25(0,1) + 36(0,15)

= 0,2 + 0,8 + 2,7 + 0,8 + 2,5 + 5,4 = 12,4 dan μ = 3,1 Maka varians, σ^2 = 12,4 – 9,61 = 2,79, dan simpangan baku σ = $\sqrt{2{,}79} = 1{,}67$

Sifat-sifat Rerata dan Varians

Jika μ dan σ^2 berturut-turut adalah rerata dan varians dari X, maka

(1). $E[(X-\mu)] = o$

(2). E [(aX + b)] = aμ + b, ∀ a, b konstanta real

(3) Var (X + c) = Var [x] = , σ^2 ∀ c konstanta real

(4) Var (aX + b) = a^2 Var [X] = $a^2\sigma^2$

Akan dibuktikan hanya bagian (4) saja, sisanya (1), (2), (3) anda buktikan sendiri sebagai latihan

Bukti 4 :

Var (aX + b) = $E[(aX + b)^2] - E^2[aX + b]$

$= E[aX_2 + 2abX + b^2] - E^2[a\mu + b]^2$

= a^2 E [X] + 2abE [X] + E [b^2] – $a^2\mu^2$ - 2 abμ - b^2

$= \alpha^2 E[[X^2] - \mu^2] + 2ab(E[X] - \mu)$

= α^2 Var [X] + 2ab (0)

= $a^2\sigma^2$ (terbukti))

Contoh 3.8

Perhatikan contoh telah diketahui, bahwa p, a *X* dengan fkp

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+1) \; ; -1 < x < 1 \\ 0 \qquad ; \; x \; lainnya \end{cases}$$

Memiliki rerata $\mu = \frac{1}{3}$ dan varian $\sigma^2 = \frac{2}{9}$

Jika Y = -3X + 5, maka rerata Y = rerata (-3 x + 5) = (-3) (1/3) + 5 = 4

Dan Var (Y) = var (-3x + 5) = $(-3)^2$ 2/9 = 2

Catatan :

Jika peubah acak X memiliki rerata μ dan varian σ^2 tidak nol, maka kita dapat menghubungkan antara keduanya, dalam pernyataan peluang dan hukum ini ditemukan oleh seorang ahli matematika pada abad 19, yaitu P. I Chebyshev. Hukumnya atau rumusnya ini dinamakan ketidaksamaan Chebyshev. Sebenarnya ketidaksamaan Chebyshev adalah hal khusus dari teorema Bienaime. Tidak banyak gunanya dalam buku ini. Berikut akan disampaikan teorema Bienaime (tak dibuktikan) kemudian teorema atau kateksamaan Chebyshev (dibuktikan dengan menggunakan T. Bienaime)

Teorema (T. Bienaime)

Misalkan u (X) fungsi tak negatif dari p, a *X*, jika E [u(X)] ada, maka untuk setia*P*bilangan real positif c, berlaku :

$$P[\mathrm{u(X)} \geq \mathrm{c} \mid \leq \frac{E\,[u(x)]}{c}$$

Contoh 3.9

Misalkan p, a memiliki f, k, $Pf\,(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}x^2 & ; 0 < x < 2 \\ 0 & ;\ x \text{ lainnya} \end{cases}$

Jika u (x) = 2X – 1 dan c = 2. Tunjukkan bahwa $P[\mathrm{u(X)} \geq \mathrm{c}] \leq \frac{E\,[u(x)]}{c}$

Penyelesaian

$$P[\mathrm{u(X)} \geq \mathrm{c}] = P[2\mathrm{X} - \geq 2] = P\left[X \geq \frac{3}{2}\right] = \int_{\frac{3}{2}}^{2} \frac{3}{8} x2\, dx = \left(\frac{1}{8}\, x3 \right]_{\frac{3}{2}}^{2}$$

$$= 1 - \frac{1}{8}.\frac{27}{8} = 1 - \frac{27}{64} = \frac{37}{64}.$$

Sedangkan E [u(X)] = E [2X – 1] = 2 E [X] – 1 = 2 $\frac{3}{2}$ – 1 = 2

Sehingga P[u(X) ≥ 2] = $\frac{37}{64} \leq 1 = \frac{E[u(x)]}{2}$ (sesuai T. Bienaime)

Teorema (Ketaksamaan Chebyshev)

Misalkan peubah acak X mempunyai rerata μ dan varians 0 < σ^2 < ∞, maka untuk setia*P*bilangan real positif k, berlaku :

$P[|x - \mu| \geq k\sigma] \leq \frac{1}{k^2}$ atau $P[|x - \mu| < k\sigma] \geq 1 - \frac{1}{k^2}$

Bukti :

$$P\left[|x-\mu| \geq k\alpha\right] = P\left[(x-\mu)^2 \geq k^2\sigma^2\right] \leq \frac{E|(x-\mu)^2|}{k^2\sigma^2} = \frac{\sigma^2}{k^2\sigma^2} = \frac{1}{k^2}$$

Jadi $P\left[|x-\mu| \geq k\alpha\right] \leq \frac{1}{k^2}$ karena peristiwa {x : |x - μ| < k σ} komplemen dari peristiwa {x : |x – μ| ≥ k σ}, maka $P\left[|x-\mu| \geq k\alpha\right] \leq \frac{1}{k^2}$

Contoh 3.10

Perhatikan p, a X dan fkp nya pada contoh 3.9. dapat anda tunjukkan bahwa μ = ... dan $\sigma^2 = \frac{3}{20}$

a) Hitung $P[\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma]$

b) Bnadingkan hasilnya dengan ketaksamaan Chebyshev

Penyelesaian :

a) P[| x – μ | < 2σ]

$$= P[\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma] = P\left[\frac{3}{2} - 2\sqrt{\frac{3}{20}} < X < \frac{3}{2} + 2\sqrt{\frac{3}{20}}\right]$$

$$= \int_{\frac{3}{2}-2\sqrt{\frac{3}{20}}}^{\frac{3}{2}+2\sqrt{\frac{3}{20}}} f(x)\,dx = \int_{\frac{3}{2}-2\sqrt{\frac{3}{20}}}^{2} \frac{3}{8}x^2\,dx + \int_{2}^{\frac{3}{2}+2\sqrt{\frac{3}{20}}} 0\,dx$$

$$= \left. \frac{1}{8}x^3 \right]^{2}_{\frac{3}{2}-2\sqrt{\frac{3}{20}}} = 1 - \frac{1}{8}\left(\frac{3}{2} - 2\sqrt{\frac{3}{20}}\right) = 1 - \frac{1}{8}\ (0{,}382)$$

