TEKNIK BUKTI: I

Drs. C. Jacob, M.Pd

Email: cjacob@upi.edu

Dalam dua bagian pertama kita memperkenalkan suatu kata-kata sukar logika dan matematika. Tujuannya adalah tentu, agar mampu untuk membaca dan menulis matematika, dan ini membutuhkan lebih dari kata-kata sukar yang sesuai. Ini juga membutuhkan sintaksis. Yakni, kita perlu untuk mengerti bagaimana pernyataan digabung untuk membentuk entitas matematis misterius yang dikenal sebagai suatu "*bukti.*" Untuk lebih mengerti proses bukti, lebih dulu diperkenalkan dua tipe utama dari penalaran logis: *penalaran induktif* dan *penalaran deduktif.*

CONTOH 3.1: Perhatikan fungsi $f(n) = n^2 + n + 17$. Jika kita evaluasi fungsi ini untuk berbagai bilangan bulat positif, kita mengamati bahwa kita selalu memperoleh suatu bilangan prim. (Ingat bahwa suatu bilangan bulat positif n adalah prim jika $n > 1$ dan hanya pembagi positifnya adalah 1 dan n .) Misalnya,

$$f(1) = 19$$

$$f(2) = 23$$

$$f(3) = 29$$

$$f(4) = 37$$

.

.

.

$$f(8) = 89$$

.

.

.

$$f(12) = 173$$

.

$$f(15) = 257$$

dan semua bilangan ini prim. Pada basis pengalaman ini kita dapat konjektur bahwa fungsi $f(n) = n^2 + n + 17$ selalu menghasilkan bilangan prim apabila n adalah suatu bilangan bulat positif. Menggambarkan suatu konklusi dari jenis ini merupakan suatu contoh dari penalaran *induktif*. Pada basis itu terlihat pada salah satu kasus individual membuat suatu konklusi umum.

Jika kita misalkan $p(n)$ adalah kalimat “ $n^2 + n + 17$ adalah suatu bilangan prim” dan kita mengerti bahwa n tentang suatu bilangan bulat positif, maka yang dapat kita tanyakan adalah apakah

$$\forall n, p(n)$$

suatu pernyataan benar? Sudahkah kita buktikan benar?

Ini adalah penting untuk merealisasikan bahwa tentu saja kita belum membuktikan bahwa ini benar. Kita telah menunjukkan bahwa

$$\exists n \ni p(n)$$

adalah benar. Kenyataannya, kita mengetahui bahwa $p(n)$ benar untuk banyak n . Tetapi kita belum membuktikan bahwa ini benar untuk *semua* n . Bagaimana kita dapat menghadirkan dengan suatu bukti? Ini tidak dapat dihasilkan, karena pernyataan “ $\forall n, p(n)$ ” adalah salah. Bagaimana Saya mengetahui pernyataan itu salah? Saya mengetahui bahwa ini salah karena Saya dapat memikirkan suatu contoh di mana $n^2 + n + 17$ adalah bukan prim. Suatu contoh seperti itu disebut suatu *contohtandingan (counterexample)*. Salah satu contohtandingan adalah $n = 17$:

$$17^2 + 17 + 17 = 17 \cdot 19.$$

Ada contoh lain juga. Misalnya, apabila $n = 16$,

$$16^2 + 16 + 17 = 16(16 + 1) + 17 = 17^2,$$

tetapi ini hanya mengambil salah satu contoh tandingan untuk membuktikan bahwa “ $\forall n, p(n)$ ” adalah salah.

Pada basis CONTOH 3.1 dapat menyimpulkan bahwa penalaran induktif tidak dibuktikan secara logis, tetapi sangat berguna. Malahan, tipe penalaran ini merupakan basis untuk sebagian besar jika tidak semua eksperimentasi ilmiah. Penalaran induktif juga sering merupakan sumber dari konjektur yang apabila dibuktikan menjadi teorema matematika.

