

PENDAHULUAN

Drs. C. Jacob, M.Pd

Email: cjacob@upi.edu

1.1 Pengantar Umum

Untuk mengerti matematika tertulis, kita harus mengerti apa yang membuat suatu argumen matematis benar, yaitu, suatu bukti. Untuk pelajaran matematika, seseorang perlu untuk mengonstruksi argumen matematis dan sesungguhnya belum membaca penjelasan rinci. Hal ini jelas wajib mengerti suatu teknik yang digunakan untuk mengonstruksi bukti. Tujuan penulisan ini adalah untuk mengajar apa yang membuat suatu argumen matematis benar, dan untuk memberikan siswa alat yang diperlukan untuk mengonstruksi argumen ini.

Banyak pernyataan matematis menuntut suatu sifat benar untuk semua bilangan bulat positif. Contoh pernyataan seperti itu adalah untuk setiap bilangan bulat positif n : $n! < n^n$, $n^3 - n$ dapat dibagi dengan 3; dan jumlah dari n bilangan bulat positif pertama adalah $\frac{n(n+1)}{2}$. Tujuan utama penulisan ini adalah untuk memberikan siswa mengerti induksi matematis dengan teliti atau cermat, yang digunakan untuk bukti hasil jenis ini.

Kita telah mengetahui bersama bahwa untuk menyatakan himpunan, barisan, dan fungsi adalah secara eksplisit. Yakni, kita menggambarkan himpunan dengan mendaftarkan elemen-elemennya atau dengan memberikan suatu sifat yang mengklasifikasikan elemen-elemen ini. Kita memberikan formula untuk suku-suku barisan dan nilai fungsi. Ada cara penting lain untuk menyatakan objek-objek, yang didasarkan pada induksi matematis. Untuk menyatakan barisan dan fungsi, ada suku awal yang ditentukan, dan suatu aturan untuk menentukan nilai berikutnya dari nilai yang telah diketahui. Misalnya, kita dapat menentukan barisan $\{2^n\}$ dengan menentukan $a_1 = 2$ dan $a_{n+1} = 2a_n$ untuk $n = 1, 2, 3, \dots$

Himpunan dapat dinyatakan dengan mendaftarkan beberapa elemennya dan memberikan aturan untuk mengonstruksi elemen-elemen yang telah diketahui ini menjadi himpunan. Sehingga definisi “**definisi rekursif**” (“**recursive definition**”), digunakan dalam semua matematika diskret dan sains komputer.

Apabila suatu prosedur ditentukan untuk menyelesaikan suatu masalah, prosedur ini selalu menyelesaikan masalah secara benar. Namun, masih menguji dengan melihat bahwa hasil itu benar diperoleh dengan suatu himpunan nilai masukan (input) yang tidak menunjukkan prosedur yang selalu bekerja secara benar. Kebenaran dari suatu prosedur dapat dijamin hanya dengan membuktikan bahwa kebenaran selalu menghasilkan hasil yang benar. Bagian terakhir memuat suatu pengantar kepada teknik verifikasi program. Teknik verifikasi program adalah suatu teknik formal untuk menguji prosedur adalah benar. Verifikasi program disajikan sebagai basis untuk usaha langsung kepada bukti dalam suatu tampilan mekanik bahwa program benar.

METODE BUKTI

Drs. C. Jacob, M.Pd

Email: cjacob@upi.edu

2.1 Pengantar

Dua pertanyaan penting yang muncul dalam studi matematika adalah: (1) kapan suatu argumen matematis benar? (2) metode apa yang digunakan untuk mengonstruksi argumen matematis? Bagian ini membantu menjawab pertanyaan ini dengan menggambarkan berbagai bentuk; argumen matematis benar dan tidak benar.

Teorema adalah suatu pernyataan yang dapat ditunjukkan benar. Kita mendemonstrasikan bahwa suatu teorema benar terhadap suatu barisan pernyataan yang membentuk suatu argumen, yang disebut “**bukti.**” Untuk mengonstruksi bukti, diperlukan metode untuk menurunkan pernyataan baru dari salah satu pernyataan sebelumnya. Pernyataan yang digunakan dalam suatu bukti dapat meliputi “**aksioma**” atau “**postulat,**” yang merupakan asumsi utama tentang struktur matematis, hipotesis dari teorema yang dibuktikan, dan teorema yang dibuktikan sebelumnya. **Aturan inferensi,** bermakna digunakan untuk menggambarkan konklusi dari pernyataan tegas lainnya, bersama-sama langkah-langkah dari suatu bukti.

Dalam bagian ini, aturan inferensi akan didiskusikan. Aturan inferensi ini akan membantu menjelaskan apa yang membuat bukti benar. Ada bentuk biasa dari penalaran tidak benar, yang disebut “**kesesatan**” (“**fallacies**”) juga akan digambarkan. Selanjutnya, berbagai metode yang biasanya digunakan untuk membuktikan teorema yang akan diperkenalkan.

Istilah “**lemma**” dan “**corollary**” digunakan untuk tipe teorema tertentu. Suatu **lemma** (jamak **lemmas** atau **lemmata**) adalah suatu teorema sederhana yang digunakan dalam bukti teorema lainnya. Bukti rumit biasanya mudah dimengerti apabila dibuktikan dengan menggunakan sederetan lemma, di mana masing-masing lemma dibuktikan secara sendiri-sendiri. Suatu

“**corollary**” adalah suatu proposisi yang dapat ditentukan secara langsung dari suatu teorema yang telah dibuktikan.