= 1 – 0, 04775 = 0, 95225

Menurut ketaksamaan Chebyshev : (k = 2)

$$P\left[\left|x\ \frac{3}{2}\right| < 2\sqrt{\frac{3}{20}}\right] \geq 1 - \frac{1}{2^2} = 1 - \frac{1}{4}\ 0{,}75$$

Jelas $P\left[\left|x - \frac{3}{2}\right| < 2\sqrt{\frac{3}{20}}\right] = 0{,}95225 \geq 0{,}75 = 1 - \frac{1}{k^2}$

(memenuhi ketaksamaan Chebyshev)

3.3 Momen dan Fungsi Pembangkit Momen

Ukuran statistik yang baru saja anda pelajari, yakni rerata, varians dan simpangan baku adalah hal khusus dari ekspektasi matematik, yaitu momen dan fungsi pembangkit momen. Momen ialah salah satu ukuran statistia yang gunanya antara lain sebagai dasar untuk merumuskan ukuran keruncingan dan lemiringan kurva (distribusi). Sedangkan fungsi pembangkit momen antara lain untuk menurunkan atau menentukan momen-momen.

Definisi :

a) Momen ke k dari peubah acak X dinotasikan dengan μ adalah ekspektasi dari X^k, k = 1, 2, 3, ……..ditulis

$$\mu_k = E[X^k]$$

b) Momen sentral ke k sekitar rerata μ dari p, a X dinotasikan dengan

$$\mu_k = E(X - \mu)^k],\ k = 1, 2, 3, \ldots$$

jadi jika *f (x)* fkp dari p, a *X*, maka

Untuk X diskrit : $\mu_k = E[X^k] = \sum_x (x)^k f(x)$

$$\mu_k = E[(X - \mu)^k] = \sum_x (x - \mu)^k f(x)$$

Untuk X kontinu $\mu_k = E[X^k] = \int_{-\infty}^{\infty} xk \ f(x)\,dx$

$$\mu_k = E[(X^4] = \int_{-\infty}^{\infty} x^4 f(x)\,dx = \int_0^{\infty} \frac{2}{3} x^5\,dx + \int_{\frac{3}{2}}^{2} (-2x^5 + 4x^4)\,dx$$

$$= \frac{1}{9}x^6\Big]_0^2 + \Big[-\frac{1}{3}x^6 + \frac{4}{5}x^5\Big]_{\frac{3}{2}}^2 = \frac{729}{576} + \left(-\frac{64}{3} + \frac{128}{5}\right) - \left(-\frac{729}{192} + \frac{972}{160}\right)$$

$$= \frac{81}{64} + \frac{128}{5} + \frac{243}{64} - \frac{64}{3} - \frac{243}{40} = \frac{324}{64} + \frac{128}{5} - \frac{3289}{120} = \frac{81}{16} + \frac{307 - 3289}{120}$$

$$= \frac{81}{16} - \frac{214}{120} + \frac{1215 - 434}{240} = \frac{781}{240}$$

Berdasarkan (a) telah diketahui

μ = rerata X = $\frac{7}{6}$

$$\mu = E[(X - \frac{7}{6})] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \frac{7}{6}) f(x)\,dx = \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{2}{3}(x^2 - \frac{7}{6}x)\,dx + \int_{\frac{3}{2}}^{2} (-2x^2 + \frac{19}{3}x - \frac{14}{5})\,dx$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}X^2 - \frac{7}{12}x^2\right)_0^{\frac{3}{2}} + \Big[-\frac{2}{3}x^3 + \frac{19}{6}x^2 - \frac{14}{3}x\Big]_{\frac{3}{2}}^2 = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\frac{27}{8} - \frac{7}{12}\frac{9}{4}\right) +$$

$$\left(-\frac{16}{3} + \frac{38}{3} - \frac{28}{3}\right) - \left(-\frac{2}{3} .. \frac{27}{8} + \frac{19}{6} . \frac{9}{4} - 7\right)$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{9}{8} - \frac{21}{16}\right) - 2 - \left(-\frac{9}{4} + \frac{57}{18} - 7\right) = -\frac{2}{3}\left(-\frac{3}{16}\right) - 2 - \left(\frac{39}{8} - 7\right)$$

$$= -\frac{1}{8} - 2 + \frac{17}{8} = 0$$

$$\mu 2 = E[(X - \frac{7}{6})^2] = E[(X^2] - \mu^2 = \frac{37}{24} - \left(\frac{7}{6}\right)^2 = \frac{37}{24} - \frac{49}{36} = \frac{111 - 98}{72} = \frac{13}{72}$$

$$= \sigma^2 = 0,1805 \Rightarrow \sigma = 0,42492$$

$$\text{Dengan } E[X^2] = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2}{3}x^3\,dx + \int_{\frac{3}{2}}^{2} (-2x^3 + 4x^2\,dx = \frac{2}{12}x^4 \Big]_0^{\frac{3}{2}} + \Big[-\frac{2}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3\Big]_{\frac{3}{2}}^1$$

$$= \frac{2}{12} \cdot \frac{81}{16} + \left(-\frac{2}{4}.16 + \frac{4}{3}.8\right) - \left(-\frac{1}{2}.\frac{81}{16} + \frac{4}{3}.\frac{27}{8}\right)$$

$$= \frac{27}{32} + \frac{8}{3} + \frac{81}{32} - \frac{9}{2} = \frac{81+256+243-432}{96} = \frac{148}{96} = \frac{37}{24}$$

$$\mu_2^1 = E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\ f(x)\,dx = \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{2}{3}x^3 + \int_{\frac{3}{2}}^{2} (-2x^3 + 4x^2)\,dx = \frac{1}{6}x^4 \int_0^{\frac{3}{2}} + \left[-\frac{1}{2}x^4 + \frac{4}{3}x^4\right]_{\frac{3}{2}}^{2} = \frac{37}{24}$$

$$\mu_3^1 = E[X^3] = \int_{-\infty}^{\infty} x^3\ f(x)\,dx = \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{2}{3}x^4 + \int_{\frac{3}{2}}^{2} (-2x^4 + 4x^3)\,dx = \frac{1}{6}x^5 \int_0^{\frac{3}{2}} + \left[-\frac{2}{5}x^5 + \frac{4}{3}x_3\right]$$

k = 1, maka μ_1^1 = E [X] + μ (rerata X), dan μ_1 = E [(X - μ)] = ...