CONTOH 3.2: Perhatikan fungsi $g(n, m) = n^2 + n + m$, di mana n dan m adalah bilangan bulat positif. Dalam CONTOH 3.1 kita melihat bahwa $g(16, 17) = 16^2 + 16 + 17 = 17^2$. Kita juga dapat mengamati bahwa

$$g(1, 2) = 1^2 + 1 + 2 = 4 = 2^2.$$

$$g(2, 3) = 2^2 + 2 + 3 = 9 = 3^2.$$

.

.

.

$$g(5, 6) = 5^2 + 5 + 6 = 36 = 6^2.$$

.

.

.

$$g(12, 13) = 12^2 + 12 + 13 = 169 = 13^2.$$

Pada basis dari contoh-contoh ini (menggunakan penalaran induktif) kita dapat membentuk konjektur “ $\forall n q(n)$ ” di mana $q(n)$ adalah

pernyataan

$$g(n, n + 1) = (n + 1)^2.$$

Konjektur kita saat ini adalah benar, dan kita dapat membuktikannya. dengan menggunakan hukum aljabar familiar, diperoleh

$$\begin{aligned} g(n, n + 1) &= n^2 + n + (n + 1) \quad [\text{definisi } g(n, n + 1)] \\ &= n^2 + 2n + 1 \quad [\text{karena } n + n = 2n] \\ &= (n + 1)(n + 1) \quad [\text{dengan memfaktorkan}] \\ &= (n + 1)^2 \quad [\text{definisi } (n + 1)^2]. \end{aligned}$$

Karena penalaran kita pada masing-masing langkah tidak bergantung pada n yang merupakan setiap bilangan bulat khusus, kita menyimpulkan bahwa “ $\forall n$, $q(n)$ ” benar. Kini kita telah membuktikan pernyataan umum “ $\forall n$, $q(n)$,” kita dapat menggunakannya untuk setiap kasus khusus. Jadi, kita mengetahui bahwa

$$g(124, 125) = 125^2$$

tanpa melakukan setiap komputasi. Ini merupakan suatu contoh **penalaran deduktif**: *menggunakan suatu prinsip umum kepada suatu situasi khusus*. Sebagian besar bukti yang dihadapi dalam matematika berdasarkan pada tipe penalaran ini.

CONTOH 3.3: Dalam cara apa penalaran deduktif digunakan untuk membuktikan $\forall n$, $q(n)$?

Solusi:

Aturan umum tentang memfaktorkan polynomial digunakan untuk polynomial khusus $n^2 + n + (n + 1)$.

Sebagian besar tipe biasa dari teorema matematis dapat disimbolisasikan sebagai $p \rightarrow q$, di mana p dan q adalah pernyataan majemuk. Untuk

menyatakan bahwa $p \rightarrow q$ adalah suatu teorema adalah dengan mengklaim bahwa $p \rightarrow q$ adalah suatu *tautology*; yaitu, selalu benar. Dari Bagian 1 kita mengetahui bahwa $p \rightarrow q$ benar *kecuali kalau* p adalah benar dan q adalah salah. Sehingga untuk membuktikan bahwa p mengakibatkan q kita tunjukkan bahwa apabila p adalah benar q juga harus benar. Apabila suatu implikasi $p \rightarrow q$ diidentifikasi sebagai suatu teorema, biasanya p sebagai *hipotesis* dan q sebagai *konklusi*.

Konstruksi dari suatu implikasi $p \rightarrow q$ dapat merupakan gagasan membangun suatu jembatan pernyataan logis untuk menghubungkan hipotesis p dengan konklusi q . Untuk membangun blok ke dalam jembatan memuat lima jenis pernyataan: *asumsi atau aksioma atau postulat, definisi, teorema, corollary*, dan *lemma*. Asumsi atau aksioma atau postulat dan definisi diakui benar; teorema sebelumnya ditetapkan benar. Demikian juga corollary dan lemma. Tentu, jika secara aktual membangun jembatannya tidak semua merupakan blok yang jelas untuk menggunakan atau dalam urutan apa, bagaimana, dan mengapa menggunakannya. Ini memerlukan pengalaman; sabar, teliti, tekun, intuisi, dan penalaran.