2.2 Aturan Inferensi

Tautology $[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$ merupakan basis dari aturan inferensi yang disebut “**modus ponens,**” atau “**hukum detachmen**” (“**law of detachment**”). Tautology ini ditulis dalam cara berikut:

$$\begin{array}{l} p \\ p \rightarrow q \\ \hline \therefore q \end{array}$$

Menggunakan notasi ini, hipotesis ditulis dalam suatu kolom dan konklusi di bawah suatu bar. (Simbol \therefore menyatakan “**jadi**”). Modus ponens menyatakan bahwa jika kedua implikasi dan hipotesisnya diketahui benar, maka konklusi dari implikasi ini benar.

CONTOH 1 Andaikan bahwa implikasi “jika hari ini turun hujan salju, maka kita akan pergi main tennis” dan hipotesisnya, “hari ini turun hujan salju,” adalah benar. Maka, dengan modus ponens, mengikuti konklusi dari implikasi, “kita akan pergi main tennis,” adalah benar. ■

CONTOH 2 Implikasi “jika n dapat dibagi dengan 3, maka n^2 dapat dibagi dengan 9,” adalah benar. Konsekuensinya, jika n dapat dibagi dengan 3, maka dengan modus ponens, n^2 dapat dibagi dengan 9. ■

Tabel 1 menyajikan beberapa aturan inferensi penting. Verifikasi aturan inferensi ini dapat ditentukan sebagai latihan. Di sini beberapa contoh argumen menggunakan aturan inferensi ini.

CONTOH 3 Tentukan aturan inferensi manakah yang merupakan basis argumen berikut: “di bawah sangat dingin sekarang. Jadi, ini terjadi salah satu; di bawah sangat dingin **atau** sekarang hujan.”

Solusi: Misalkan p adalah proposisi “Di bawah sangat dingin sekarang” dan q adalah proposisi “Sekarang hujan.” Maka argumen ini berbentuk:

$$\frac{p}{\therefore p \vee q}$$

Argumen ini menggunakan **aturan tambahan (addition rule)**. ■

Tabel 1: Aturan Inferensi		
Aturan Referensi	Tautology	Nama
$\frac{p}{\therefore p \vee q}$	$p \rightarrow (p \vee q)$	Addition
$\frac{p \wedge q}{\therefore p}$	$(p \wedge q) \rightarrow p$	Simplification
$\frac{p \quad p \rightarrow q}{\therefore q}$	$[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$	Modus Ponens
$\frac{\neg q \quad p \rightarrow q}{\therefore \neg p}$	$[\neg q \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow \neg p$	Modus Tollens
$\frac{p \rightarrow q \quad q \rightarrow r}{\therefore p \rightarrow r}$	$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$	Hypothetical Syllogism
$\frac{p \vee q \quad \neg p}{\therefore q}$	$[(p \vee q) \wedge \neg p] \rightarrow q$	Disjunctive Syllogism

CONTOH 4 Tentukan aturan inferensi manakah yang merupakan basis dari argumen berikut: “Di bawah sangat dingin dan hujan sekarang. Jadi, di bawah sangat dingin sekarang.”

Solusi: Misalkan p adalah proposisi “Di bawah sangat dingin sekarang,” dan q adalah proposisi “Kini hujan.” Argumen ini berbentuk :

$$\frac{p \wedge q}{\therefore p}$$

Argumen ini menggunakan “simplification rule.” ■

CONTOH 5 Tentukan aturan inferensi manakah yang digunakan dalam argumen: Jika hujan hari ini, maka kita tidak dapat bertamasya. Jika kita tidak dapat bertamasya hari ini, maka kita akan bertamasya besok. Jadi, jika hujan hari ini, maka kita akan bertamasya besok.

Solusi: Misalkan p adalah proposisi “hujan hari ini,” misalkan q adalah proposisi “Kita tidak dapat bertamasya hari ini,” dan misalkan r adalah proposisi “Kita akan bertamasya besok.” Maka argumen ini berbentuk:

$$\frac{p \rightarrow q}{q \rightarrow r} \\ \therefore p \rightarrow r$$

Sehingga argumen ini adalah suatu “Hypothetical Syllogism.” ■

Suatu argumen yang dibangun menggunakan aturan inferensi dikatakan “valid.” Apabila semua proposisi digunakan dalam suatu argumen valid adalah benar, ia berperan untuk suatu konklusi benar. Bagaimanapun, suatu argumen valid dapat berperan untuk

suatu konklusi tidak benar jika satu atau lebih proposisi salah digunakan dalam argumen itu. Misalnya, “jika 101 dapat dibagi dengan 3, maka 101^2 dapat dibagi dengan 9. 101 dapat dibagi dengan 3. akibatnya, 101^2 dapat dibagi dengan 9” adalah suatu argumen valid didasarkan pada modus ponens. Bagaimanapun, konklusi dari argumen ini salah, karena 9 tidak membagi $101^2 = 10.201$. Proposisi salah “101 dapat dibagi dengan 3” digunakan dalam argumen, yang berarti konklusi dari argumen dapat salah.