k = 2, maka μ_2^1 = E [X^2] (momen ke 2), dan μ_2 = E [(X - μ)^2] = ...

k = μ = 0, maka μ_k = μ_k^1

$\frac{\mu_3}{\sigma^3}$, dinamakan ukuran atau koefisien skurnes (kemiringan atau distribusi)

$\frac{\mu_4}{\sigma^4}$, dinamakan ukuran atau koefisien kutosis (keruncinran atau distribusi)

0 $\Rightarrow$ kurva memiliki kemiringan positif

0 $\Rightarrow$ kurva simetris

0 $\Rightarrow$ kurva memiliki kemiringan negatif

> 3 $\Rightarrow$ kurva leptokurtic (runcing)

= 3 $\Rightarrow$ kurva mesokurtic(moderat atai normal)

< 3 $\Rightarrow$ kurva platykurtic (tumpul)

Contoh 3.11

Diketahui peubah acak X berdistribusi dengan fkp f(x) = $\begin{cases} \frac{2}{3}x\ ; -2x+5 \\ 0\ ; x\ lainnya \end{cases}$

Hitung momen ke 1, ke 2 ke 3, dan ke 4 dari X

Hitung momen sentral ke 1, ke 2, ke 3, dan ke 4 sekitar ......

Hitung koefien skernes dam koefisien kuartosis dar X . ....

Hitung karasteristik kurva dari ..... Sketsa grafik !

Penyelesaian

$$\mu_1^1 = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx = \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{2}{3} x^2 dx + \int_{\frac{3}{2}}^{2} (-2x^2 + 4x)\, dx = \frac{2}{9} x^3 \int_0^{\frac{3}{2}} + \left[-\frac{2}{3} x^3 + 2 \right] = \frac{7}{6} = \mu$$

Dapat anda hitung bahwa :

μ_3 = E [(X -   )^3] = ... (X - .....)3 f (x)dx = - 0, 032407   dan

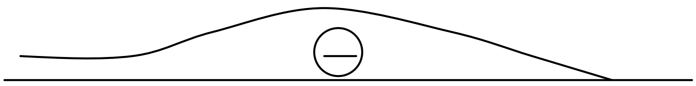
μ^4 = E [(X -   )^4] = ... (X - .....)3 f (x)dx = - 0, 07824

c) γ = koefisien skewnes = ... = ... = ... = 2, 422394

γ = koefisien kurtosis = ... = ... = ... = 2, 3999

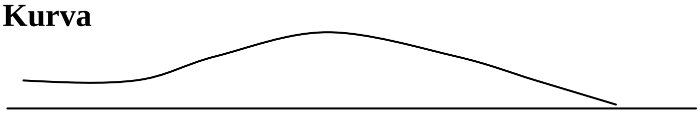
Berdasarkan nilai γ berarti kurva miring negatif (curam di kanan, landai di kiri).

Gambar Kurva

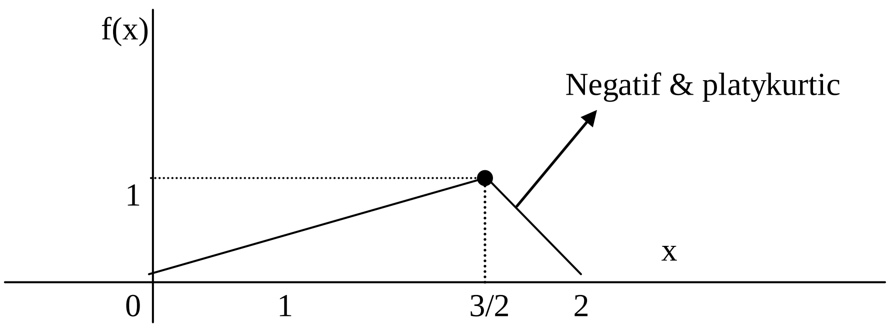


Dan berdasarkan nilai γ berarti kurva platykurtic (tumpul)

Gambar Kurva



d) Grafik $f(x)$ = $\begin{cases} \frac{2}{3}x \ ; 0 \le x < \frac{3}{2} \\ -2x+4 \ ; \frac{3}{2} \le x \le 2 \\ 0 \quad ; \ x \ lainnya \end{cases}$



Gambar 3-2

Catatan :

Terdapat hubungan antara momen dan momen sentral sekitar rerata, sehingga jika diketahui yang satu maka yang lain dapat dihitung menggunakan hubungan tersebut. Hubungan ini akan dibeerikan dalam teorema berikut :

Teorema :

Jika μ, μ_k dan μ_k berturut-turut adalah : rerata, momen ke k dan momen sentral ke k sekitar rerata dari p, a. X, maka

1) $\mu_k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-\mu)^{k-i} \mu_1^{i}$

2) $\mu_k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \mu^{k-i} \mu_1$

Bukti :

1) $\mu_k = E\left[X^{k} - \mu)^{k}\right] = E\left[\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} X^{i} (-\mu)^{k-i}\right]$

$$= \sum_{i-0}^{k} \binom{k}{i} (-\mu)^{k-i}\ E[X^{i}] = \sum_{i-0}^{k} \binom{k}{i} (-\mu)^{k-i} \cdot \mu_i^{1}$$

2) $\mu_k = E\,[X^k] = E[((X - \mu) + \mu)^k]$

$$= E\left[\sum_{i-0}^{k} \binom{k}{i} (X-\mu)^{i}\ \mu^{k-i}\right] = E\left[\sum \binom{k}{i} \mu^{k-i}\ (X-\mu)_i\right]$$

$$= \sum_{i-0}^{k} \binom{k}{i} \mu^{k-i}\ E[(X-\mu)^{i}] = \sum_{i-0}^{k} \binom{k}{i} \mu^{k-i} \mu_i$$

Contoh 3.12

Perhatikan contoh 3.11 !

