LOGIKA DAN BUKTI

Drs. C. Jacob, M.Pd

Email: cjacob@upi.edu

Untuk mampu mengerti matematika dan argumen matematis perlu memiliki suatu pengertian mendalam logika dan cara di mana mengenal fakta-fakta yang dapat dikombinasikan untuk membuktikan fakta-fakta baru. Meskipun banyak orang memandang dirinya sebagai pemikir logis, pola-pola berpikir dikembangkan dalam kehidupan sehari-hari hanya sugestif dan tidak secara total tepat untuk ketelitian yang diperlukan dalam matematika. Dalam bagian awal kita melihat dengan tepat pada aturan-aturan logika dan cara di mana argumen matematis dikonstruksi. Bagian 1 menyajikan konektif logis yang memungkinkan kita untuk membangun pernyataan majemuk dari pernyataan sederhana. Dalam Bagian 2 kita mendiskusikan peranan kuantifier. Dalam Bagian 3 dan 4 kita menganalisis struktur bukti matematis dan mengilustrasikan berbagai teknik bukti dengan pengertian soal-soal.

Bagian 1 KONEKTIF LOGIS

Bahasa matematika terutama memuat kalimat deklaratif. Jika suatu kalimat dapat diklasifikasikan **benar** atau **salah**, maka kalimat ini disebut suatu **pernyataan (statement)** atau **proposisi (proposition)** atau **asersi (assertion)**. Suatu **pernyataan (atau proposisi atau asersi)** adalah suatu formasi linguistik yang memiliki sifat **benar** atau **salah (principle of the excluded middle)**. "Benar" dan "salah" disebut **nilai kebenaran (truth value)** dari proposisi yang dinyatakan dengan "B" dan "S", secara berturut-turut.

CONTOH 1.1: Perhatikan proposisi berikut.

- (a) "5 adalah suatu bilangan prim."
- (b) "3 adalah suatu pembagi dari 7."
- (c) " $3 + 5 = 9$."

Proposisi (a) memiliki nilai kebenaran "B", sedangkan (b) dan (c) memiliki nilai kebenaran "S." Selanjutnya, (d) bukan proposisi, karena adanya nilai kebenaran hanya jika setelah nilai x ditentukan. Suatu **ekspresi (expression)** disebut "bentuk proposisional" ("propositional form") atau "predikat" ("predicate"). Jika A_1 dan A_2 adalah proposisi, maka secara gramatis dapat digabung untuk membentuk proposisi baru: "*bukan A_1* " ("*not A_1* "); " *A_1 dan A_2* " (" *A_1 and A_2* "); " *A_1 atau A_2* " (" *A_1 or A_2* "); "*Jika A_1 , maka A_2* " ("*if A_1 , then A_2* "); " *A_1 jika dan hanya jika A_2* " (" *A_1 if and only if A_2* ") yang nilai kebenarannya hanya bergantung pada nilai kebenaran proposisi parsial yang terjadi (*prinsip ekstensionalitas logika proposisional*) (*principle of extensionality of propositional logic*). Nilai kebenaran dari proposisi majemuk ditentukan dengan fungsi kebenaran klasik.

$non(A_1)$: "*not A_1* " ("*bukan A_1* ");

$et(A_1, A_2)$: " *A_1 and A_2* " (" *A_1 dan A_2* ");

$vel(A_1, A_2)$: " *A_1 or A_2* " in the non-exclusive sense, that is " *A_1 or A_2 or both*" (" *A_1 atau A_2 " dalam pengertian non-eksklusif, yaitu, " *A_1 atau A_2 atau kedua-duanya*");*

$seq(A_1, A_2)$: "*if A_1 , then A_2* " ("*jika A_1 , maka A_2* ");

$aeq(A_1, A_2)$: " *A_1 if and only if A_2* " (" *A_1 jika dan hanya jika A_2*).

A_1	non
B	S
S	B

A_1	A_2	et	vel	seq	aeq
B	B	B	B	B	B
B	S	S	B	S	S
S	B	S	B	B	S
S	S	S	S	B	B

CONTOH 1.2: Jika A_1 memiliki nilai kebenaran S dan A_2 memiliki nilai kebenaran B, maka proposisi majemuk (dalam urutan yang diberikan) memiliki nilai B, S, B, B, S (Lihat tabel di atas).