2.3 Kesesatan (Fallacies)

Ada berbagai kesesatan biasanya muncul dalam argumen tidak benar. Kesesatan ini mirip dengan aturan inferensi tetapi didasarkan pada kontingensi dari pada tautology. Ini didiskusikan di sini untuk menunjukkan perbedaan antara penalaran benar dan tidak benar.

Proposisi $[(p \rightarrow q) \wedge q] \rightarrow p$ adalah bukan suatu tautology karena proposisi salah apabila p salah dan q benar. Bagaimanapun, ada banyak argumen tidak benar yang diperlakukan ini sebagai suatu tautology. Tipe penalaran yang tidak benar ini disebut: **“kesesatan mengesahkan konklusi” (fallacy of affirming the conclusion)**.

CONTOH 6 Apakah argumen berikut valid?

Jika anda menyelesaikan setiap masalah dalam buku ini, maka anda akan belajar matematika diskret. Anda belajar matematika diskret. Jadi, anda dapat menyelesaikan setiap masalah dalam buku ini.

Solusi: Misalkan p adalah proposisi “Anda menyelesaikan setiap masalah dalam buku ini.” Misalkan q adalah proposisi” Anda belajar matematika diskret.” Maka argumen ini berbentuk: jika $p \rightarrow q$ dan q, maka p. Ini merupakan suatu contoh dari argumen tidak benar yang menggunakan kesesatan mengesahkan konklusi.

Malahan, ini memungkinkan anda belajar matematika diskret dalam beberapa cara lain daripada dengan menyelesaikan setiap masalah dalam buku ini. (Anda dapat belajar matematika diskret dengan membaca, mendengarkan kuliah, menyelesaikan beberapa masalah tetapi bukan semua masalah dalam buku ini, dan seterusnya). ■

CONTOH 7 Misalkan p adalah proposisi " $n \equiv 1 \pmod{3}$," dan misalkan q adalah proposisi " $n^2 \equiv 1 \pmod{3}$." Implikasi $p \rightarrow q$, yang adalah "jika $n \equiv 1 \pmod{3}$, maka $n^2 \equiv 1 \pmod{3}$," adalah benar. Jika q benar, sedemikian sehingga $n^2 \equiv 1 \pmod{3}$, apakah p benar, yaitu, $n \equiv 1 \pmod{3}$?

Solusi: Ini tidak benar untuk menyimpulkan bahwa p benar, karena ini memungkinkan $n \equiv 2 \pmod{3}$. Jika konklusi tidak benar bahwa p benar dibuat, ini akan merupakan suatu contoh dari kesesatan mengesahkan konklusi. ■

Proposisi $[(p \rightarrow q) \wedge \neg p] \rightarrow \neg q$ adalah bukan tautology, karena proposisi salah apabila p salah dan q benar. Ada banyak argumen tidak benar yang menggunakan ini secara tidak benar sebagai suatu aturan inferensi. Tipe penalaran tidak benar ini disebut "**kesesatan menyangkal hipotesis**" ("**fallacy of denying the hypothesis**").

CONTOH 8 Misalkan p dan q seperti dalam Contoh 6. jika implikasi $p \rightarrow q$ benar, dan $\neg p$ benar, apakah ini benar untuk menyimpulkan bahwa $\neg q$ benar? Dengan kata lain, apakah proposisi benar dengan mengasumsikan bahwa anda tidak belajar matematika diskret jika anda tidak menyelesaikan setiap masalah dalam buku

ini, mengasumsikan bahwa jika anda menyelesaikan setiap masalah dalam buku ini, maka anda belajar matematika diskret?

Solusi: Ini memungkinkan anda belajar matematika diskret lengkap jika anda tidak menyelesaikan setiap masalah dalam buku ini. Argumen tidak benar ini berbentuk $p \rightarrow q$ dan $\neg p$ mengakibatkan $\neg q$, yang merupakan suatu contoh kesesatan menyangkal hipotesis. ■

CONTOH 9 Misalkan p dan q adalah seperti dalam Contoh 7. Apakah benar untuk mengasumsikan bahwa jika $\neg p$ benar, maka $\neg q$ benar menggunakan fakta bahwa $p \rightarrow q$ benar? Dengan kata lain, apakah ini benar untuk menyimpulkan bahwa $n^2 \not\equiv 1 \pmod{3}$ jika $n \not\equiv 1 \pmod{3}$, menggunakan implikasi: jika $n \equiv 1 \pmod{3}$, maka $n^2 \equiv 1 \pmod{3}$?

Solusi: Ini tidak benar untuk menyimpulkan bahwa $n^2 \not\equiv 1 \pmod{3}$ jika $n \not\equiv 1 \pmod{3}$, karena $n^2 \equiv 1 \pmod{3}$ apabila $n \equiv 2 \pmod{3}$. Argumen tidak benar ini merupakan contoh lain dari kesesatan menyangkal hipotesis. ■

Banyak argumen tidak benar didasarkan pada suatu kesesatan yang disebut **“tidak menggunakan pertanyaan”** (**“begging the question”**). Kesesatan ini terjadi apabila satu atau lebih langkah suatu bukti yang didasarkan pada kebenaran pernyataan yang dibuktikan. Dengan kata lain, kesesatan ini muncul apabila suatu pernyataan dibuktikan menggunakan dirinya sendiri, atau suatu pernyataan yang ekuivalen dengan pernyataan tersebut. Itulah sebabnya kesesatan ini juga disebut **“penalaran sirkular”** (**“circular reasoning”**).

