

H. Maman Suherman, Drs., M.Si

FILE 16 : HANDOUT MATA KULIAH PENGANTAR TEORI STOKASTIK

Pertemuan 4

Pokok materi : Proses Poisson

Sub pokok materi: Proses stokastik, Proses Poisson biasa

Tujuan umum : Mahasiswa dapat memahami proses stokastik dan proses Poisson biasa

Uraian Pokok Perkuliahan

Proses Stokastik

Definisi:

Koleksi atau barisan peubah acak $\mathfrak{X} = \{X(t) : t \in T, T \text{ set indeks}\}$ dinamakan proses stokastik

Catatan:

- . T set indeks, jika setiap $t_1, t_2 \in T$ maka $t_1 > t_2$ atau $t_1 < t_2$ atau $t_1 = t_2$. Selanjutnya T dinamakan ruang parameter atau ruang indeks
- . Dalam terapanannya, seringkali t dianggap menyatakan waktu, dan dianggap diskrit, selanjutnya t dinamakan parameter
- . Jika T terbilang, maka \mathfrak{X} dinamakan proses stokastik dengan parameter (waktu) diskrit. Sebagai contoh $T = N = \{1, 2, 3, \dots\}$ maka $\mathfrak{X} = \{X(1), X(2), \dots\} = \{X_1, X_2, \dots\}$ merupakan barisan peubah acak
- . Jika T tak terbilang, maka \mathfrak{X} adalah proses stokastik dengan parameter (waktu) kontinu
- . Setiap $t \in T$, maka peubah acak $X(t)$ menyatakan keadaan pada saat t , dan himpunan nilai $X(t)$ yang mungkin yaitu range $X(t)$ dinamakan ruang keadaan dari proses stokastik \mathfrak{X}

Klasifikasi proses stokastik berdasarkan jenis dari ruang keadaan dan ruang parameter terbagi menjadi empat macam, yaitu:

1. Proses stokastik dengan ruang parameter diskrit dan ruang keadaan diskrit
Contoh: Banyak barang terjual di sebuah toko per hari
2. Proses stokastik dengan ruang parameter kontinu dan ruang keadaan diskrit
Contoh: Banyak ikan yang diperoleh hasil memancing pada waktu t sebarang
3. Proses stokastik dengan ruang parameter diskrit dan ruang keadaan kontinu
Contoh: Waktu yang diperlukan seorang dokter untuk memeriksa pasien ke n
4. Proses stokastik dengan ruang parameter kontinu dan ruang keadaan kontinu
Contoh: Volume air di sebuah bendungan yang diamati pada waktu t sebarang

Catatan:

- . Proses stokastik dengan parameter (waktu) t kontinu $\{X(t), t \geq 0\}$ dikatakan mempunyai kenaikan bebas jika untuk setiap $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n$ sedemikian sehingga perubahan acak – perubahan acak $X(t_1)-X(t_0), X(t_2)-X(t_1), \dots, X(t_n)-X(t_{n-1})$ saling bebas
- . Proses stokastik dengan parameter (waktu) t kontinu $\{X(t), t \geq 0\}$ dikatakan memiliki kenaikan Stasioner jika perubahan acak $X(t+s)-X(t)$ memiliki distribusi identik (sama) dengan perubahan acak $X(s)$ untuk setiap t

Proses Menghitung

Definisi

Proses stokastik $\{N(t), t \geq 0\}$ dinamakan proses menghitung, jika perubahan acak $N(t)$ menyatakan banyak peristiwa (banyak sukses) terjadi dalam selang waktu $[0, t]$, dengan sifat:

- (1) $N(t) \geq 0$, untuk setiap t
- (2) $N(t)$ bernilai bulat

(3) Jika $s < t$ maka $N(s) < N(t)$

(4) Untuk $s < t$, maka peubah acak $N(t) - N(s)$ menyatakan banyak sukses terjadi dalam selang

waktu $(s, t]$

Proses Poisson

Definisi I

Proses menghitung $\{N(t), t \geq 0\}$ dinamakan proses Poisson dengan intensitas (rate) $\lambda, \lambda > 0$, jika:

(1) $N(0) = 0$

(2) Proses memiliki kenaikan bebas

(3) $P[N(t+s) - N(s) = n] = e^{-\lambda t} (\lambda t)^n / n! ; n = 0, 1, 2, \dots$

Catatan: Sifat (3) memiliki pengertian, bahwa banyak sukses terjadi (yaitu n) dalam interval

yang panjangnya t berdistribusi Poisson dengan rerata $\mu = \lambda t$

Definisi II

Proses menghitung $\{N(t), t \geq 0\}$ dinamakan proses Poisson dengan intensitas (rate) $\lambda, \lambda > 0$, jika:

(1) $N(0) = 0$

(2) Proses memiliki kenaikan stasioner dan kenaikan bebas

(3) $P[N(h) = 1] = \lambda h + o(h)$

(4) $P[N(h) \geq 2] = o(h)$

Catatan: Fungsi f dinamakan $o(h)$ jika $\lim_{h \rightarrow 0} f(h)/h = 0$. Contoh $f(x) = 2x^3 - 4x^2$ adalah $o(h)$,

tetapi fungsi $g(x) = x^2 - 5x$ bukan $o(h)$

$P[N(h) \geq 2] = o(h)$ memiliki pengertian, bahwa peluang memperoleh 2 unsur sukses

atau lebih dalam selang waktu yang sangat pendek adalah sangat kecil, hampir 0

atau hampir mustahil

Dapat dibuktikan, bahwa Definisi I \Leftrightarrow Definisi II