Telah diditung momen-momen ke 1, 2, 3, dan 4, yaitu $\mu_1^{'} = \mu = \frac{7}{6}, \mu_1^{'} = \frac{37}{24}, \mu_1^{'} = \frac{35}{16}, dan\, \mu_4^{'} = \frac{781}{240}$. Akan dihitung momen-momen sentral sekitar rerata ke 1, 2, 3, dan 4 dengan menggunakan rumus dalam teorema hubungan antara momen dan momen sentral sekitar rerata, sebagai berikut :

$$\mu_1 = \sum_{i-0}^{1}\binom{l}{i}(-\mu)^{l-i}\,\mu_i' = \binom{1}{0}\left(-\frac{7}{6}\right)^1.1+\binom{1}{1}\left(-\frac{7}{6}\right)^0.\frac{7}{6}=-\frac{7}{6}+\frac{7}{6}=0$$

$$\mu^2 = \sum_{i-0}^{2}\binom{2}{i}(-\mu)^{2-i}\,\mu_i' = \binom{2}{0}\left(-\frac{7}{6}\right)^2.1+\binom{2}{1}\left(-\frac{7}{6}\right)^1.\frac{7}{6}+\binom{2}{2}\left(-\frac{7}{6}\right)^0.\frac{37}{24}$$

$$= \frac{49}{36}-2\frac{49}{36}+\frac{37}{24}=\frac{37}{24}-\frac{49}{36}=\frac{111-98}{72}=\frac{13}{72}$$

$$= 0{,}1805555 = \sigma^2$$

$$\mu_x = \sum_{i-0}^{3}\binom{3}{i}(-\mu)^{3-i}\,\mu_i' = \binom{3}{0}\left(-\frac{7}{6}\right)^3.1+\binom{3}{1}\left(-\frac{7}{6}\right)^2.\frac{7}{6}+\binom{3}{2}\left(-\frac{7}{6}\right)^1.\frac{37}{24}+\binom{3}{3}\left(-\frac{7}{6}\right)^0.\frac{35}{16}$$

$$= -\frac{243}{216}+3\frac{243}{216}-3\frac{259}{144}+\frac{35}{16}+\frac{343}{108}-\frac{259}{48}+\frac{35}{16}=\frac{343}{108}-\frac{154}{108}=\frac{1372-1386}{432}$$

$$= -\frac{14}{432} = -0{,}032407$$

$$\mu_x = \sum_{i-0}^{4}\binom{4}{i}(-\mu)^{4-i}\,\mu_i' = \binom{4}{0}\left(-\frac{7}{6}\right)^4.1+\binom{4}{1}\left(-\frac{7}{6}\right)^3.\frac{7}{6}+\binom{4}{2}\left(-\frac{7}{6}\right)^2.\frac{37}{24}$$

$$+\binom{4}{3}\left(-\frac{7}{6}\right).\frac{35}{16}+\binom{4}{4}\left(-\frac{7}{6}\right)^0;\frac{781}{240}$$

$$= \frac{2401}{1296}-4\frac{2401}{1296}+6\frac{49}{36}.\frac{37}{24}-4\frac{245}{96}+\frac{781}{240}$$

$$= -\frac{2401}{432}+\frac{1813}{144}-\frac{245}{24}+\frac{781}{240}=\frac{3038}{432}-\frac{1669}{240}$$

$$= \frac{1519}{216}-\frac{1669}{240} = 0{,}07824$$

Dapat anda perhatikan, bahwa nilai-nilai μ_1, μ_2, μ_3 dan μ_4 yang diperolah dengan teorema (umum), persisi sama dengan nilai-nilai yang diperoleh dengan menggunakan definisi !

Hal 78 tidak kebaca !

.... kita akan mempelajari ekspektasi khusus berikutnya, yang disebut

pembangkit momen, dengan fungsi ini kita bisa menghitung momen-momen yang barangkali lebih praktis !

, dengan M_x (1) = ... dinamakan <u>fungsi pembangkit momen</u> dari

sedemikian sehingga – k < 1< k maka M_x (1) ada.

momen (fpm) dari X belum tentu ada ! Walaupun f[e^x] ada tetapi

(k – 0), nilai M_x (t) tidak ada, maka M_x dianggap tidak ada. Ini berarti

, harus memuat himpunan buku yang memuat nol. Jika f, p, m dari

maka sangat berguna, antara lain untuk menentukan nilai momen-momen dari X,

dari X, maka

diskri, M^x (1) = E [] = $\sum_y e^{tx} f(x)$

kontinu, , M^x (1) = E $[e^{tx}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\, dx$

f, p, m, dari X dan $M_x^{(k)}(1) = \dfrac{d^k M_{x(t)}}{dt^k}$ turunan ke k terhadap 1 dari

maka, $M_x^{(k)}(0) = \mu_2$ (≡ momen ke k dari X)

p, a, diskrit sehingga $M_x(t) = \sum_x e^{tx} f(x)$, maka $M_x^{(k)}(t) = \sum_x e^{tx} f(x)$

dianggap konstanta)

$0 \rightarrow M_x^{(k)}(0) = \dfrac{d^k M_x^{)}(t)}{dt}$ ...... = $\sum_x e^{tx} x^k f(x) = E[x^k] = \mu_k^t$

dianggap X. p, a kontinu, sehingga $M_x(t) = \int_{\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx$, maka

..............................(x dianggap konstanta)

Teu aya halaman

Untuk t = 0 $\rightarrow$ $M_x^{(k)}(0) = \dfrac{d^k M_x(t)}{dt}$ ...... = $\int_{-\infty}^{\infty}$ $x^k f(x)$ = E [redacted]^k = μ_k^t

Jadi baik X diskrit maupun kontinu, maka $M_x^{(k)}(0) = \mu_k^t$ (terbukti)

Cara lain untuk membuktikan hubungan ini ialah dengan cara menguraikan terlebih dahulu, fungsi $\mu(x)$ = e^{tx} menjadi bentuk deret, yaitu dengan perluasan deret Macladrin, yang mana :

$$e^{tx} = 1 + tx + \frac{(tx)^2}{2!} + \frac{(tx)^3}{3!} + \ldots + \frac{(tc)^k}{k!} + \ldots \sum_{i-0}^{k} \frac{(tx)^i}{i!}$$

Sehingga $M_x(t) = E[e^{tx}] = E \sum_{i-0}^{k} \dfrac{(tx)^i}{i!}$

Silahkan anda teruskan dengan cara ini !