CONTOH 10 Apakah argumen berikut benar? Ini menurut dugaan menunjukkan bahwa n adalah suatu bilangan bulat genap apabila n^2 adalah suatu bilangan bulat genap.

Andaikan bahwa n^2 adalah genap. Maka $n^2 = 2k$ untuk suatu bilangan bulat k . Misalkan $n = 2\ell$ untuk suatu bilangan bulat ℓ . Ini menunjukkan bahwa n genap.

Solusi: Argumen ini tidak benar. Pernyataan “misalkan $n = 2\ell$ untuk suatu bilangan bulat ℓ ” terjadi dalam bukti. Bukan argumen diberikan untuk menunjukkan bahwa pernyataan benar. Ini merupakan **penalaran sirkular** karena pernyataan ini ekuivalen dengan pernyataan yang dibuktikan, yaitu, “ n genap.” Tentu, hasil dirinya-sendiri benar; hanya metode bukti salah. ■

2.4 Metode Pembuktian Teorema

Kita membuktikan berbagai teorema sebelum seksi ini. Kini marilah kita lebih eksplisit tentang metodologi mengonstruksi bukti. Kita akan menggambarkan bagaimana tipe pernyataan berbeda dibuktikan.

Karena banyak teorema adalah implikasi, teknik untuk membuktikan implikasi adalah penting. Sebut, $p \rightarrow q$ benar tanpa p benar tetapi q salah. Ingat bahwa apabila pernyataan $p \rightarrow q$ dibuktikan, ini hanya perlu menunjukkan bahwa q benar jika p benar; ini biasanya tidak merupakan kasus bahwa q dibuktikan benar. Kita akan memberikan sebagian besar teknik biasa untuk membuktikan implikasi dalam diskusi berikut.

Andaikan bahwa hipotesis p dari suatu implikasi $p \rightarrow q$ salah. Maka implikasi $p \rightarrow q$ benar, karena pernyataan yang berbentuk $S \rightarrow B$ atau $S \rightarrow S$, dan oleh sebab itu benar. Akibatnya, jika ini dapat ditunjukkan bahwa p salah, maka suatu bukti, disebut “**bukti kosong**” (“**vacuous proof**”), dari

implikasi $p \rightarrow q$ dapat diberikan. Bukti kosong sering digunakan untuk memperlihatkan kasus teorema khusus yang menyatakan bahwa suatu implikasi benar untuk semua bilangan bulat positif (misal, suatu teorema dari jenis $\forall n P(n)$ di mana $P(n)$ adalah suatu fungsi proposisional). Teknik bukti untuk teorema dari jenis ini akan didiskusikan dalam seksi induksi matematis.

CONTOH 11 Tunjukkan bahwa proposisi $P(0)$ benar di mana $P(n)$ adalah fungsi proposisional “jika $n > 1$, maka $n^2 > n$.”

Solusi: Ingat bahwa proposisi $P(0)$ adalah implikasi “Jika $0 > 1$, maka $0^2 > 0$.” Karena hipotesis $0 > 1$ salah, implikasi $P(0)$ secara otomatis benar.

Perhatian: Fakta bahwa konklusi dari implikasi ini, $0^2 > 1$ salah tidak relevan dengan nilai kebenaran implikasi, karena suatu implikasi dengan suatu hipotesis salah dijamin benar. ■

Andaikan bahwa konklusi q dari suatu implikasi $p \rightarrow q$ benar. Maka $p \rightarrow q$ benar, karena pernyataan memiliki bentuk $B \rightarrow B$ atau $S \rightarrow B$, yang adalah benar. Sehingga, jika ini dapat ditunjukkan bahwa q benar, maka suatu bukti, disebut “**bukti trivial**” (“**trivial proof**”), dari $p \rightarrow q$ dapat diberikan. Bukti trivial sering penting apabila kasus teorema khusus dibuktikan (lihat diskusi bukti dengan kasus) dan dalam induksi matematis, yang merupakan suatu teknik bukti yang didiskusikan dalam seksi induksi matematis.

CONTOH 12 Misalkan $P(n)$ adalah proposisi “Jika a dan b adalah bilangan bulat positif dengan $a \geq b$, maka $a^n \geq b^n$.” Tunjukkan bahwa proposisi $P(0)$ benar.

Solusi: Proposisi $P(0)$ adalah “Jika $a \geq b$, maka $a^0 \geq b^0$.” Karena $a^0 = b^0 = 1$, konklusi $P(0)$ benar. Sehingga $P(0)$ benar. Ini merupakan suatu contoh dari bukti trivial. Ingat bahwa hipotesis, yang merupakan pernyataan “ $a \geq b$,” tidak diperlukan dalam bukti ini. ■

Implikasi $p \rightarrow q$ dapat dibuktikan dengan menunjukkan bahwa jika p benar, maka q juga harus benar. Ini menunjukkan bahwa kombinasi p benar dan q salah tidak pernah terjadi. Suatu bukti dari jenis ini disebut “**bukti langsung**” (“**direct proof**”). Untuk melaksanakan suatu bukti, asumsikan bahwa p benar dan menggunakan aturan inferensi dan teorema yang telah dibuktikan untuk menunjukkan bahwa q juga harus benar.

CONTOH 13 Berikan suatu bukti langsung dari teorema “Jika n gasal, maka n^2 gasal.”

