

TEKNIK BUKTI: II

Drs. C. Jacob, M.Pd

Email: cjacob@upi.edu

Teorema dan bukti matematis tidak terjadi dalam isolasi, tetapi selalu dalam konteks suatu system matematis. Misalnya, dalam Bagian 3 apabila kita berdiskusi suatu konjektur yang berkaitan dengan bilangan prim, konteks natural dari diskusi adalah bilangan bulat positif. Dalam CONTOH 3.8 apabila mengambil bilangan genap dan ganjil, konteksnya adalah himpunan semua bilangan bulat. Sangat sering suatu teorema tidak membuat referensi eksplisit terhadap system matematis di mana teorema itu dibuktikan; ini harus diakibatkan dari konteks itu. Biasanya, kasus ini tidak sulit, tetapi jika ada suatu kemungkinan ambigu, penulis berhati-hati dapat menamakan secara eksplisit system yang mendapat perhatian. Apabila tentang pernyataan berkuantifier ini sangat penting untuk mengetahui secara tepat system apa yang diperhatikan. Misalnya, pernyataan

$$\forall x, \sqrt{x^2} = x$$

adalah *benar* dalam konteks bilangan positif tetapi adalah *salah* apabila memperhatikan semua bilangan real. Dengan cara sama,

$$\exists x \ni x^2 = 25 \text{ dan } x < 3$$

adalah *salah* untuk bilangan positif dan *benar* untuk bilangan real. Apabila kita memperkenalkan notasi himpunan ini lebih mudah dengan teliti dalam konteks dari suatu pernyataan berkuantifier khusus. Kini kita dapat menuliskannya dengan *kata-kata*. Untuk membuktikan suatu pernyataan universal

$$\forall x, p(x),$$

kita mulai dengan memilih suatu anggota x sebarang dari system di bawah perhatian dan kemudian menunjukkan bahwa pernyataan $p(x)$ adalah benar.

Hanya sifat yang kita gunakan terhadap x adalah sifat-sifat ini yang digunakan untuk semua anggota dari system itu. Misalnya, jika system itu memuat bilangan bulat, kita tidak dapat menggunakan sifat bahwa x adalah genap, karena ini tidak dapat digunakan untuk semua bilangan bulat. Untuk membuktikan suatu pernyataan eksistensial

$$\exists x \ni p(x),$$

kita telah membuktikan bahwa ada paling sedikit satu anggota x dalam system itu di mana $p(x)$ adalah benar. Sebagian besar cara langsung melakukan ini adalah dengan konstruk (hasil, dugaan, dsb.) suatu x khusus yang memiliki sifat dibutuhkan. Sayang, tidak ada cara pasti untuk selalu menentukan suatu x khusus yang dapat dikerjakan. Jika hipotesis dalam teorema itu memuat suatu pernyataan berkuantifier, ini kadang-kadang dapat berguna, tetapi sering bergantung pada strategi jembatan logis yang dibangun.

CONTOH 4.1: Untuk ilustrasi proses menulis suatu bukti dengan kuantifier, perhatikan yang berikut.

TEOREMA: Untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada suatu $\delta > 0$ sedemikian

sehingga $1 - \delta < x < 1 + \delta$ mengakibatkan

$$5 - \varepsilon < 2x + 3 < 5 + \varepsilon.$$

Kita bertanya untuk membuktikan sesuatu adalah benar untuk masing-masing bilangan positif ε . Sehingga kita mulai dengan memisalkan ε adalah suatu bilangan positif sebarang. Kita perlu untuk menggunakan ε ini untuk menentukan suatu δ positi dengan sifat bahwa

$$1 - \delta < x < 1 + \delta \text{ mengakibatkan } 5 - \varepsilon < 2x + 3 < 5 + \varepsilon.$$

Marilah dimulai dengan konsekuen dari implikasi. Kita ingin memiliki

$$5 - \varepsilon < 2x + 3 < 5 + \varepsilon.$$

Ini akan benar jika

$$2 - \varepsilon < 2x < 2 + \varepsilon$$

sehingga diperoleh

$$1 - \varepsilon / 2 < x < 1 + \varepsilon / 2.$$

Sehingga kita melihat bahwa pemilihan δ adalah $\varepsilon / 2$ dapat memenuhi kondisi yang diperlukan. Dalam menulis bukti dalam suatu cara formal kita akan menyederhanakan himpunan δ sama dengan $\varepsilon / 2$ dan kemudian menunjukkan bahwa δ khusus ini dapat dikerjakan.

