

PEMBELAJARAN MATEMATIKA DENGAN MENGGUNAKAN MODEL

Jozua Sabandar

PENDAHULUAN

Pembelajaran matematika di sekolah akhir-akhir ini menunjukkan kecenderungan akan pendekatan pembelajaran yang bernuansa konstruktifisme. Artinya, bahwa materi matematika yang telah guru siapkan untuk disajikan di kelas tidak akan disajikan dalam bentuk yang sudah jadi, dengan cara “top-down”. Konsep-konsep atau materi matematika tersebut harus harus secara bottom-up dikenalkan untuk kemudian dibangun atau dikonstruksi oleh siswa dengan panduan dan arahan dari guru yang berperan sebagai fasilitator dan tidak sebagai penyampai informasi dalam bentuk jadi

Dalam hal mengkonstruksi tersebut, siswa tentu diberikan peluang untuk mengkonstruksi pengetahuan serta pemahaman matematikanya secara radikal pada awal proses belajar, namun selanjutnya aspek radikal tersebut menjadi berkurang dengan munculnya aktifitas belajar yang interaktif sehingga aspek sosial dalam proses pembentukan pengetahuan tersebut (socio-constructivism) mulai berperan. Dalam situasi belajar mengajar seperti ini, peranan guru sebagai penceramah atau orang yang mentransferkan pengetahuan yang sudah disiapkannya akan beralih dari *teacher telling* ke situasi *student learning*.

Dengan demikian, mengawali suatu proses pembelajaran matematika yang mengutamakan aspek konstruktifisme di kelas sesungguhnya guru sudah harus mempersiapkan tugas serta aktifitas belajar siswa dan mengantisipasi setiap respons dan pertanyaan yang mungkin dikemukakan siswa. Hal ini akan lebih terasa dan nampak jelas ketika terhadap suatu konsep matematika yang akan diajarkan di kelas, proses pembelajaran diawali dengan menyajikan suatu situasi masalah yang bermakna bagi siswa, atau situasi yang kontekstual bagi siswa. Dengan demikian siswa akan berkesempatan untuk memberdayakan kemampuan serta pengalaman yang dimilikinya.

Dengan mempertimbangkan bahwa kemampuan matematika siswa berada pada level yang beragam, karena itu, soal-soal yang disajikan ketika guru mengawali suatu kegiatan belajar hendaknya dapat mengakomodasi keberagaman level pengetahuan siswa dan membuka peluang untuk mereka berpartisipasi dalam mengkonstruksi pengetahuan mereka. Demikian juga dengan mempertimbangkan bahwa konsep matematika adalah sesuatu (pengetahuan) yang abstrak dan untuk menuju pada keabstrakan tersebut pebelajar harus berpijak pada sesuatu (pengetahuan) yang konkrit yang dimilikinya. Pemanfaatan terhadap pengetahuan yang dimiliki siswa sesungguhnya membuka kesempatan kepada mereka untuk berperan aktif dalam kegiatan belajar, apakah bertanya, mengemukakan pendapat atau bekerja sama dengan temannya dalam kelompok belajar. Dengan kata lain pembelajaran matematika di kelas janganlah “kering” dan “sepi” tetapi melibatkan siswa secara aktif adalah suatu yang dipandang perlu dan penting.

Soal Kontekstual

Soal – soal kontekstual dimaknai secara umum sebagai suatu situasi yang memuat masalah yang dapat dijangkau oleh pikiran siswa. Hal ini dimaksudkan agar siswa segera terlibat dalam proses belajar. Soal seperti ini tidaklah sekedar berkaitan dengan konteks kehidupan keseharian, tetapi juga dapat sesuatu yang fiktif namun dapat dijangkau oleh akal manusia, ataupun sesuatu yang kontekstual secara matematika. (Freudenthal, 19973 dalam van den Heuvel Pan Huizen, 1999) Yang terakhir ini, maksudnya bentuk matematika yang masih dapat dipahami atau bermakna bagi siswa.