Dalam membangun suatu jembatan dari hipotesis p ke konklusi q , sering berguna untuk memulai, selama, dan akhir dari suatu proses pengerjaan. Yakni, dimulai dengan pertanyaan: “*Apa yang harus Saya ketahui untuk menyimpulkan bahwa q adalah benar?*” Sebut Ini q_1 . Kemudian bertanya: “*Apa yang harus Saya ketahui untuk Menyimpulkan bahwa q_1 benar?*” Sebut ini q_2 . Secara kontinu proses ini dilakukan selama produktif, sehingga memperoleh suatu barisan implikasi

$$\dots q_2 \rightarrow q_1 \rightarrow q.$$

Kemudian lihat pada hipotesis p dan bertanya, “*Apa yang dapat Saya simpulkan dari p yang berperan terhadap q ?*” Sebut ini p_1 . Kemudian bertanya: “*Apa yang dapat Saya simpulkan dari p_1 ?*” secara kontinu proses ini dilakukan selama produktif, sehingga diperoleh

$$p \rightarrow p_1 \rightarrow p_2 \rightarrow \dots$$

Harapannya, tentu pada suatu pengertian bagian dari jembatan membiarkan p dapat berhubungan dengan bagian yang kembali pada q , membentuk suatu rentangan lengkap:

$$p \rightarrow p_1 \rightarrow p_2 \rightarrow \dots \rightarrow q_2 \rightarrow q_1 \rightarrow q.$$

CONTOH 3.4: Kita kembali kepada hasil yang dibuktikan dalam CONTOH 3.2 untuk ilustrasi proses yang baru saja digambarkan. Kita mulai dengan menulis teorema itu dalam bentuk " $p \rightarrow q$." Salah satu cara melakukan ini adalah sebagai berikut:

"Jika $g(n, m) = n^2 + n + m$, maka $g(n, n + 1) = (n + 1)^2$."

Secara simbolis, kita identifikasi hipotesis

$$p: g(n, m) = n^2 + n + m$$

dan konklusi

$$q: g(n, n + 1) = (n + 1)^2.$$

CONTOH 3.5: Dalam menanyakan pernyataan apa yang mengakibatkan q , ada tentu banyak jawaban. Salah satu jawaban sederhana adalah dengan menggunakan definisi dari suatu kuadrat dan misalkan

$$q_1: g(n, n + 1) = (n + 1)(n + 1)$$

dengan mengalikan hasil kali $(n + 1)(n + 1)$, diperoleh

$$q_2: g(n, n + 1) = n^2 + 2n + 1.$$

Kini tentu $q_2 \rightarrow q_1 \rightarrow q$, tetapi tidak jelas bagaimana kita dapat kembali selanjutnya. Sehingga kita kembali ke hipotesis p dan bertanya apa yang dapat kita simpulkan. Karena kita ingin untuk mengetahui sesuatu tentang $g(n, n + 1)$, langkah pertama adalah

dengan menggunakan definisi dari g . Yakni, misalkan

$$p_1: g(n, n + 1) = n^2 + n + (n + 1).$$

Ini jelas bahwa $p_1 \rightarrow q_2$, sehingga jembatan lengkap, dan kini berbentuk:

$$p \rightarrow p_1 \rightarrow q_2 \rightarrow q_1 \rightarrow q.$$

Ini secara esensial merupakan apa yang tertulis dalam
CONTOH 3.2.

Berkaitan dengan suatu implikasi $p \rightarrow q$ ada suatu implikasi $\sim q \rightarrow \sim p$, disebut **kontrapositif**. Ini mudah dilihat menggunakan suatu tabel kebenaran bahwa suatu implikasi dan kontrapositifnya adalah ekuivalen secara logis. Jadi, salah satu cara membuktikan suatu implikasi adalah dengan kontrapositifnya.

CONTOH 3.6: (a) Gunakan suatu tabel kebenaran untuk membuktikan bahwa $p \rightarrow q$ dan $\sim q \rightarrow \sim p$ adalah ekuivalen secara logis. Diserahkan kepada pembaca sebagai latihan.

(b) Apakah $p \rightarrow q$ ekuivalen secara logis $q \rightarrow p$?