Selanjutnya proposisi dapat dibentuk dengan proposisi majemuk (misalnya, $et(non(vel(A_1, A_2), seq(A_1, A_2)))$). Untuk representasi dan investigasi proposisi diperkenalkan *ekspresi proposisional*, yang dapat dinyatakan sama seperti dengan ekspresi aritmetika.

Simbol-simbol fundamental seperti konstan adalah: B, S; variabel proposisional: $p_1, p_2, \dots$; operasi uner (unary operation): $\sim$ kadang-kadang dinyatakan dengan $\neg$ atau lainnya); operasi biner (binary operation): $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$; selanjutnya disebut *konjungsi, disjungsi, implikasi, biimplikasi (ekuivalensi) secara berturut-turut* dan symbol teknis: $(.)$.

CONTOH 1.3: Setiap barisan symbol yang hanya memuat variabel proposisional atau suatu konstan adalah suatu *ekspresi (expression)*.

CONTOH 1.4: Jika H_1 dan H_2 adalah ekspresi, maka $\sim H_1, (H_1 \wedge H_2), (H_1 \vee H_2), (H_1 \rightarrow H_2)$, dan $(H_1 \leftrightarrow H_2)$ adalah juga ekspresi.

Suatu barisan symbol adalah suatu ekspresi hanya jika dengan alasan seperti CONTOH 1.3 dan CONTOH 1.4.

CONTOH 1.5: $H_1 = ((p_1 \rightarrow p_2) \wedge \sim p_3), H_2 = ((p_1 \wedge \sim p_3) \wedge \sim (p_1 \wedge p_2))$.

Suatu ekspresi yang dimulai dengan symbol $\sim$ disebut suatu *negasi*; jika $H \equiv (H_1 \circ H_2)$, di mana H_1 dan H_2 adalah ekspresi dan $\circ$ adalah salah satu operasi dari $\wedge, \vee, \rightarrow$, atau $\leftrightarrow$, maka H disebut suatu *konjungsi, disjungsi, implikasi, atau ekuivalensi*, secara berturut-turut. Kata-kata seperti: *tidak, dan, atau, jika ..., maka..., jika dan hanya jika* disebut “*konektif logis*” (“*logical connectives*”) atau “*konektif sentensial*” (“*sentential connectives*”). Penggunaannya dalam penulisan matematis adalah serupa dengan (tetapi tidak identik dengan) penggunaannya

dalam kehidupan sehari-hari. Untuk menghindari setiap ambiguitas yang mungkin terjadi, kita akan melihat dengan teliti pada menentukan ketepatan makna matematisnya.

Misal p adalah suatu pernyataan yang diberikan. Maka $\sim p$ (dibaca bukan p) menyatakan *negasi* p . Apabila p Benar (B), maka $\sim p$ adalah Salah (S); apabila p adalah S, maka $\sim p$ adalah B. Buatlah suatu rangkuman dalam suatu tabel nilai kebenaran sebagai latihan.

CONTOH 1.6: Misal p , q , dan r dinyatakan sebagai berikut:

p : Hari ini adalah Minggu.

q : Lima adalah bilangan genap.

r : Himpunan bilangan bulat adalah countable.

Maka negasinya dapat ditulis sebagai

$\sim p$: Hari ini adalah bukan Minggu.

$\sim q$: Lima adalah bukan bilangan genap.

atau

Lima adalah bilangan ganjil.

$\sim r$: Himpunan bilangan bulat adalah tidak countable.

atau

Himpunan bilangan bulat adalah uncountable.

Konektif *dan* digunakan dalam logika dalam cara yang sama seperti dalam bahasa biasa. Jika p dan q adalah pernyataan, maka pernyataan p dan q disebut *konjungsi* p dan q dan dinyatakan dengan $p \wedge q$ adalah hanya B apabila p dan q keduanya B; dan sebaliknya adalah S. Kalimat $p \wedge q$ disebut *kalimat konjunktif* (*conjunctive sentences*), sedangkan p adalah *salah satu konjunkt* (*conjunct*); q *konjunkt lainnya*.