Selain daripada itu, diharapkan bahwa soal-soal yang dipilih itu dapat diselesaikan dengan menggunakan lebih dari satu cara atau strategi serta melibatkan lebih dari satu aktifitas berpikir tingkat tinggi. Sehingga siswa merasa tertarik dan sadar akan betapa kayanya cara dalam matematika dalam menyelesaikan suatu permasalahan. Diharapkan akan timbul penghargaan siswa tentang peranan matematika dalam kehidupan dan dalam menyelesaikan berbagai masalah dalam kehidupan.

Berdasarkan peluang yang disediakan oleh soal kontekstual bagi terbentuknya pengetahuan matematika, soal-soal kontekstual memuat konteks yang bertingkat dimulai dengan menyajikan terjemahan dari soal matematika yang disajikan dalam bentuk teks, menyajikan kesempatan bagi terjadinya matematisasi, serta memberikan peluang bagi siswa untuk menemukan konsep baru dalam matematika.

Dengan disediakannya soal-soal kontekstual seperti ini maka peluang untuk siswa menemukan kembali (reinvention) gagasan-gagasan matematika menjadi lebih baik.

Proses

Umumnya konsep-konsep matematika berawal dari pengalaman dan kejadian dalam kehidupan manusia. Sehingga, ketika orang diharapkan mempelajari matematika agar mengerti maknanya, sebaiknya ia dapat kenal dan memahami akan adanya situasi atau konteks yang memuat serta melahirkan konsep matematika tertentu yang akan dipelajari siswa. Oleh karena itu, sekalipun pada bagian akhir dari pembelajaran matematika akan menghasilkan siswa yang telah memahami dan menguasai konsep matematika yang pada mulanya abstrak baginya, siswa harus diberi kesempatan untuk menjalani suatu tahap konkrit. Pengertian konkrit disini, tidak hanya sebatas bahwa siswa bisa melihat, meraba akan model konkrit dari konsep yang akan dipelajari, tetapi juga bahwa siswa dapat menangkap akan adanya situasi yang konkrit bagi siswa. (Gravemeijer, 1994) misalnya konsep matematika yang telah dikenalnya namun terkait dengan konsep yang akan dipelajari. Ini berarti, suatu konsep yang sekarang ini abstrak bagi siswa, nantinya tidak lagi abstrak setelah ia menjalani proses pembelajaran yang disiapkan guru.

Jika kegiatan belajar dipandang tidak hanya sejauh mengenalkan suatu pengetahuan yang baru kepada siswa, tetapi juga sebagai suatu upaya untuk memberdayakan serta memperkuat pengetahuan yang sudah dimiliki siswa, maka dalam proses belajar tersebut perlu disediakan aktifitas untuk memberdayakan pengetahuan yang sudah dimiliki itu

agar siswa memahami dan menguasai pengetahuan yang baru, sekaligus memperkokoh pengetahuan yang sudah ada sebelumnya pada siswa.

Karena siswa akan menjalani suatu proses yang memampukannya membangun pengetahuannya dengan bantuan fasilitas dari guru, maka keterlibatannya dalam proses belajar haruslah nampak. Keterlibatan siswa dalam proses belajar ini antara lain adalah : (a) melakukan observasi , (b) melakukan eksplorasi, (c) melakukan inkuiri, (d) membuat hipotesis, (e) membuat konjektur, (f) membuat generalisasi, dan (g) menerapkan. Keterlibatan siswa seperti ini dalam proses belajar diharapkan dalam memunculkan dan mengembangkan kompetensi-kompetensi yang harus dimiliki siswa dalam belajar matematika, yaitu penalaran, komunikasi, koneksi, representasi dan pemecahan masalah.