Solusi:

(b) $p \rightarrow q$ tidak ekuivalen secara logis dengan $q \rightarrow p$.

Bentuk $q \rightarrow p$ disebut **konvers** dari $p \rightarrow q$ atau

sebaliknya $p \rightarrow q$ disebut **konvers** dari $q \rightarrow p$.

CONTOH 3.7: Kontrapositif dari teorema “Jika $7m$ adalah suatu bilangan ganjil, maka m adalah suatu bilangan ganjil” adalah “Jika m adalah bukan suatu bilangan ganjil, maka $7m$ adalah bukan suatu bilangan ganjil” atau secara ekuivalen, “Jika m adalah suatu bilangan genap, maka $7m$ adalah suatu bilangan genap.” (Ingat bahwa suatu bilangan m adalah genap jika dapat

ditulis sebagai $2k$ untuk suatu bilangan bulat k . Jika suatu bilangan adalah tidak genap maka ia ganjil. Ini untuk dimengerti di sini bahwa kita berbicara tentang bilangan bulat.) Menggunakan *kontrapositif*, kita dapat konstruksu suatu bukti dari teorema itu sebagai berikut:

Hipotesis: m adalah suatu bilangan genap.

$2m = 2k$ untuk suatu bilangan bulat k [definisi]

$$7m = 7(2k) \quad [sifat perkalian diketahui]$$

$$7m = 2(7k) \quad [sifat perkalian diketahui]$$

$7k$ adalah suatu bilangan bulat [karena k suatu bilangan bulat].

Konklusi: $7m$ adalah suatu bilangan genap [karena $7m$ adalah 2 kali bilangan bulat $7k$]

Ini sangat mudah daripada mencoba untuk menunjukkan secara langsung bahwa $7m$ adalah ganjil mengakibatkan m ganjil.

CONTOH 3.8: Tulis kontrapositif dari masing-masing implikasi sebagai berikut.

- (a) Jika n adalah suatu bilangan bulat, maka $2n$ adalah suatu bilangan genap.
- (b) Kontinuitas adalah suatu kondisi perlu untuk diferensibilitas.

Solusi:

- (a) Jika $2n$ adalah suatu bilangan ganjil, maka n adalah bukan suatu bilangan bulat.
- (b) Jika suatu fungsi adalah tidak kontinu, maka tidak diferensiabel.

Dalam CONTOH 3.6 (b) kita melihat bahwa $p \rightarrow q$ adalah tidak ekuivalen secara logis dengan $q \rightarrow p$ yang disebut *konvers* dari $p \rightarrow q$. Ini memungkinkan untuk suatu implikasi adalah salah, sedangkan konversnya benar. Jadi, kita tidak dapat membuktikan $p \rightarrow q$ dengan menunjukkan $q \rightarrow p$.

CONTOH 3.9: Implikasi “Jika $m^2 > 0$, maka $m > 0$ adalah salah, tetapi **konversnya** “Jika $m > 0$, maka $m^2 > 0$ “ adalah benar.

CONTOH 3.10: Tulis konvers dari masing-masing implikasi dalam CONTOH 3.8.

Solusi:

(a) Jika $2n$ adalah suatu bilangan genap, maka n adalah suatu bilangan bulat.

(b) Jika suatu fungsi adalah kontinu, maka diferensiabel.

Implikasi lain yang dengan teliti berkaitan dengan $p \rightarrow q$ adalah *invers* $\sim p \rightarrow \sim q$. Implikasi invers adalah tidak ekuivalen secara logis dengan $p \rightarrow q$, tetapi ekuivalen secara logis dengan konves. Kenyataan, *invers* adalah *kontrapositif* dari konvers.

CONTOH 3.11: Gunakan suatu tabel kebenaran untuk menunjukkan bahwa invers dan konvers dari $p \rightarrow q$ adalah ekuivalen secara logis.

Diserahkan kepada pembaca sebagai latihan.