Sifat

Jika $M_x(t)$ f,p,m dai X, maka rerata dan varians X berturut-turut adalah

$M = M_x(0)$ dan $\sigma^2 = M_x(0) - (M_x(0))^2$

Contoh 3.13

Misalkan p, a X memiliki f,k,p $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}\binom{2}{x} & ;\ x = 0,1,2 \\ 0 & ;\ x\, lainnya \end{cases}$

a). Tentukan f,p,m dari X

b). Melalui f,p,m hitung μ_1, μ_2

Penyelesaian :

a). Jelas X p,a diskrit, maka

$$M_x(t) = E\,[e^{tx}] = \sum_x e^{tx}\, f(x) = \sum_{x-0}^{2} e^{tx} \cdot \frac{1}{4}\,\frac{2!}{(2-x)!x!} = \frac{1}{2}\sum_{x-0}^{2} e^{tx}\,\frac{e^{tx}!}{(2-x)!x!}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} + \frac{e^t}{1} + \frac{e^{2t}}{2}\right] = \frac{1}{4}e^{2t} + \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{4}\ ,\ t \in \Re$$

b). $\mu_1 = M_x(0) = \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{1}{2}e^t \Big]_{t=0} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

$$\mu_2^1 = M_x^{11}(0) = e^{2t} + e^t \Big]_{t-0} + 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\mu_2 = \sigma^2 = M_x^{11}(0) - \left[M_x^{11}(0)\right]^2 = \frac{3}{2} - 1^2 = \frac{1}{2}$$

Contoh 3.14

Misalkan X dengan fkp f(x) = $\begin{cases} xe^{-x}\ ,\ x > 0 \\ 0\ ,\ x \text{ lainnya} \end{cases}$

Tunjukkan, bahwa fpm dari X adalah M_X (t) = $\frac{1}{(1-t)^2}$, t dengan mwnggunakan fpm, hitunglah μ, σ^2, $\wp$, dan ∂ sketsa grafik f.

Penyelesaian

$$M_x(t) = E\left[e^{tx}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}\, f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} s^{tx}.0\,dx + \int_0^{\infty} e^{tx}\, xe^{-x}\,dx$$

$$= 0\int^{\infty} xe^{(t-1)x}\,dx = \int \frac{x}{t-1}\,d^{\,(t-1)x} = \frac{1}{(t-1)}\int x\ d\ e^{(t-1)x}$$

$$= \frac{1}{(t-1)}\left[xe^{(t-1)} - \int e^{(t-1)}x\,dx\right] = \frac{1}{(t-1)}\left[xe^{(t-1)x} - \frac{1}{(t-1)}e^{(t-1)x}\right]_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{(t-1)}\ \frac{him}{b\to\infty}\left[be^{(t-1)b} - \frac{1}{(t-1)}e^{(t-1)b}\right] - \left[0 - \frac{1}{(t-1)}.1\right], (t-1)<1$$

$$= \frac{1}{(t-1)}(0-0) + \frac{1}{(t-1)^2}\quad ,t<1$$

$$= \frac{1}{(t-1)^2}\ ,\ t<1$$

$M_x(t) = (1 - t)^2$, t < 1

$M_x^1(t) = 2\,(1 - t)^{-3} \Longrightarrow \mu_1^1 = M_x^1(0) = 2$

$M_x^{11}(t) = 6\,(1 - t)^{-4} \Longrightarrow \mu_2^1 = M_x^{11}(0) = 6$

$M_x^3(t) = 24\,(1 - t)^{-5} \Longrightarrow \mu_3^1 = M_x^{13}(0) = 24$

$M_x^4(t) = 120\,(1 - t)^{-6} \Longrightarrow \mu_4^1 = M_x^1 4\,(0) = 120$

Maka :

$$\mu = \mu_1^1 = M_x^1\ (0) = 2$$

$$\sigma^2 = M_x^{11}(0) - (M_x^1(0))^2 = 6 - 4 = 2 \Longrightarrow T = \sqrt{2}$$

$$\wp = \frac{1}{\sigma^3}\mu^3 = \frac{1}{(\sqrt{2})^3}\left[\binom{3}{0}(-2)^3 - 1 + \binom{3}{1}(-2)^2\binom{3}{2}(-2)^1.6 + \binom{3}{3}(-2)^0.24\right]$$

$$= \frac{1}{2{,}8284267}\ (-8 + 24 - 36 + 24)$$

$$= 1,\ 4142$$

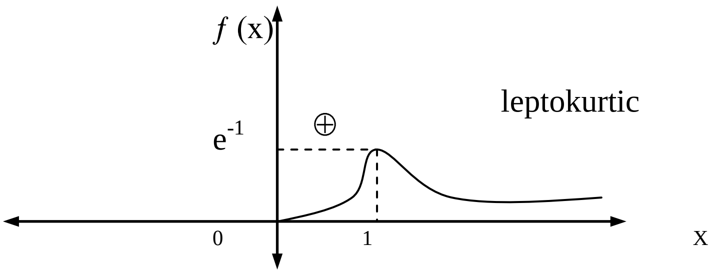
$$Y^* = \frac{\mu 4}{\sigma 4} = \frac{1}{4}\,\Sigma\binom{4}{1}(-\ \mu)^{4-i}\,\mu_i$$

$$= \frac{1}{4}\binom{4}{0}\ (\,..2)^4.1 + \binom{4}{1}(-2)^3.2 + \binom{4}{2}(-2)^2.0 + \binom{4}{3}(-2)2^4 + \binom{4}{4}(\ \ 2)^0.120$$

$$= \frac{1}{4}[\ 16 - 48 + 144 - 192 + 120] = 10$$

Kurva *f* memiliki kemiringan positif dan keruncingan leptokurtic

c. Grafik *f* disajikan dalam gambar 3.3. dengan titik puncak $(1,e^{-1})$



Gambar 3.3

3.4. Ekspektasi

Definisi :

Misal f (x y) fkp bersyarat dari X jika diketahui Y =y,dan u(x) benuk atau fungsi dalam X. Ekspektasi bersayarat dari u(x) jika diketahui Y=y, ditulis E[u(x)/y] dan

- Untuk p.a. diskrit, E[u(x)/y] = $\sum_x$ u(x)f(x/y)
- Untuk p.a kontinu, E[u(x)/y] = $\int_{-x}^{x}$ u(x)f(x/y) dx