- a. Observasi. Manakala pembelajaran terhadap suatu konsep matematika yang pada mulanya abstrak bagi siswa, diharapkan sudut pandang atau aspek konkrit yang ada pada siswa perlu diberdayakan.. Hal ini dapat diwujudkan dalam bentuk pengamatan terhadap fenomena-fenomena yang sama yang selalu muncul dalam matematika, sehingga siswa dapat memperhatikan hal-hal yang mencolok yang melekat pada fenomena-fenomena tersebut. Hal-hal yang mencolok itu dapat berupa bentuk matematika, pola bilangan, kedudukan suatu unsur dalam fenomena ini yang dapat menimbulkan pertanyaan atau rasa ingin tahu ataupun jawaban sementara atau tebakan atau perkiraan terhadap pertanyaan yang mungkin tentang fenomena itu..
- b. Eksplorasi biasanya terjadi pada mereka yang memiliki rasa ingin tahu terhadap sesuatu yang relatif masih baru dan yang menarik perhatiannya, misalnya, apa yang amat spesifik dari yang teramati olehnya. Tentu saja, hasil dari eksplorasi bisa bervariasi, sebab hal ini amat bergantung pada ketertarikan individu terhadap fenomena yang dihadapinya, sekalipun fenomena itu sama dihadapan individu-individu.
- c. Inkuiri. Explorasi serta observasi akan menimbulkan rasa ingin tahu yang lebih jauh pada individu untuk mencari jawaban terhadap pertanyaan yang muncul. Dalam inkuiri, individu mengajukan pertanyaan dan mencari informasi yang cukup dengan mengkaji dan menganalisa informasi tadi untuk menjawab pertanyaan yang dimunculkan.
- d. Hipotesis. Tentu saja dari hasil inkuiri itu, dapat saja dihasilkan jawaban sementara (hipotesis) terhadap pertanyaan yang dikemukakan. Namun, diterima atau ditolaknya hipotesis itu, amat tergantung pengujian secara matematik terhadap kebenaran hipotesis itu. Tindakan menduga atau menebak dapat dipandang sebagai bentuk sederhana dari pengujian akan kebenaran hipotesis itu.
- e. Konjektur. Suatu pernyataan matematika yang benar yang dihasilkan berdasarkan pengamatan atau eksplorasi, percobaan, namun belum dibuktikan kebenarannya secara formal adalah suatu bentuk kesimpulan secara umum, tetapi tidak formal. Ketika pernyataan ini dibuktikan secara matematika, maka konjektur tadi berubah namanya menjadi suatu teorema. Dalam hal ini tentu dipahami bahwa bahwa proses berpikir induktif yang telah berperan..
- f. Generalisasi. Dengan menerapkan cara berpikir deduktif, maka kebenaran dari konjektur itu dibuktikan. Dan sifat yang telah dibuktikan itu akan berlaku secara umum.

- g. Aplikasi. Kegunaan matematika sudahlah jelas yaitu antara lain agar dapat digunakan dalam berbagai bidang keilmuan atau dalam menyelesaikan berbagai masalah yang dijumpai dalam kehidupan keseharian.

Mengajarkan Matematika

Mengajarkan matematika sesungguhnya tidaklah sekedar bahwa guru menyiapkan dan menyampaikan aturan-aturan dan definisi-definisi, serta prosedur bagi para siswa untuk mereka hafalkan, akan tetapi termasuk dalam mengajarkan matematika adalah bagaimana guru melibatkan siswa sebagai peserta - peserta yang aktif dalam proses belajar sebagai upaya untuk mendorong mereka membangun atau mengkonstruksi pengetahuan mereka. Dalam proses belajar tersebut, hendaknya diingat bahwa diakhir dari suatu rangkaian kegiatan belajar dan mengajar, kompetensi-kompetensi penalaran, koneksi, komunikasi, representasi harus sudah nampak sebagai hasil belajar siswa. Karena itu dalam proses pembelajaran hendaknya kegiatan belajar diarahkan untuk munculnya kompetensi-kompetensi tersebut yang dianjurkan agar kegiatan tersebut dapat terjadi pada setiap jenjang pendidikan (NCTM, 2000).