Solusi: Asumsikan bahwa hipotesis dari implikasi ini benar, yaitu, andaikan bahwa n gasal. Maka $n = 2\bar{k} + 1$, di mana \bar{k} adalah suatu bilangan bulat. Sehingga $n^2 = (2\bar{k} + 1)^2 = 4\bar{k}^2 + 4\bar{k} + 1 = 2(2\bar{k}^2 + 2\bar{k}) + 1$. Jadi, n^2 gasal (1 lebih dari dua kali suatu bilangan bulat). ■

Karena implikasi $p \rightarrow q$ ekuivalen dengan kontrapositifnya, $\neg q \rightarrow \neg p$, implikasi $p \rightarrow q$ dapat dibuktikan dengan menunjukkan bahwa kontrapositifnya, $\neg q \rightarrow \neg p$ benar. Hubungan implikasi ini biasanya dibuktikan secara langsung, tetapi setiap teknik bukti dapat digunakan. Suatu argumen dari tipe ini disebut “**bukti tak langsung**” (“**indirect proof**”).

CONTOH 14 Berikan suatu bukti tak langsung dari teorema “Jika $3n + 2$ ganjil, maka n ganjil.”

Solusi: Asumsikan bahwa konklusi dari implikasi ini salah; yaitu asumsikan bahwa n genap. Maka $n = 2k$ untuk suatu bilangan bulat k . Sehingga, $3n + 2 = 3(2k) + 2 = 6k + 2 = 2(3k + 1)$, sedemikian hingga $3n + 2$ genap, (karena merupakan kelipatan 2). Sehingga negasi dari konklusi implikasi mengakibatkan hipotesis salah, implikasi asli benar. ■

Andaikan bahwa suatu kontradiksi q dapat ditentukan sedemikian hingga $\neg p \rightarrow q$ benar, yaitu, $\neg p \rightarrow S$ benar. Maka proposisi $\neg p$ harus salah. Akibatnya, p harus benar. Teknik ini dapat digunakan apabila suatu kontradiksi, seperti $r \wedge \neg r$, dapat ditentukan sedemikian hingga memungkinkan untuk menunjukkan bahwa implikasi $\neg p(r \wedge \neg r)$ benar. Suatu argumen dari tipe ini disebut “**bukti dengan kontradiksi**” (“**proof by contradiction**”).

CONTOH 15 Buktikan bahwa $\sqrt{2}$ irasional dengan memberikan suatu bukti dengan kontradiksi.

Solusi: Misalkan p proposisi: “ $\sqrt{2}$ irasional.” Andaikan bahwa $\neg p$ benar. Maka $\sqrt{2}$ rasional. Akan ditunjukkan bahwa ini berperan untuk suatu kontradiksi. Di bawah asumsi bahwa $\sqrt{2}$ adalah rasional, ada bilangan bulat a dan b dengan $\sqrt{2} = a/b$, di mana a dan b tidak memiliki faktor sekutu (sehingga pecahan a/b dalam istilah lemah). Karena $\sqrt{2} = a/b$, apabila kedua ruas dari persamaan ini dikuadratkan diperoleh sehingga, $2 = a^2/b^2$. Sehingga, $2b^2 = a^2$. Ini berarti a^2 genap, mengakibatkan a genap.

Selanjutnya karena a genap, $a = 2c$ untuk suatu bilangan bulat c .

$$\begin{aligned}\text{Sehingga} \quad 2b^2 &= 4c^2, \\ b^2 &= 2c^2.\end{aligned}$$

Ini berarti b^2 genap. Sehingga, b harus genap juga.

Ini menunjukkan bahwa $\neg p$ mengakibatkan $\sqrt{2} = a/b$, di mana a dan b tidak memiliki faktor sekutu, dan 2 membagi a dan b . Ini merupakan suatu kontradiksi. Sehingga $\neg p$ salah, dengan demikian p : “ $\sqrt{2}$ irasional” benar. ■

Suatu bukti tak langsung dari suatu implikasi dapat dituliskan kembali sebagai suatu bukti dengan kontradiksi. Dalam suatu bukti tak langsung kita menunjukkan bahwa $p \rightarrow q$ benar dengan menggunakan bukti langsung untuk menunjukkan bahwa $\neg q \rightarrow \neg p$ benar. Yakni dalam suatu bukti tak langsung dari $p \rightarrow q$ kita asumsikan bahwa $\neg q$ benar dan menunjukkan bahwa $\neg p$ juga harus benar. Untuk menuliskan kembali suatu bukti tak langsung dari $p \rightarrow q$ sebagai suatu bukti dengan kontradiksi, kita andaikan p dan $\neg q$ benar. Maka kita gunakan langkah dari bukti langsung $\neg q \rightarrow \neg p$ untuk menunjukkan bahwa $\neg p$ juga harus benar. Ini berperan untuk kontradiksi $p \wedge \neg p$, yang melengkapi bukti dengan kontradiksi. Contoh 16 mengilustrasikan bagaimana suatu bukti tak langsung dari suatu implikasi dapat dituliskan kembali sebagai suatu bukti dengan kontradiksi.

CONTOH 16 Berikan suatu bukti dengan kontradiksi dari teorema: “Jika $3n + 2$ gasal, maka n gasal.”