A. Definisi

1. $\mu_{x/y}$ = E[X/Y] dinamakan rerata bersyarat dari X jika diketahui Y=y dan $\mu_{x/y}$ = E[X/Y] dinamakan rerata bersyarat dari y jika diketahui X=x
2. $\sigma^2_{x/y}$ = var (X/Y) = E[X- $\mu_{x/y})^2$ /Y = y] E[X^2/Y]-E^2{X/Y] dinamakan varians bersyarat dari X, jika diketahui Y=y $\sigma^2_{x/y}$ = var (Y/X)=E[(Y- $\mu_{y/x})^2$ /X=x] =E[Y^2/y]-E^2[Y/X]
3. Jika μ_x dan μ_y berturut-turut adalah rerata dari X dan Y, maka kovarians dari X dan Y, ditulis cov (X,Y) = E[X- μ_x)(Y- μ_y)] = E[XY] – E[X].E[Y}

4. Jika σ_x dan σ_y berturut-turut adalah simpangan buku X dan simpangan baku Y, maka koefisien korelasi dari X dan Y ditulis :

$$\rho_{xy} = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_x\sigma_y} = \frac{E[XY]-E[X]E[Y]}{\sqrt{(E[X^2[X])(E[Y^2]-E^2[Y])}}$$

B. Contoh 3.15

Misalkan X dan Y mempunyai fkp bersama seperti contoh 2.10 yakni :

$$f_x(X) = \begin{cases} \dfrac{3x+3}{21} & ;x1,2,3 \\ 0 & ;Xlainnya \end{cases} \qquad f_y(X) = \begin{cases} \dfrac{y+2}{7} & ;x1,2 \\ 0 & ;ylainnya \end{cases}$$

$$f(x/y) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{3y+6} & ;x1,2,3 \quad ;y=1,2 \\ 0 & ;Xlainnya \end{cases} \qquad f(y/x) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{2x+3} & ;x1,2,3 \quad ;y=1,2 \\ 0 & ;Xlainnya \end{cases}$$

a. Hitung E[(2^2x2-3)/y], E[(3-4y)/x] dan E[($2x^2$-3)/y=1]
b. Hitung rerata X jika diketahui Y=y dan rerata Y jika diketahui X=x Berapakah $\mu_{x/y=2}$ dan $\mu_{y/x=2}$?
c. Hitung var (x/y) dan var (y/x=2)
d. Hitung cov (x,y) dan ρ_{xy}

Penyelesaian :

a. E[(2^2-3)/y] = $\sum_x (2X^2-3) f(x/y) = \sum_{x=1}^{3} (2x^2-3)\dfrac{x+y}{3y+6}$

$$= \frac{1}{3y+6}\sum_{x=1}^{3}(2x^3-3x+2x^2y-3y)$$

$$= \frac{1}{3y+6}\left[2-3+2y-3y+16-6+8y-3y+54-9+18y-3y\right]$$

$$= \frac{19y+54}{3y+6}$$

E[(2^2-3)/y] = $\dfrac{19+54}{3+6} = \dfrac{73}{9} = 8\dfrac{1}{9}$

E[(3-4y)/x]= $\sum_x xf(3-4y) f(y/x) = \sum_{y=1}^{2}(3-4y)\dfrac{x+y}{2x+3}$

$$= \frac{1}{2x+3}\sum_{y=1}^{2}(3x+3y-4xy-4y^2)$$

$$= \frac{1}{2x+3}\left[3x+3-4x-4+3x+6-8x-16\right]$$

$$= \frac{-6x-11}{2x+3}$$

b. $\mu_{x/y} = E[X/y] = \Sigma x f(x/y) = \sum_{x=1}^{3}\dfrac{x(x+y)}{2x+3} = \dfrac{1}{3y+6}[4+y+4+2y+9+3y]$

$$= \frac{6y+13}{3y+6}$$

$$\mu_{y/x} = E\left[Y/x\right] = \sum_y y f\left(y/x\right) = \sum_{y=1}^{2} \frac{y(y+x)}{2x+3} = \frac{1}{2x+3}[x+1+2x+4]$$

$$= \frac{3x+5}{2x+3}$$

$$\mu_{x/2} = \frac{6.2+14}{3.2+6} = \frac{26}{12} = \frac{13}{6}$$

$$\mu_{y/2} = \frac{3.2+5}{2.2+3} = \frac{1}{7}$$

c. $\sigma^2_{x/y} = \text{var}(X/y) = E[X^2/y] - E^2[X/y]$ dengan

$$\text{E[(x}^2\text{/y]} = \sum_{x=1}^{3} \frac{x^2(x+y)}{3y+6} =$$

$$= \frac{1}{3y+6}[1+y+8+4y+27+9y]$$

$$= \frac{14y+36}{3y+6}$$

Maka

$$\sigma_{x/y} = \frac{14y+36}{36+6} - \left(\frac{6y+14}{3y+6}\right)^2$$

$$\frac{42y^2+193y+216-36y^2-168y-196}{(3y+6)^2} - \frac{6y^2+24y+20}{(3y+6)^2}$$

$$\sigma^2{}_{y/x=2} = \text{var}\left(Y/_{x=2}\right) = E\left(Y^2/2\right) - E^2\left(Y/2\right)$$

dengan E $\left(Y^2/2\right) = \sum_{y=1}^{2} y^2 \frac{2+y}{4+3} = \frac{1}{7}[3+16] = \frac{18}{7}$

dan E(Y/2) = $\frac{3.2+5}{2.2+3} = \frac{11}{7}$

maka $\sigma^2{}_{y/2} = \frac{18}{7} - \left(\frac{11}{7}\right)^2 = \frac{126-121}{49} = \frac{5}{49}$

d. Cov. [X,Y]=E[XY]-E[X].E[Y], dengan

$$E[XY] = \sum_{(x,y)} xyf(x,y) = \sum_{y=1}^{2} \sum_{x=1}^{3} xy \frac{x+y}{21}$$

$$= \sum_{y=1}^{2} \frac{y}{21}[1+y+4+2y+9+3y] = \frac{1}{21} \sum_{y=1}^{2} (6y^2+14y)$$

$$= \frac{1}{21}[20+52] = \frac{72}{21} = \frac{24}{7}$$

$$E[X] = \sum_{x} xf(x) = \sum_{x=1}^{3} x \frac{2x+3}{21} = \frac{1}{21}[5+14+27] = \frac{46}{21}$$

$$E[Y] = \sum_{y} yf_y(y) = \sum_{y=1}^{2} \frac{y+2}{y} = \frac{1}{7}[3+8] = \frac{11}{7}$$