Representasi matematika yang merupakan salah satu kompetensi adalah suatu aspek yang selalu hadir dalam pembelajaran matematika. Representasi atau model dari suatu situasi atau konsep matematika jika disajikan dalam bentuk yang sudah jadi sesungguhnya dapat dipandang telah mengurangkan atau meniadakan kesempatan bagi siswa untuk berpikir kreatif dan menemukan sejak awal konsep matematika yang terkandung dalam suatu situasi masalah. Representasi matematika terhadap suatu situasi atau suatu konsep dapat muncul dalam berbagai cara, konkrit (benda nyata), semi konkrit, benda tiruan atau gambar, semi abstrak (sketsa, atau lambang yang siswa buat sendiri) serta abstrak yang berbentuk simbol-simbol resmi dan rumus. Dengan demikian representasi atau model matematika juga dapat dipandang bertransisi dan merupakan jembatan yang menghubungkan bagian konkrit dan abstrak dalam pembelajaran matematika. (Gravemeijer, 1994). Kehadiran representasi dalam pembelajaran matematika akan memicu juga timbulnya kemampuan untuk mengaitkan ide-ide matematika dalam berbagai topik ataupun dengan situasi keseharian, ataupun memunculkan kemampuan siswa untuk bernalar serta berkomunikasi. Artinya dengan beragam representasi yang siswa munculkan mereka diharapkan dapat mengkomunikasikan gagasan atau strategi mereka kepada temannya saat mereka berinteraksi di kelas. Sesungguhnya kompetensi-kompetensi ini jika secara sengaja diberikan peluang untuk muncul dan disiasati secara baik, maka akan merupakan modal dasar untuk menunjang kemampuan pemecahan masalah matematika.

Dari keberagaman pendapat siswa yang terlibat dalam komunikasi, siswa diharapkan dapat secara mandiri memilih strategi atau prosedur yang sesuai dengan level kemampuannya, sehingga ia akan bertanggung jawab terhadap pilihannya itu. Karena itu, perlu diberikan kesempatan juga kepada siswa untuk memberikan suatu refleksi mengenai apa yang ia kembangkan, atau apa yang ia contohi atau akomodasi dari siswa yang lain atau dari guru. Refleksi ini dapat mengenai berbagai hal, misalnya tentang alasan ia memilih suatu strategi, mengapa ia mengubah prosedur, apa yang ia lihat sangat cocok bagi dirinya, ataupun apa keindahan atau keunggulan dari suatu teknik atau strategi. Kegiatan refleksi ini seyogyanya merupakan bagian yang harus ada dalam tiap

kegiatan belajar di kelas, ataupun di luar kelas, misalnya di rumah.baik secara lisan maupun tulisan.

Prosedur

Konsep-konsep matematika berawal dari aktifitas manusia yang selanjutnya disadari dan dikembangkan menjadi suatu pengetahuan yang selanjutnya digunakan untuk membantu manusia menyelesaikan masalah. Karena iu belajar matematika hendaknya dipandang sebagai aktivitas manusia (*human activity*) (Freudenthal, 1973). Sebagai contoh, ketika konsep suatu deret geometri ta hingga akan diajarkan berserta dengan menghitung jumlah ta hingga suku-suku deret itu, hendaknya dipahami bahwa deret seperti itu tidak muncul atau terjadi dengan sendirinya. Sesungguhnya ada saja kejadian atau peristiwa yang kontekstual yang ada disekitar kehidupan manusia yang memunculkan bentuk deret geometri ta hingga tersebut. Pandanglah contoh-contoh deret geometri ta hingga berikut ini, dimana pembentukannya dapatlah sebagai hasil suatu kegiatan manusia.

1. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$
2. $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \dots$
3. $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{254} + \dots$
4. $\frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \frac{1}{625} + \dots$

1. Observasi

Jika anda mengobservasi bentuk penjumlahan bilangan-bilangan seperti di atas, akan anda jumpai beberapa ciri umum yang mereka miliki.

1. Tiap dua bilangan yang berturutan adalah perkalian bilangan di depannya dengan bilangan pertama. Atau bilangan kedua adalah kwadrat bilangan pertama, bilangan ketiga adalah pangkat tiga dari bilangan pertama, dst.
2. Untuk contoh pertama, anda tahu bahwa bilangan (suku berikutnya) berikutnya adalah $\frac{1}{32}$, dan $\frac{1}{64}$.
3. Semakin besar urutan suatu suku, akan semakin kecil suku itu
4. Bilangan-bilangan itu membentuk suatu pola tertentu, dan ta hingga banyaknya:
 $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \dots$

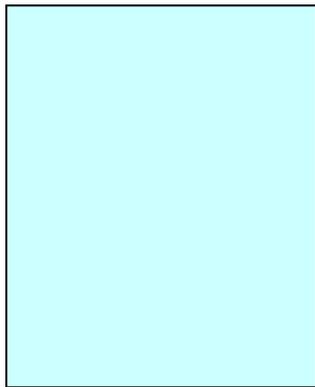
- 3. Pertanyaan:**
1. Dalam hal ini, bilangan apakah x itu?
 2. Tentukan salah satu syarat yang harus dipenuhi x. Jelaskan
 3. jumlah dari semua suku yang ta hingga itu?
 4. Coba anda taksir sebesar apakah jumlah suku-suku itu.