Melihat pada bentuk kontrapositif dari suatu implikasi merupakan suatu alat berguna dalam membuktikan teorema. Karena ini merupakan suatu sifat dari struktur logis dan tidak bergantung pada materi pelajaran, yang dapat digunakan dalam setiap setting yang meliputi suatu implikasi. Ada banyak lagi tautology

yang dapat digunakan dalam cara yang sama. Beberapa di antaranya disajikan dalam CONTOH 3.12.

CONTOH 3.12: Tautology berikut berguna dalam mengonstruksi bukti. Dua pertama menyatakan, misalnya, bahwa suatu teorema “jika dan hanya jika” $p \leftrightarrow q$ dapat dibuktikan dengan menentukan $p \rightarrow q$ dan *konversnya* $q \rightarrow p$, menunjukkan $p \rightarrow q$ dan *inversnya* $\sim p \rightarrow \sim q$. Huruf c digunakan untuk menyatakan suatu pernyataan yang selalu salah. Pernyataan seperti ini disebut suatu **kontradiksi**. Sedangkan daftar tautology ini tidak perlu dihafalkan, ini dapat berguna jika masing-masing tautology dipelajari dengan hati-hati untuk melihat apakah tepat mengatakannya.

$$(a) (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$$

$$(b) (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (\sim p \rightarrow \sim q)]$$

$$(c) (p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$$

$$(d) p \vee \sim p$$

$$(e) (p \wedge \sim p) \leftrightarrow c$$

$$(f) (\sim p \rightarrow c) \leftrightarrow p$$

$$(g) [(p \wedge \sim q) \rightarrow c] \leftrightarrow (p \rightarrow q)$$

$$(h) [p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$$

$$(i) [\sim q \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow \sim p$$

$$(j) [\sim p \wedge (p \vee q)] \rightarrow q$$

$$(k) (p \wedge q) \rightarrow p$$

$$(l) [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$$

$$(m) [(p_1 \rightarrow p_2) \wedge (p_2 \rightarrow p_3) \wedge \dots \wedge (p_{n-1} \rightarrow p_n)] \rightarrow (p_1 \rightarrow p_n)$$

$$(n) [(p \wedge q) \rightarrow r] \leftrightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$$

$$(o) [(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge (p \vee r)] \rightarrow (q \vee s)$$

$$(p) [p \rightarrow (q \vee r)] \leftrightarrow [(p \wedge \sim q) \rightarrow r]$$

$$(q) [(p \rightarrow r) \wedge (q \vee r)] \leftrightarrow [(p \vee q) \rightarrow r]$$

LATIHAN 3

1. Tulis kontrapositif dari masing-masing implikasi.
 - (a) Jika bunga mawar adalah merah, maka bunga violet biru.
 - (b) H adalah normal jika H tidak regular.
 - (c) Jika K tertutup dan terbatas, maka K adalah kompak.
2. Tulis invers dari soal nomor 1.
3. Tentukan suatu contoh tandingan dari masing-masing pernyataan.
 - (a) Untuk setiap bilangan real x , jika $x^2 > 4$ maka $x > 2$.
 - (b) Untuk setiap bilangan bulat positif n , $n^2 + n + 41$ adalah prim.
 - (c) Setiap segitiga adalah suatu segitiga siku-siku.]
4. Misalkan f adalah fungsi dengan $f(x) = 3x - 5$. Gunakan implikasi kontrapositif untuk membuktikan: Jika $x_1 \neq x_2$, maka $f(x_1) \neq f(x_2)$.
5. Dalam masing-masing bagian, suatu daftar hipotesis diberikan. Dengan menggunakan tautology dari CONTOH 3.12 anda menentukan konklusi

yang diinginkan. Tentukan tautology mana yang anda gunakan untuk menjustifikasi masing-masing langkah.

(a) *Hipotesis:* $r \rightarrow \sim s, t \rightarrow s$

Konklusi: $r \rightarrow \sim t$

(b) *Hipotesis:* $r, \sim t, (r \wedge s) \rightarrow t$

Konklusi: $\sim s$

(c) *Hipotesis:* $r \rightarrow \sim s, t \rightarrow u, s \vee t$

Konklusi: $r \vee u$