Solusi: Kita asumsikan bahwa $3n + 2$ gasal dan n tidak gasal, sedemikian hingga n genap. Mengikuti langkah yang sama seperti dalam solusi Contoh 14 (suatu bukti tak langsung dari teorema ini), kita dapat menunjukkan bahwa jika n genap, maka $3n + 2$ genap. Kontradiksi ini mengasumsikan bahwa $3n + 2$ gasal, yang melengkapi bukti. ■

Untuk bukti suatu implikasi dari bentuk

$$(p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n) \rightarrow q$$

tautology

$$[(p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n) \rightarrow q] \leftrightarrow [(p_1 \rightarrow q) \wedge (p_2 \rightarrow q) \wedge \dots \wedge (p_n \rightarrow q)]$$

dapat digunakan sebagai suatu aturan inferensi. Ini menunjukkan bahwa implikasi asli dengan suatu hipotesis membuat suatu disjungsi dari proposisi p_1, p_2, \dots, p_n dapat dibuktikan dengan membuktikan masing-masing dari n implikasi $p_i \rightarrow q$, $i = 1, 2, \dots, n$, secara sendiri-sendiri. Sehingga suatu argumen seperti itu disebut **“bukti dengan kasus”** (“**proof by cases**”). Kadang-kadang untuk bukti bahwa suatu implikasi $p \rightarrow q$ benar, ini cocok untuk menggunakan suatu disjungsi $p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n$ daripada p sebagai hipotesis dari implikasi, di mana p dan $p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n$ ekuivalen. Perhatikan contoh berikut.

CONTOH 17 Buktikan implikasi “Jika n suatu bilangan bulat yang tidak dapat dibagi dengan 3, maka $n^2 \equiv 1 \pmod{3}$.”

Solusi: Misalkan p adalah proposisi “ n tidak dapat dibagi dengan 3,” dan misalkan q adalah proposisi “ $n^2 \equiv 1 \pmod{3}$.” Maka p ekuivalen dengan $p_1 \vee p_2$, di mana p_1 adalah “ $n \equiv 1 \pmod{3}$ ” dan p_2 adalah “ $n \equiv 2 \pmod{3}$.” Sehingga, untuk menunjukkan bahwa $p \rightarrow q$ ini dapat menunjukkan bahwa $p_1 \rightarrow q$ dan $p_2 \rightarrow q$. Ini mudah untuk memberikan bukti langsung dari dua implikasi ini.

Pertama, andaikan p_1 benar. Maka $n \equiv 1 \pmod{3}$, sedemikian hingga $n = 3\bar{k} + 1$ untuk suatu bilangan bulat \bar{k} . Sehingga,

$$n^2 = 9\bar{k}^2 + 6\bar{k} + 1 = 3(3\bar{k}^2 + 2\bar{k}) + 1.$$

Menyusul $n^2 \equiv 1 \pmod{3}$. Sehingga, implikasi $p_1 \rightarrow q$ benar.

Berikut andaikan bahwa p_2 benar. Maka $n \equiv 2 \pmod{3}$, sedemikian sehingga $n = 3\bar{k} + 2$ untuk suatu bilangan bulat \bar{k} . Sehingga,

$$n^2 = 9\bar{k}^2 + 12\bar{k} + 4 = 3(3\bar{k}^2 + 4\bar{k} + 1) + 1.$$

Karena, $n^2 \equiv 1 \pmod{3}$, sehingga implikasi $p_2 \rightarrow q$ benar.

Sehingga ini menunjukkan bahwa $p_1 \rightarrow q$ dan $p_2 \rightarrow q$ benar, ini dapat disimpulkan bahwa $(p_1 \vee p_2) \rightarrow q$ benar. Selain itu, karena p ekuivalen dengan $p_1 \vee p_2$, akibatnya $p \rightarrow q$ benar. ■

Untuk bukti suatu teorema adalah suatu akuivalensi, yaitu, salah satu dari suatu pernyataan berbentuk $p \leftrightarrow q$ di mana p dan q proposisi, tautology

$$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$$

dapat digunakan. Yakni, proposisi “p jika dan hanya jika q” dapat dibuktikan jika implikasi “jika p, maka q” dan “jika q, maka p” dibuktikan.

CONTOH 18 Buktikan teorema “bilangan bulat n adalah gasal jika dan hanya jika n^2 gasal.”

Solusi: Teorema ini berbentuk “p jika dan hanya jika q,” di mana p adalah “n gasal “ dan q adalah “ n^2 gasal.” Untuk membuktikan teorema ini, kita perlu untuk menunjukkan bahwa $p \rightarrow q$ dan $q \rightarrow p$ benar.

Kita telah menunjukkan (dalam Contoh 13) bahwa $p \rightarrow q$ benar. Kita akan menggunakan suatu bukti tak langsung untuk membuktikan bahwa $q \rightarrow p$. Asumsikan bahwa konklusinya salah, yaitu, n genap. Maka $n = 2k$ untuk suatu bilangan bulat k . Maka $n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$, sehingga n^2 genap (karena ia merupakan suatu kelipatan 2). Ini melengkapi bukti tak langsung $q \rightarrow p$.