Dari contoh-contoh ini diharapkan muncul pertanyaan, sebagai ungkapan kepekaan ataupun rasa ingin tahu. Bahkan mungkin ada pertanyaan seperti: Apakah hal ini ada dalam kehidupan manusia? Atau dapat saja muncul pertanyaan lain

4. Kegiatan memunculkan model

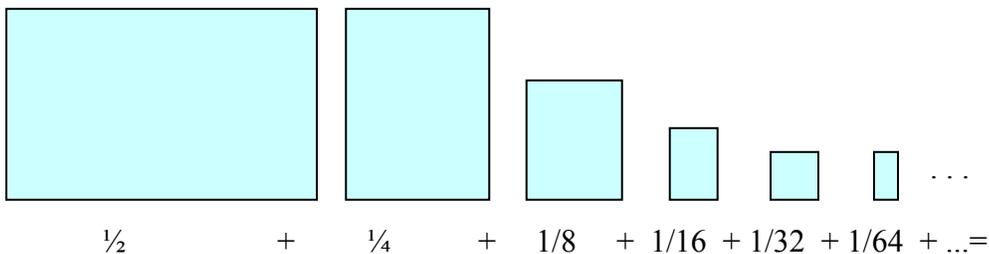
Untuk memunculkan model atau bentuk matematika: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$ sesungguhnya dapat diawali dengan aktivitas sebagai berikut dengan melipat kertas menjadi dua bagian yang sama, menggunting, dan melipat, dan menggunting dst. Lihat ilustrasi berikut)

Kegiatan: Lakukan kegiatan berikut ini



Gambar 1.
Persegi panjang satuan

1. Ambil selembar kertas berbentuk persegi panjang sebagai berikut.
2. Lipat kertas menjadi dua bagian berbentuk pers. Panjang kemudian digunting menurut lipatannya.
3. Ambil seperdua bagian kertas tadi dan lipat menjadi dua bagian berbentuk pers. panjang yang sama dan gunting pada lipatannya. Masing-masing adalah $\frac{1}{4}$ bagian dari kertas semula
4. Ambil satu dari $\frac{1}{4}$ bagian kertas yang ada, lipat menjadi dua bagian yang sama dan guntinglah pada lipatan itu. Diperoleh $\frac{1}{8}$.
5. Lakukan hal ini berkali-kali, dan susunlah guntingan-guntingan kertas tadi sebagai berikut.



Gambar 2. Penjumlahan bagian-bagian dari Persegipanjang satuan

(Apa yang dapat disimpulkan dari ilustrasi mengenai penjumlahan ini?)

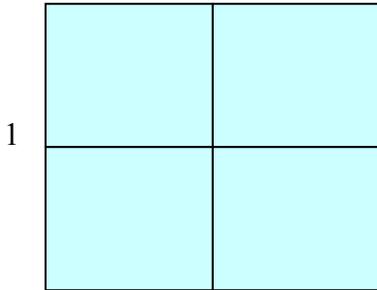
Perhatikanlah bahwa dengan aktivitas ini, ada beberapa hal yang menarik:

1. Bagian kertas satuan dipecah-pecah dengan aturan tertentu.
2. Model fisik (nyata/konkrit) disajikan dalam bentuk lambang (bilangan, notasi) dimunculkan suatu penjumlahan.
3. Dengan hadirnya bentuk fisik/konkrit tadi, maka dengan observasi atau eksplorasi yang