Maka Cov [X,Y] = $\frac{24}{7} - \frac{46}{21} - \frac{11}{7} = 3{,}4286 - 3{,}4428 = -0{,}0142$

$\rho_{xy} = \frac{Cov(x,y)}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{-0{,}0142}{\sigma_x \sigma_y}$, dengan

$$\sigma_x^2 = E[X^2] - E\;[X] = \sum_{x=1}^{3} x^2 \frac{2x+3}{21} - \left(\frac{46}{2}\right)^2 = \frac{1}{21}(5+28+81) - \frac{2116}{441}$$

$= 5{,}42857 - 4{,}79818 = 0{,}630039$

$$\sigma_y^2 = E[Y^2] - E^2[Y] = \sum_{y=1}^{x} y^2 \frac{y+2}{7} - \left(\frac{11}{7}\right)^2 = \frac{1}{7}(3+16) - \frac{121}{49}$$

$= 2{,}714286 - 2{,}469388 = 0{,}244898$

maka $\rho_{xy} = \frac{-0{,}0142}{(0{,}79397)(0{,}49487)} = \frac{-0{,}0142}{0{,}3929} = -0{,}036$

Catatan :

Kovarians dari X dan Y, atau Cov (X,Y) adalah ukuran statistik yang digunakan untuk mengukur derajat hubungan linier antara dua peubah acak X dan Y.

Nilainya mungkin positif, negatif atau nol. Jika Cov (X,Y) >0, dikatakan X dan Y mempunyai hubunan positif. Jika Cov (X,Y) <0, dikatakan X dan Y mempunyai hubungan negatif. Ukuran ini memiliki satuan dengan satuan data yang digunakan. Agar tidak memiliki satuan, maka diperbaiki (distandarkan) dengan ukuran statistik derajat ρ_{xy} jadi ρ_{xy} juga adalah ukuran derajat hubungan linier antara peubah acak X dan peubah acak Y yang bebas dari satuan ukuran yang dipakai. Dapat dibuktikan bahwa $-1 \leq \rho \leq 1$. Jika nilai ρ semakin besar baik positif maupun negatif, maka kelinieritasannya makin baik, artinya titik-titik pasangan (X,Y) semakin dekat dengan garis lurus. Jika X dan Y dua peubah acak saling bebas stokastik, maka dapat ditunjukkan bahwa E[X,Y] =[X].E[Y], Cov (X,Y) = 0 dan ρ=0. tetapi kebalikannya tidak berlaku yakni, jika Cov (X,Y) = 0 atau ρ = 0 maka belum tentu X dan Y bebas. Khususnya untuk ρ = 0 diartikan bahwa X dan Y tak berkorelasi linier.

Contoh 3.16

Misalkan fkp gaungan dari peubah acak X dan peubah acak Y berbentuk :

$$f(x,y) = \begin{cases} xy/96 & ;0 < x < 4 \quad 1 < y < 5 \\ 0 & ;xlainnya \end{cases}$$

a. Tentukan fkp marjinal dari X, fkp marjinal dari , fkp bersyarat dari X jika diketahui Y = y. periksa apakah X dan Y peubah acak saling bebas ?
b. Cov (X,Y) = E[XY] – E[X].E[Y], dengan

$$\text{E[XY]} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(xy)dxdy = \int_{1}^{5}\int_{0}^{4} xy \frac{yy}{96}\,\text{dxdy} = \int_{1}^{5} \frac{y^2}{96}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^4 dy$$

$$= \frac{64}{3.96}\left[\frac{1}{3}y^3\right]_1^5 = \frac{64.124}{3.3.96} = \frac{248}{27}$$

$$\text{E[X]} = \int_{-\infty}^{\infty} Xfx(x)dx = \int_{0}^{4}\frac{1}{8}x^2dy = \left[\frac{1}{24}x^3\right]_0^4 = \frac{64}{24} = \frac{8}{3}$$

$$\text{E[Y]} = \int_{-\infty}^{\infty} Yfy(y)dy = \int_{1}^{5} \frac{y^2}{12} dy = \left[\frac{1}{36} y^3 \right]_1^5 = \frac{124}{36} = \frac{31}{9}$$

Maka Cov (x,y) = $\frac{248}{27} - \frac{8}{3} - \frac{31}{9} = 0$

Dengan demikian, maka koefisien korelasi $\rho_{xy} = \dfrac{Cov(x,y)}{\sigma_x \sigma_y} = 0$

Karena nilai Cov(x,y) = 0 atau juga $\rho_{xy} = 0$, ini memberikan arti, bahwa antara peubah acak X dan Y tidak terdapat korelasi (hubungan) linier, jika kita perhatikan jawaban (a), bahwa peubah acak X dan y saling bebas hal ini berakibat ρ = 0. silahkan anda berikan contoh peubah acak X dan Y dengan ρ = 0, tetapi X dan Y tak bebas.

3.5. Soal-soal Latihan

1. Diketahui p.a. X memiliki fpk

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+2}{18} & ; -2, x, 4 \\ 0 & ; xlainnya \end{cases}$$

Hitung E[X], E[(x+2)^2, dan E[(6X-2(X+2)^3]

2. Misalkan fkp dari p.a X berbetuk

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{18} & ; x = 3,4,5,6 \\ 0 & ; xlainnya \end{cases}$$

a. Hitung E[2-X2] dan E $\left[\dfrac{3}{X} \right]$
b. Hitung rerata, varian dan simpangan baku X

Hitung kovarian dari X dan Y, dan juga koefisien korelasinya, kemudian tafsirkan berdasarkan hasil atau nilai yang diperoleh !