Konektif *atau* digunakan untuk membentuk suatu pernyataan majemuk dikenal sebagai suatu *disjungsi*. Kata *atau* memiliki dua makna: *atau inklusif (inclusive or)* dan *atau eksklusif (exclusive or)*. Kalimat $p \vee q$ disebut *kalimat disjunktif (disjunctive sentences)*; sedangkan masing-masing p dan q disebut *disjunkt (disjunct)*. Perhatikan CONTOH 1.7.

CONTOH 1.7: (a) Saya pergi ke *Jakarta atau Surabaya*.

Makna yang diharapkan adalah *Jakarta atau Surabaya tetapi bukan kedua-duanya*. Ini dikenal sebagai makna *atau eksklusif*.

(b) Saya mau makan *nasi goreng atau minum cocacola*.

Makna yang diharapkan adalah *kedua-duanya*. Ini dikenal sebagai makna *atau inklusif*. Makna *inklusif* ini hanya merupakan cara kata *atau* yang digunakan dalam logika. Sehingga, jika kita menyatakan disjungsi p atau q dengan $p \vee q$.

Buatlah rangkuman dalam suatu tabel nilai kebenaran dari CONTOH 1.7(a) dan 1.7(b) sebagai latihan.

Suatu pernyataan berbentuk *jika p, maka q* disebut suatu pernyataan *implikasi* atau *kondisional (implication or conditional statement)*. Pernyataan-jika p dalam implikasi disebut *anteseden (antecedent)* dan *pernyataan-maka q* dalam implikasi disebut *konsekuen (consequent)*.

Untuk menentukan pada suatu tabel nilai kebenaran yang tepat, perhatikan CONTOH 1.8 berikut.

CONTOH 1.8: Jika hujan berhenti pada hari Minggu, maka Saya pergi bermain tenis. Jika seorang teman membuat suatu pernyataan seperti ini, di bawah situasi apa anda dapat menyebutnya sebagai seorang pembohong? Tentu, jika hujan berhenti dan ia tidak pergi main tenis, maka ia tidak menceritakan kebenaran. Tetapi apa yang terjadi jika hujan tidak berhenti? Ia tidak dapat mengatakan apa yang ia

lakukan kemudian sehingga apakah ia pergi *atau* tidak pergi bermain tenis adalah benar.

Meskipun dapat disarankan bahwa interpretasi lain yang membuat pengertian sama baiknya, namun matematisi telah sepakat bahwa suatu implikasi dapat disebut Salah (S) hanya apabila anteseden Benar (B) dan konsekuen Salah (S). Jika kita menyatakan implikasi “*jika p, maka q*” dengan “ $p \rightarrow q$ ”; maka dapat diperoleh tabel nilai kebenarannya. Buatlah tabel kebenaran implikasi $p \rightarrow q$ sebagai latihan.

Ini penting untuk mengenal bahwa penulisan matematis ,pernyataan kondisional dapat menyamar dalam berbagai bentuk ekuivalen sebagai berikut:

jika p, maka q (if p, then q)

jika p, q (if p, q)

p mengakibatkan q (p implies q)

p hanya jika q (p only if q)

bukan p kecuali kalau q (not p unless q)

q jika p (q if p)

jika bukan q, maka bukan p (if not q, then not p)

q ditentukan p (q provided p)

q bilamana p (q whenever p)

p adalah suatu kondisi cukup untuk q (p is a sufficient condition for q)

q adalah suatu kondisi perlu untuk p (q is necessary condition for p)

Marilah kita memperhatikan beberapa contoh berikut.

CONTOH 1.9: (a) p: $x = 3$

q: $x^2 = 9$

Jika p, maka q: Jika $x = 3$, maka $x^2 = 9$.

(b) p: PQRS adalah suatu parallelogram

q: $PQ \parallel RS$

q bilamana p: $PQ \parallel RS$ bilamana PQRS adalah suatu paralelogram.

(c) p: $x + 4 = 11$.

q: $x = 7$.

p hanya jika q: $x + 4 = 11$ hanya jika $x = 7$.

(d) p: Segitiga ABC dan DEF adalah sebangun.

q: Segitiga ABC dan DEF adalah kongruen.

p adalah suatu kondisi perlu tetapi tidak cukup untuk q benar: Segitiga ABC dan DEF sebangun adalah suatu kondisi perlu tetapi tidak cukup untuk segitiga ABC dan DEF kongruen benar.