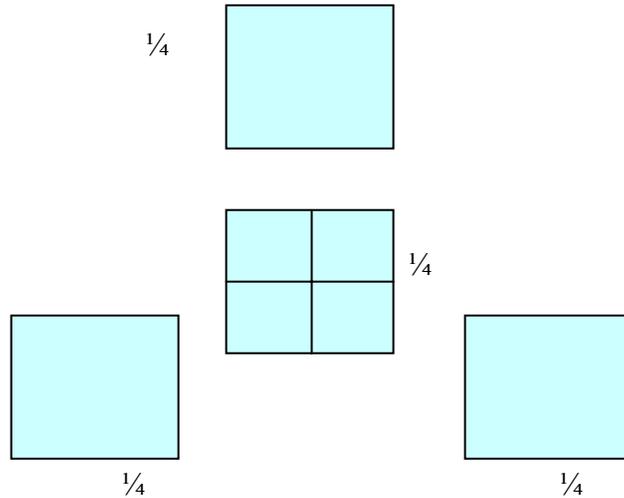
tepat dapatlah ditentukan bilangan terdekat apakah yang menyatakan hasil penjumlahan ini.

4. Jawab tentang hasil jumlah ini diperoleh secara informal.

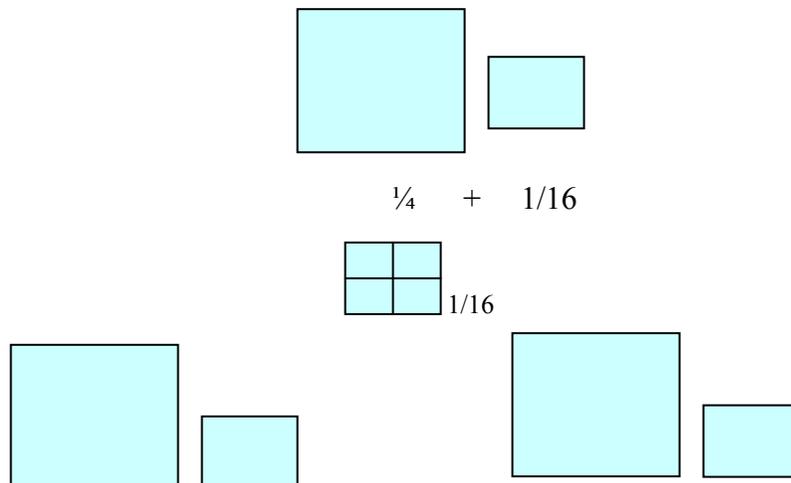
5. Bagaimana menentukan $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \dots = \dots$



Gambar 3. Persegi satuan



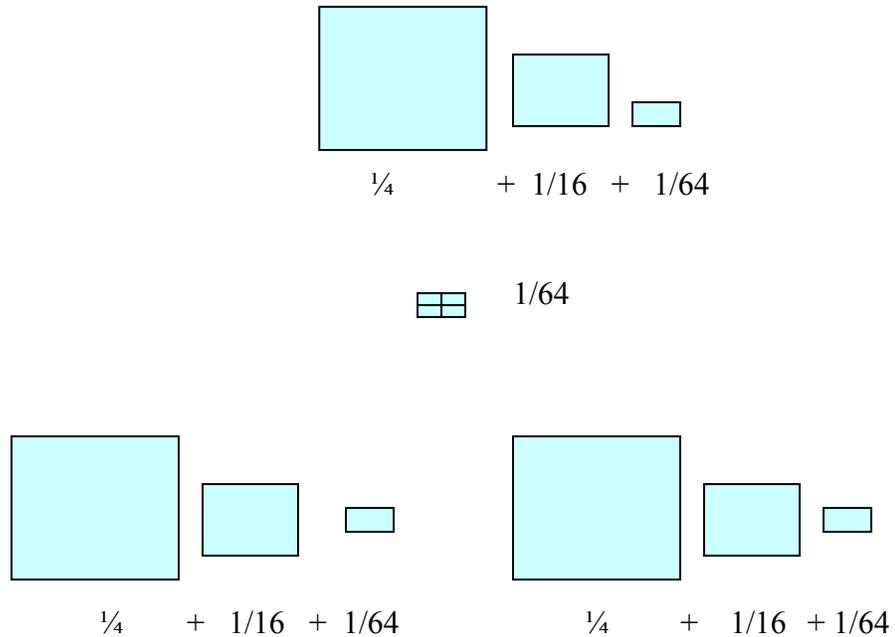
Gambar 4. Bagian Persegi panjang dibagi pada tiga kelompok, dgn satu kelompok sisa



$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} \qquad \frac{1}{4} + \frac{1}{16}$$

Gambar 5. seperempat sisa dibagi lagi kepada tiga kelompok

Selanjutnya terhadap sisa $1/16$ dilakukan lagi pembagian , dan ditempatkan pada tiga kelompok yang ada.