Sehingga kita telah menunjukkan bahwa $p \rightarrow q$ dan $q \rightarrow p$ benar, kita telah menunjukkan bahwa teorema itu benar. ■

Kadang-kadang suatu teorema menyatakan berbagai proposisi ekuivalen. Sehingga suatu teorema menyatakan proposisi $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ ekuivalen. Ini dapat ditulis sebagai

$$p_1 \leftrightarrow p_2 \leftrightarrow \dots \leftrightarrow p_n,$$

yang menyatakan bahwa semua n proposisi memiliki nilai kebenaran yang sama. Salah satu cara untuk bukti ekuivalen satu sama lain adalah menggunakan tautology

$$[p_1 \leftrightarrow p_2 \leftrightarrow \dots \leftrightarrow p_n] \leftrightarrow [(p_1 \rightarrow p_2) \wedge (p_2 \rightarrow p_3) \wedge \dots \wedge (p_n \rightarrow p_1)].$$

Ini menunjukkan bahwa jika implikasi $p_1 \rightarrow p_2, p_2 \rightarrow p_3, \dots, p_n \rightarrow p_1$ dapat ditunjukkan benar, maka proposisi p_1, p_2, \dots, p_n semuanya ekuivalen.

CONTOH 19 Buktikan bahwa apabila n adalah suatu bilangan bulat, tiga pernyataan berikut ekuivalen.

$$p_1: n \bmod 3 = 1 \text{ atau } n \bmod 3 = 2$$

$$p_2: n \text{ tidak dapat dibagi dengan } 3$$

$$p_3: n^2 \equiv 1 \pmod{3}$$

Solusi: untuk menunjukkan bahwa pernyataan-pernyataan itu ekuivalen, kita dapat buktikan bahwa implikasi $p_1 \rightarrow p_2, p_2 \rightarrow p_3$, dan $p_3 \rightarrow p_1$ benar.

Kita akan menggunakan bukti langsung untuk menunjukkan bahwa $n \bmod 3 = 1$ atau 2 . Dengan algoritma pembagian, $n = 3q + r$ di mana $0 \leq r < 3$. Dengan definisi **mod**, kita peroleh $r = n \bmod 3$. Karena n dapat dibagi dengan 3 jika dan hanya jika $r = 0$, asumsikan bahwa $n \bmod 3 = 1$ atau 2 mengakibatkan bahwa n tidak dapat dibagi dengan 3 . Ini melengkapi bukti bahwa $p_1 \rightarrow p_2$ benar.

Kita telah menunjukkan bahwa $p_2 \rightarrow p_3$ benar dalam Contoh 17.

Kita akan menggunakan suatu bukti tak langsung untuk menunjukkan bahwa $p_3 \rightarrow p_1$ benar. Kita asumsikan bahwa konklusi dari implikasi ini salah, yaitu, bahwa tak satupun; baik $n \bmod 3$ adalah 1 maupun $n \bmod 3$ adalah 2 . Karena $n \bmod 3 = 0, 1$ atau 2 , kita melihat bahwa $n \bmod 3 = 0$. Ini berarti bahwa $3 \mid n$,

sehingga $n = 3k$ untuk suatu bilangan bulat k . Ini mengakibatkan bahwa $n^2 = 9k^2 = 3(3k^2)$, yang menunjukkan bahwa $n^2 \equiv 0 \pmod{3}$, sehingga p_3 salah. Ini melengkapi bukti tak langsung bahwa $p_3 \rightarrow p_1$, dan juga melengkapi bukti teorema itu. ■

2.5 Teorema dan Kuantifier

Banyak teorema dinyatakan sebagai proposisi yang meliputi kuantifier. Ada berbagai metode untuk membuktikan teorema adalah kuantifikasi. Kita akan menggambarkan beberapa dari yang sangat penting ini di sini.

Banyak teorema menonjolkan objek-objek dari suatu tipe khusus yang ada. Suatu teorema dari tipe ini adalah suatu proposisi berbentuk $\exists x P(x)$, di mana P adalah suatu predikat. Suatu bukti dari proposisi berbentuk $\exists x P(x)$ disebut “**bukti eksistensi**” (“**existence proof**”). Ada berbagai cara untuk bukti teorema dari tipe ini. Kadang-kadang suatu bukti eksistensi $\exists x P(x)$ dapat diberikan dengan menentukan suatu elemen a sedemikian hingga $P(a)$ benar. Sehingga suatu bukti eksistensi disebut “**konstruktif**” (“**constructive**”). Ini juga memungkinkan untuk memberikan suatu bukti eksistensi yang “**nonkonstruktif**” (“**nonconstructive**”); yaitu, kita tidak dapat menentukan suatu elemen a sedemikian hingga $P(a)$ benar, tetapi cukup membuktikan bahwa $\exists x P(x)$ benar dalam suatu cara lain. Salah satu metode biasa yang memberikan suatu bukti **eksistensi nonkonstruktif** adalah menggunakan **bukti dengan kontradiksi** dan menunjukkan bahwa **negasi dari kuantifier eksistensial** mengakibatkan suatu **kontradiksi**. Konsep dari suatu bukti eksistensi konstruktif diilustrasikan dengan contoh berikut.