Bukti: Misalkan ε adalah suatu bilangan positif sebarang dan misalkan $\delta = \varepsilon / 2$. Maka δ juga positif apabila

$$1 - \delta < x < 1 + \delta$$

diperoleh

$$1 - \varepsilon / 2 < x < 1 + \varepsilon / 2,$$

sehingga

$$2 - \varepsilon < 2x < 2 + \varepsilon$$

dan

$$5 - \varepsilon < 2x + 3 < 5 + \varepsilon,$$

sehingga terbukti. ■

Dalam beberapa situasi ini memungkinkan untuk membuktikan suatu pernyataan eksistensial dalam suatu cara taklangsung tanpa secara actual menghasilkan setiap anggota khusus dari system itu. Salah satu *metode taklangsung* adalah dengan ***bentuk kontrapositif*** dari dan yang lainnya adalah dengan menggunakan ***bukti dengan kontradiksi***.

Dua bentuk dasar dari suatu *bukti dengan kontradiksi* berdasarkan pada *tautology (f)* dan *(g)* dalam CONTOH 3.12 Tautology (f) memiliki bentuk

$$(\sim p \rightarrow c) \leftrightarrow p.$$

Jika kita ingin untuk menyimpulkan suatu pernyataan p, kita dapat melakukan demikian dengan menunjukkan bahwa negasi dari p berperan untuk suatu kontradiksi. Tautology (g) memiliki bentuk

$$[(p \wedge \sim q) \rightarrow c] \leftrightarrow (p \rightarrow q).$$

Jika kita ingin untuk menyimpulkan bahwa p mengakibatkan q, kita dapat melakukan demikian dengan menunjukkan bahwa p dan bukan q berperan untuk suatu kontradiksi. Dalam salah satu kasus kontradiksi dapat meliputi bagian dari hipotesis atau suatu pernyataan lain yang diketahui adalah benar.

CONTOH 4.2: Gunakan tabel kebenaran untuk membuktikan bahwa $(\sim p \rightarrow c) \leftrightarrow p$ dan $[(p \wedge \sim q) \rightarrow c] \leftrightarrow (p \rightarrow q)$ adalah tautology.

Solusi:

p	$(\sim p \rightarrow c) \leftrightarrow p$
B	S B S B B
S	B S S B S

p	q	$[(p \wedge \sim q) \leftrightarrow c] \leftrightarrow (p \rightarrow q)$
B	B	B S S B S B B
B	S	B B B S S B S
S	B	S S S B S B B
S	S	S S B B S B B

CONTOH 4.3: Untuk ilustrasi suatu bukti taklangsung dari suatu pernyataan eksistensial, perhatikan berikut ini.

TEOREMA: Misalkan f adalah suatu fungsi kontinu. Jika

$$\int_0^1 f(x) dx \neq 0, \text{ maka suatu titik } x \text{ dalam interval } [0, 1]$$

sedemikian sehingga $f(x) \neq 0$.

Secara simbolis, diperoleh $p \rightarrow q$, di mana

$$p: \int_0^1 f(x) dx \neq 0$$

$$q: \exists x \text{ di } [0, 1] \ni f(x) \neq 0.$$

Implikasi kontrpositif, $\sim q \rightarrow \sim p$, dapat ditulis sebagai:

$$\text{Jika untuk setiap } x \text{ di } [0, 1], f(x) = 0, \text{ maka } \int_0^1 f(x) dx = 0.$$

Ini sangat mudah untuk dibuktikan. Daripada menyimpulkan eksistensi suatu x di $[0, 1]$ dengan suatu sifat khusus, kita memberikan setiap x di $[0, 1]$ yang memiliki suatu sifat berbeda. Malahan, kini bukti mengikuti secara langsung dari definisi integral karena masing-masing suku dalam jumlah Riemann adalah nol.

CONTOH 4.4: Untuk ilustrasi suatu bukti dengan kontradiksi, perhatikan berikut.