Pernyataan “p jika dan hanya jika q” adalah konjungsi dari dua implikasi $p \rightarrow q$ dan $q \rightarrow p$. Suatu pernyataan dalam bentuk ini adalah *biimplikasi* (*biimplication*) atau *ekuivalensi* (*equivalence*), dan dinyatakan dengan $p \leftrightarrow q$. Tabel kebenaran untuk ekuivalensi dapat diperoleh dengan menganalisis pernyataan majemuk:

$$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q).$$

CONTOH 1.10: Tabel kebenaran ekuivalensi $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$.

Solusi:

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
B	B	B	B	B
B	S	S	B	S

S	B	B	S	S
S	S	B	B	B

CONTOH 1.11: Konstruksi suatu tabel kebenaran untuk masing-masing pernyataan majemuk berikut.

(a) $\sim (p \wedge q) \leftrightarrow [(\sim p) \vee (\sim q)]$

(b) $\sim (p \vee q) \leftrightarrow [(\sim p) \wedge (\sim q)]$

(c) $\sim (p \rightarrow q) \leftrightarrow [p \wedge (\sim q)]$

Solusi

(a)

p	q	$\sim (p \wedge q) \leftrightarrow [(\sim p) \vee (\sim q)]$
B	B	S B B S S S
B	S	B S B S B B
S	B	B S B B B S
S	S	B S B B B B

(b)

p	q	$\sim (p \vee q) \leftrightarrow [(\sim p) \wedge (\sim q)]$
B	B	S B B S S S
B	S	S B B S S B
S	B	S B B B S S
S	S	B S B B B B

p	q	$\sim (p \rightarrow q) \leftrightarrow [p \wedge (\sim q)]$
B	B	S B B B S S
B	S	B S B B B B
S	B	S B B S S S

(c)

S	S	S	B	B	S	S	B
---	---	---	---	----------	---	---	---

CONOTOH 1.12: Gunakan tautology dalam CONTOH 1.11 untuk menulis suatu negasi dari masing-masing pernyataan berikut.

- (a) Tujuh adalah bilangan prim atau $2 + 2 = 4$.
- (b) Jika M bounded, maka M kompak.
- (c) Jika mawar merah dan jingga adalah biru, maka Saya lulus ujian.

Kerjakan sebagai latihan

LATIHAN 1

1. Tulis negasi dari masing-masing pernyataan berikut.
 - (a) Himpunan bilangan real adalah finit.
 - (b) Tujuh adalah prim atau lima adalah genap.
 - (c) M adalah suatu matriks orthogonal.
 - (d) Jika $x = 5$, maka $f(x) = 2$.
 - (e) Hari ini adalah Minggu atau hujan turun.
2. Identifikasi anteseden dan konsekuen dalam masing-masing pernyataan.
 - (a) Normalitas adalah suatu kondisi cukup untuk regularitas.
 - (b) Anda dapat mendaki gunung hanya jika memiliki keberanian.
 - (c) Dua matriks simetrik real adalah kongruen jika mereka memiliki rank sama dan tanda yang sama.
 - (d) Suatu barisan real adalah Cauchy hanya jika konvergen. (e) $f(x) = 5$ ditetapkan bahwa $x > 3$.
3. Konstruksi suatu tabel kebenaran untuk masing-masing pernyataan bentuk.
 - (a) $p \rightarrow \sim q$
 - (b) $[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$
 - (c) $[p \rightarrow (q \wedge \sim q)] \leftrightarrow \sim p$
 - (d) $\sim p \vee q$
 - (e) $[\sim q \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow \sim p$
4. Gunakan tabel kebenaran memeriksa bahwa masing-masing yang berikut adalah suatu tautology. Bagian (a) dan (b) disebut *hukum komutatif*, bagian (c) dan (d) disebut *hukum asosiatif*, bagian (e) dan (f) disebut *hukum distributif*.
 - (a) $(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$
 - (b) $(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$
 - (c) $[p \wedge (q \wedge r)] \leftrightarrow [(p \wedge q) \wedge r]$
 - (d) $[p \vee (q \vee r)] \leftrightarrow [(p \vee q) \vee r]$
 - (e) $[p \wedge (q \vee r)] \leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$
 - (f) $[p \vee (q \wedge r)] \leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$