Gambar 6. $1/16$ sisa dibagi lagi pada tiga kelompok

Pelajarilah ilustrasi ini (lihat Gambar 6.) untuk menentukan bahwa :

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \dots = \frac{1}{3}$$

Secara **kontekstual** situasi ini dapat disajikan sebagai berikut

Ada satu kue akan dibagi sama untuk 3 anak, tetapi kue itu telah terbagi atas 4 bagian yang sama. Masing-masing mula2 mengambil $1/4$. Selanjutnya $1/4$ yang tersisa dibagi atas 4 bagian yang sama dan masing-masing mendapat $1/16$. Sisa $1/16$ dibagi lagi atas 4 bagian yang sama menjadi $1/64$ utk masing2 bagian, dan setiap anak mendapat $1/64$ dst.

(Perhatikanlah bahwa dari empat bagian yang sama itu, masing-masing anak mendapat satu bagian, yaitu $1/4$. Sedangkan untuk bagian ke empat (sisa) tidak ada diantara ketiga anak itu yang mau mengambilnya, sehingga disepakati bahwa bagian keempat itu dibagi lagi atas empat bagian yang sama, masing-masing $1/16$ dan setiap anak memperoleh satu bagian. Selanjutnya, bagian yang tersisa pun lalu dibagi empat, dst).

Dapat dipahami bahwa setiap anak akan mendapatkan:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots \text{ Dan jumlah ini} = \frac{1}{3} \text{ (Mengapa?)}$$

6. Refleksi

Coba anda tuliskan suatu refleksi tentang aktifitas ini, tentang:

- kejelasan aktifitas ini yang membantu pemahaman anda
- suatu rasional mengapa diperoleh $\frac{1}{3}$.

7. Cara lain.

Dengan memanfaatkan contoh pertama di atas, $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$ maka $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots$ dapat diselesaikan sebagai berikut.

$$\text{Dari } \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} \dots = 1$$

$$\text{Selanjutnya misalkan bahwa } \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \dots = y$$

$$\text{Pandang : } (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots) - (\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots) = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{128} + \dots$$

$$= 2 (\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots)$$

$$1 - y = 2y$$

$$1 = 3y$$

$$\text{Atau } y = \frac{1}{3},$$

8. Latihan

Selanjutnya, anda diharapkan bekerja dalam kelompok untuk menentukan apakah :

a. $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots = \frac{1}{2}$

b. $\frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \dots = \frac{1}{4}$ dst.

c. Gunakan cara lain untuk menyelesaikan soal a dan b.

9. Konjektur.

Dari pengamatan anda pada kedua soal yang pertama tadi serta hasil dari penyelesaian soal a dan b, tentu anda akan mempunyai hipotesis, atau dugaan, jika anda dihadapkan pada bentuk

$$1/6 + 1/36 + 1/216 + \dots = 1/5$$

Jika anda kembali melakukan beberapa percobaan atau kegiatan inkuiri, maka anda akan sampai pada suatu kesimpulan umum yang berkaitan dengan jumlah ta hingga suku-suku deret geometri ta hingga

$$1/x + 1/x^2 + 1/x^3 + \dots$$

Maka anda akan menyimpulkan bahwa $1/x + 1/x^2 + 1/x^3 + \dots = 1/(x - 1)$.

Dengan ketentuan bahwa x adalah bilangan asli.

Dapatkan anda BUKTIKAN HAL INI?

10. Koneksi.

Pandanglah 1/3 yang ditulis sebagai pecahan decimal berikut ini:

$$1/3 = 0.3333333 \dots$$

Perhatikan bahwa

0.3333 . . . adalah suatu pecahan dengan desimal berulang dengan banyaknya angka desimal ta terhingga.