TEOREMA: Misalkan x adalah suatu bilangan real. Jika $x > 0$,
Maka $1/x > 0$.

Secara simbolis, diperoleh $p \rightarrow q$, di mana

$$p: x > 0$$

$$q: 1/x > 0.$$

Tautology (g) dalam CONTOH 3.12 mengatakan bahwa $p \rightarrow q$ ekuivalen dengan $(p \wedge \sim q) \rightarrow c$. Sehingga kita mulai dengan mengandaikan $x > 0$ dan $1/x \leq 0$. Karena $x > 0$, kita dapat mengalikan kedua sisi pertidaksamaan $1/x \leq 0$ dengan x untuk memperoleh

$$(x)(1/x) \leq (x)(0).$$

Tetapi $(x)(1/x) = 1$ dan $(x)(0) = 0$, sehingga diperoleh $1 \leq 0$, Suatu kontradiksi dengan fakta bahwa $1 > 0$.

Tautology lain dalam CONTOH 3.12 yang patut mendapat atensi khusus adalah pernyataan (q):

$$[(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)] \leftrightarrow [(p \vee q) \rightarrow r].$$

Beberapa bukti secara natural membagi dirinya sendiri ke dalam pertimbangan dua (atau lebih) kasus. Misalnya, bilangan bulat adalah ganjil atau genap. Bilangan real adalah positif, negated, atau nol. Ini yang dapat membedakan argumen ditentukan untuk masing-masing kasus.

CONTOH 4.5: Andaikan kita ingin untuk membuktikan bahwa jika x adalah suatu bilangan real, maka $x \leq |x|$. Secara simbolis, diperoleh $s \rightarrow r$, di mana

s : x adalah suatu bilangan real

r : $x \leq |x|$.

Pertama, kita mengetahui definisi nilai mutlak:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{jika } x \geq 0 \\ -x & \text{jika } x < 0. \end{cases}$$

Karena definisi ini dibagi ke dalam dua bagian, ini adalah natural untuk membagi bukti kita ke dalam dua kasus. Sehingga pernyataan s ditempatkan kembali dengan disjungsi ekuivalen $p \vee q$, di mana

p : $x \geq 0$ dan q : $x < 0$.

Kini teorema kita adalah untuk membuktikan $(p \vee q) \rightarrow r$, dan ini kita lakukan dengan menunjukkan $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$. Bukti actual dapat ditulis sebagai berikut:

Jika x adalah suatu bilangan real sebarang. Maka $x \geq 0$ atau $x < 0$. Jika $x \geq 0$, maka dengan definisi $x = |x|$. Di pihak lain, jika $x < 0$, maka $-x > 0$, sehingga $x < 0 < -x = |x|$. Sehingga dalam salah satu kasus $x \leq |x|$. ■

Ini terkenal dengan ***bukti dengan kasus (proof by cases)***.

CONTOH 4.6: Dalam membuktikan suatu teorema yang berhubungan dengan memfaktorkan bilangan bulat positif lebih dari 1, dua kasus apa yang dapat layak diperhatikan?

Solusinya diserahkan kepada pembaca sebagai latihan.

Suatu bentuk alternatif bukti dengan kasus muncul apabila konklusi dari suatu implikasi mencakup suatu disjungsi. Dalam situasi ini tautology (p) dari CONTOH 3.12 sering berguna:

$$[p \rightarrow (q \vee r)] \leftrightarrow [(p \wedge \sim q) \rightarrow r].$$

CONTOH 4.7: Perhatikan yang berikut

TEOREMA: *Jika jumlah suatu bilangan real dengan dirinya sendiri adalah sama dengan kuadratnya, maka bilangan itu adalah 0 atau 2.*

Secara simbolis, diperoleh $p \rightarrow (q \vee r)$, di mana

$$p: x + x = x^2$$

$$q: x = 0$$

$$r: x = 2.$$

Untuk melakukan bukti kita dapat menunjukkan bahwa $(p \wedge \sim q) \rightarrow r$.