Penyelesaian

Misalkan $\int_x$ fkp marjinal dari X, maka

$(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \frac{1}{96}\int_{1}^{5} xydy = \frac{1}{96}\left(\frac{1}{2}xy^2\right)_1^5 = \frac{1}{8}x$

jadi, f $f_x(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}x & ;0 < x < 4 \\ 0 & xlainnya \end{cases}$

Misalkan f_y fkp marjinal dari Y, maka

$(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \frac{1}{96}\int_{0}^{4} xydx = \frac{y}{96}\left(\frac{1}{2}x^2\right)_1^4 = \frac{y}{13}x$

Jadi, $f_y(y) = \begin{cases} \frac{y}{12} & ;1 < y < 5 \\ 0 & ylainnya \end{cases}$

Linier $f(x,y) = f_x(x).f(y)$ untuk setiap x,y $\in R$,

Maka X dan Y dua peubah acak saling bebas stokasta sebagai alasan lain, dapat dijelaskan sebagai berikut misalkan $f\left(x/y\right)$ fkp bersyarat dari X jika diketahui

Y, maka $f\left(x/y\right) = \frac{f(x,y)}{f_y(y)} = \begin{cases} \frac{1}{8}x & ;0 < x < 4 \\ 0 & ;xlainnya \end{cases}$

Linier $f\left(x/y\right) = f_x(x), maka$ ini menunjukkan pula sebagai alasan, bahwa X dan Y peubah acak saling bebas (Y tidak mempengaruhi X)

3. Dua dadu homogen dittos sekaligus. Jika X menyatakan jumlah pasangan angka dadu. Berapakah harapan matematik dari jumlah pasangan angka dadu ?
4. Panitia undian berhadiah mengeluarkan 10.000 lembar undian, dengan

   1 hadiah pertama ebesar Rp. 5.000.000,-

   2 hadiah kedua masing-masing sebesar Rp.2.000.000,-

   4 hadiah ketiga masing-masing sebesar Rp. 500.000,-

   a. Berapa rupiahkan harapan menang untuk setiap lembar undian ?
   b. Jika setiap lembar undian dijual dengan harga Rp. 2.000 rupiah, berapakah harapan menang bagi seseorang yang telah membeli selembar undian ?
5. Hitunglah rerata dan varian (jika ada) dari peubah acak berikut :

a. Peubah acak X dengan fkp f(x) = $\begin{cases} \dfrac{2}{3x^2}; \dfrac{2}{3} < x < \infty \\ 0; xlainnya \end{cases}$

b. Peubah acak Y dengan fkp g(y) = $\begin{cases} \left(\dfrac{1}{2}\right) ; y = 1,2,3....... \\ \quad ylainnya \\ 0 \end{cases}$

c. Peubah acak Z dengan fkp h(z) = $\begin{cases} \dfrac{2}{3}; \sqrt{2} < Z < \infty \\ 0; Zlainnya \end{cases}$

6. Misalkan f.k.p bersama dari X dan Y berbentuk

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{30}(x, y) \; ; x = 0,1,2,3 & y = 0,1,2 \\ \qquad x, ylainnya \\ 0 \end{cases}$$

a. Hitung rerata bersyarat dari X jika diketahui Y=y

b. Hitung rerata besyarat dari Y jika diketahui X=0

c. Hitung E[(2x^2-3x-1)/y], dan E[(2x^2-3x-1)Y]

d. Hitung var(X/Y), dan var (Y/x=0)

7. Misalkan p.a X dengan f.kp $f(x) = \begin{cases} \ell^{-x} \; ; x > 0 \\ 0 \quad xlainnya \end{cases}$

a. Tentukan f.p.m dari X

b. Hitung momen sentral sekitar rerata ke 1, ke 2, ke 3, dan ke 4 dengan cara menghitunga terlebih dulu momen ke 1, ke 2, ke 3 dan ke 4. (Pentunjuk ; sebaiknya dengan menggunakan f.pm)

c. Hitung koefisien kemiringan y dan koefisien keruncingan y. Bicarakan tentang kurva f berdasarkan hasil ini. Kemudian sketsa grafik

8. Peubah acak X mempunyai mean $\mu = 3$ dan momen ke 2 $\mu_2 = 13$

a. Hitung simpangn baku dari X (= σ)

b. Tentukan batas bawah P{-2 <x<8], dengan menggunakan ketaksamaan Chebyshev

9. Buktikan untuk setiap p.a X dan Y berlaku

E[E[X/y]] = E[X] = μ x dan

E[E[Y/x]] = E[Y] = μ y

10. Misalkan fungsi kepadatan peluang dari X berbentuk

$$f(x) = \begin{cases} 3(1-x)^2 & ;0 < x < 1 \\ 0 & ;xlainnya \end{cases}$$

a. Jika μ dan σ, berturut-turut adalah rerata dan varian x, hitung

   P[μ -2 σ < x < μ + 2 σ]

b. Bandingkan hasil a) dengan menggunakan ketaksamaan Chebysshev

11. Misalkan pubah acak X dan Y dengan fkp gabungannya

$$f(x,y) = \begin{cases} 12xy(1-y);0 < xy < 1 \\ 0; x, ylainnya \end{cases}$$

a. Hitung cov (X,Y)

b. Hitung koefisien korelasi

c. Apakah X dan Y bebas Stokastik ?

12. Jika X dan Y peubah acak, a dan b dua konstanta real maka var(aX+bY) = a^2var(X) + b^2var(Y) + 2abcov(X,Y). Buktikan !

13. Misalkan X dan Y memiliki fkp bersama

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{3}(x,y) = (0,2),(1,1),(2,2) \\ 0;(x,y)lainnya \end{cases}$$

a. Hitung cov (X,Y)

b. Hitung koefisien korelasi ρ

c. Apakah X dan Y bebas Stokastik ?

14. Diketahui dua peubah acak X dan y saling bebas dengan fkp X dan fkp Y berturut-turut adalah :

$$g(x)\begin{cases} \ell^{-x}; x > 0 \\ 0; xlainnya \end{cases} \quad \text{dan} \quad h(x)\begin{cases} \ell^{-y}; y > 0 \\ 0; ylainnya \end{cases}$$

a. tentukan cov (X,Y) dan kosefisien korelasi ρ berdasarkan kebebasan dari X dan Y

b. Hitung cov (X,Y) dan koefisien korelasi ρ berdasarkan definisi (sifat)

15. Misalkan N peubah acak bernilai bilangan b tak negatif, tunjukkan bahwa

E[N] = $\sum_{k=0}^{\infty}$ P[N] secara umum, tunjukkan bahwa jika Xp acak non negatif

dengan fungsi distribusi maka E[X] = $\int_0^{\infty} E(x)dx$