Dengan demikian 0.3333 dapatlah ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned} 0.3333 \dots &= 0.3 + 0.03 + 0.003 + 0.0003 + \dots \\ &= 3/10 + 3/100 + 3/1000 + 3/10000 + \dots \\ &= 3(1/10 + 1/100 + 1/1000 + 1/10000 + \dots) \\ &= 3 (1/9) \\ &= 1/3 \end{aligned}$$

11. Aplikasi

Pandanglah 0.121212 ...

$$x = 0.121212\dots$$

$$100x = 12.121212 \dots$$

$$99x = 12$$

$$\text{jadi } x = 12/99 = 4/33 \quad \textbf{Tetapi}$$

$$0.121212 \dots = 0.12 + 0.0012 + 0.0000112 + \dots$$

$$= (0.1 + 0.02) + (0.001 + 0.0002) + (0.00001 + 0.000002) + \dots$$

$$= (0.1 + 0.001 + 0.00001 + \dots) + (0.02 + 0.0002 + 0.000002 + \dots) *$$



Pandang $0.1 + 0.01 + 0.001 + \dots = 1/9$ (*perhatikan contoh di depan*)

Jika dimisalkan bahwa $a = 0.1 + 0.001 + 0.00001 + \dots$, maka

$$\begin{aligned}
 (0.1) a &= 0.1 (0.1 + 0.001 + 0.00001 + \dots) \\
 &= 0.01 + 0.0001 + 0.000001 + \dots \\
 &= 1/99 \quad **
 \end{aligned}$$

Dengan demikian

$$a = (1/99) : (0.1)$$

$$a = (1/99) : (1/10) = (1/99)(10/1) = 10/99$$

$$\begin{aligned}
 \text{Pandang } b = 0.02 + 0.0002 + 0.000002 + \dots &= 2 (0.01 + 0.0001 + 0.000001 + \dots) \\
 &= 2 (1/99) = 2/99 \quad ***
 \end{aligned}$$

Dari (*), (**), dan (***) disimpulkan bahwa

$$0.121212 \dots = 10/99 + 2/99 = 12/99 = 4/33.$$

12. Secara umum

Jika diketahui x adalah bilangan asli > 1 , dan $S = 1/x + 1/x^2 + 1/x^3 + \dots$

$$\begin{aligned}
 \text{Maka } x S &= 1/x (1/x + 1/x^2 + 1/x^3 + \dots) \\
 &= 1 + 1/x + 1/x^2 + 1/x^3 + \dots
 \end{aligned}$$

Atau

$$(1/x) S = 1 + S$$

$$(1/x) S - S = 1$$

$$S (1/x - 1) = 1$$

$$S [(1-x)/x] = 1 \text{ atau } S = x / (1-x)$$

Catatan: Sesungguhnya jumlah dari bilangan-bilangan pada

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} \dots$, tidaklah tepat sama dengan 1. (Mengapa?). Akan tetapi jumlah dari bilangan-bilangan yang tak hingga banyaknya pada bentuk $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \dots$ adalah mendekati 1. tetapi tidak sama dengan satu, sekalipun bilangan-bilangan yang dijumlahkan itu tak hingga banyaknya.

Karena itu dikatakan limit dari $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} \dots$ adalah sama dengan 1.

Secara umum, penjumlahan ini ditulis sebagai berikut:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} \dots)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^3 + \dots + (\frac{1}{2})^n = 1$$

(Dan dibaca: “limit dari $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} \dots$ untuk n menuju ∞ adalah = 1

11. Soal:

1. Tentukan jumlah deret berikut:

- $\frac{3}{5} + \frac{3}{25} + \frac{3}{125} + \dots$
- $\frac{2}{7} + \frac{2}{49} + \frac{2}{343} + \dots$

2. Tuliskan pecahan berulang berikut ini sebagai pecahan biasa.

- 1,35353535...
- 0,13131313....

Daftar Pustaka

Freudenthal. H. (1973). Mathematics as an Educational Task. Dalam van den Heuvel Panhuizen (1996). *Assessment and Realistic Mathematics Education*. Freudenthal Institution. Utrecht.

Gravemeijer, K.P.E (1994). Developing Realistic Mathematics Education. Feudenthal Institution, Utrecht.

NCTM (2000). Principles and Standards for School Mathematics. Reston, Virginia