Bukti: Andaikan bahwa $x + x = x^2$ dan $x \neq 0$. Maka $2x = x^2$ dan karena $x \neq 0$, kita dapat membagi dengan x untuk memperoleh $2 = x$. ■

LATIHAN 4

1. Buktikan bahwa: Ada suatu bilangan bulat n sedemikian sehingga $n^2 + 3n / 2 = 1$. Apakah bilangan bulat ini unik?
2. Buktikan bahwa: Untuk setiap bilangan real $x > 3$, ada suatu bilangan real $y < 0$ sedemikian sehingga $x = 3y / (2 + y)$.
3. Buktikan bahwa: Jika $x^2 + x - 6 \geq 0$, maka $x \leq -3$ atau $x \geq 2$.
4. Buktikan atau berikan contoh tandingan: Untuk setiap bilangan Bulat positif n , $n^2 + 3n + 8$ adalah genap.

REFERENSI

Abrahamson, B., & Gray, M. C. (1978). The art of algebra. Adelaide: Rigby Limited.

Barnes, C. A. (Editor). (1992). Critical thinking: Educational imperative. San Fancisco: Jossey-Bass Publishers.

Beyer, B. K. (1991). Teaching thinking skills: A Handbook for elementary school teachers. Boston: Allyn and Bacon.

Brody, B. A. (1973). Logic: Theoretical and applied. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, Inc.

Bronshtein, I. N., & Semendyayev, K. A. (1985). Handbook of mathematics (3rd ed.). New York: Van Nostrand Reinhold Company.

Brookfield, St. D. (1997). Developing critical thinkers: Challenging adults to explore alternative ways of thinking and acting. San Francisco: Jossey-Bass Publishers.

Copi, I. M. (1979). Symbolic logic (5th ed.). New York: Macmillan Publishing Co., Inc.

Copi, I. M. (1982). Introduction to logic (6th ed.). New York: Macmillan Publishing Co., Inc.

Daepp, U., & Gorkin, P. (2003). Reading, writing, and proving: A closer look at mathematics. New York: Springer-Verlag New York, Inc.

Diestler, S. (1994). Becoming a critical thinker: A user-friendly manual. New York: Macmillan Publishing Company.

Ennis, R. H. (1996). Critical thinking. New York: Prentice-Hall, Inc.

Hamilton, A. (1988). Logic for mathematicians. Revised Edition. Cambridge: Cambridge University Press.

Jensen, R. J. (Ed.). (1993). Research ideas for the classroom: Early childhood mathematics. New York: Macmillan Publishing Company.

Kahane, H. (1978). Logic and philosophy: A modern introduction (3rd ed.) Belmont: Wadsworth Publishing Company, Inc.

Lay, St., R. (1986). Analysis: An introduction to proof. Englewood Cliffs: Prentice-Hall.

Marzano, R. J., Brant, R. S., Hughes, C. S., Jones, B. F., Presseisen, B. Z., Rankin, S. C., & Suhor, Ch. (1988). Dimension of thinking: A frame for curriculum and instruction. Alexandria: Association for Supervision and Curriculum Development.

- Mendelson, E. (1987). Introduction to mathematical logic (3rd ed.). California: Wadsworth and Brooks/Cole.
- Meyers, C. (1986). Teaching students to think critically. San Francisco: Jossey-Bass Publishers.
- Owen, D. T. (Ed.). (1993). Research ideas for the classroom: Middle grades mathematics. New York: Macmillan Publishing Company.
- Robert, E. S. (1986) Thinking recursively. New York: Wiley.
- Rosen, K. (1988). Discrete mathematics and its application. New York: Random House.
- Rosen, K. H. (1991). Discrete mathematics and its application. New York: McGraw-Hill Inc.
- Schwartz, St. P. (1994). Fundamentals of reasoning. New York: Macmillan Publishing Company.
- Tall, D. (Edited). (1991). Advanced mathematical thinking. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Toulmin, St., Rieke, R., & Jenik, A. An introduction to reasoning. New York: Macmillan Publishing Co., Inc.
- Tremblay, J. P., & Manohar, R. (1987). Discrete mathematical structures with applications to computer science. New York: McGraw-Hill Book.
- Velleman, D. J. (1996). How to prove it: A structured approach. Cambridge: Cambridge University Press.

Wilson, P. S. (Editor). (1993). Research ideas for the classroom high school mathematics. New York: Macmillan Publishing Company.