CONTOH 20 Suatu bukti eksistensi konstruktif. Tunjukkan bahwa ada n bilangan bulat positif komposif berurutan untuk setiap bilangan

bulat positif n . Ingat bahwa pernyataan ini untuk bukti kuantifikasi:
 $\forall n \exists x (x + i \text{ adalah komposit untuk } i = 1, 2, \dots, n).$

Solusi: Misalkan

$$x = (n + 1)! + 1.$$

Perhatikan bilangan bulat

$$x + 1, x + 2, \dots, x + n.$$

Ingat bahwa $i + 1$ membagi $x + i = (n + 1)! + (i + 1)$ untuk $i = 1, 2, \dots, n$. Sehingga, n bilangan bulat positif komposit berurutan telah diberikan. Ingat bahwa dalam solusi suatu bilangan x sedemikian hingga $x + i$ komposit untuk $i = 1, 2, \dots, n$ telah dihasilkan. Sehingga, ini merupakan suatu **contoh** dari suatu **bukti eksistensi konstruktif**. ■

Perhatian: Bukti dalam Contoh 20 dapat ditemukan dalam karya Euclid seorang matematisi Yunani kuno.

Suatu **contoh** dari suatu **bukti eksistensi nonkonstruktif** diberikan berikut ini.

CONTOH 21 Suatu bukti eksistensi nonkonstruktif Tunjukkan bahwa untuk setiap bilangan bulat positif n ada suatu prima lebih besar dari n . Pertanyaan masalah ini untuk suatu bukti dari suatu kuantifikasi eksistensial yaitu $\exists x Q(x)$, di mana $Q(x)$ adalah proposisi “ x adalah prima dan x lebih besar dari n ,” dan univers wacana adalah himpunan bilangan bulat positif.

Solusi: Misalkan n adalah bilangan bulat positif. Untuk menunjukkan bahwa ada suatu prima lebih besar dari n , perhatikan bilangan bulat $n! + 1$. Karena setiap bilangan bulat memiliki suatu faktor prima, ada paling sedikit suatu prima membagi $n! + 1$. (Satu

kemungkinan adalah $n! + 1$ sudah prima). Ingat apabila $n! + 1$ dibagi dengan suatu bilangan bulat kurang dari atau sama dengan n , sisanya sama dengan 1. Sehingga, setiap faktor prima dari bilangan bulat ini harus lebih besar dari n . Ini membuktikan hasil itu. Argumen ini merupakan suatu **bukti eksistensi nonkonstruktif** karena suatu prima lebih besar dari n tidak dihasilkan. Singkatnya, ini menunjukkan bahwa salah satu harus ada. ■

Andaikan suatu pernyataan berbentuk $\forall x P(x)$ adalah salah. Bagaimana kita dapat menunjukkan ini? Ingat bahwa proposisi $\neg \forall x P(x)$ dan $\exists x \neg P(x)$ ekuivalen. Ini berarti bahwa jika kita tentukan suatu elemen a sedemikian hingga $P(a)$ adalah salah, maka kita menunjukkan bahwa $\exists x \neg P(x)$ adalah benar, yang berarti bahwa $\forall x P(x)$ salah. Suatu elemen a di mana $P(a)$ salah disebut “**contoh tandingan**” (“**counterexample**”). Ingat bahwa hanya satu contoh tandingan perlu ditentukan untuk menunjukkan bahwa $\forall x P(x)$ salah.

CONTOH 22 Tunjukkan bahwa pernyataan “semua prima adalah gasal” adalah salah.

Solusi: Pernyataan “Semua prima gasal” adalah suatu kuantifikasi universal, yaitu, $\forall x O(x)$, di mana $O(x)$ adalah proposisi “ x adalah gasal,” dan univers wacana adalah himpunan bilangan prima. Ingat bahwa $x = 2$ merupakan contoh tandingan, karena 2 adalah suatu bilangan prima genap. Sehingga, pernyataan “Semua bilangan prima gasal” adalah salah. ■

2.6 Beberapa Komentar pada Bukti

Kita telah menggambarkan berbagai metode untuk membuktikan teorema. Pembaca dapat mengamati bahwa bukan algoritma untuk membuktikan teorema yang diberikan di sini sehingga suatu metode tidak ada.

Ada banyak teorema yang buktinya mudah untuk menentukan dengan secara langsung bekerja melalui hipotesis dan definisi dari istilah-istilah dalam teorema. Bagaimanapun, ini sering sulit untuk bukti suatu teorema tanpa berusaha untuk mahir menggunakan suatu bukti tak langsung, bukti dengan kontradiksi, atau beberapa teknik bukti lain. Mengonstruksi bukti merupakan suatu seni yang dapat dipelajari dengan mencoba berbagai macam pemecahan.

Selain itu banyak pernyataan yang muncul menjadi teorema menantang usaha matematis untuk seratus tahun. Misalnya, seperti pernyataan sederhana “setiap bilangan bulat positif genap lebih besar dari 4 merupakan jumlah dua prima” masih belum ditunjukkan benar, dan bukan contoh tandingan yang telah ditentukan.

Pernyataan ini dikenal sebagai “**Goldbach’s Conjecture**” dan merupakan salah satu dari banyak pernyataan tegas dalam matematika adalah sederhana untuk menyatakan, dengan suatu **nilai kebenaran** yang belum diketahui (anu).

Christian Goldbach (1690-1764) Christian Goldbach lahir di Konigsberg, Prusia, kota terkemuka untuk masalah jembatan terkenalnya (yang dikenal dalam teori Graf). Beliau menjadi professor matematika pada Academy in St. Petersburg 1728. Tahun 1728 Goldbach pergi ke Moscow menjadi tutor putra tsar. Ia memasuki dunia politik tahun 1742, ia menjadi anggota staf dalam Russian

Ministry of Foreign Affairs. Goldbach sangat terkenal dengan korespondensinya terhadap matematisi ulung/unggul, meliputi Leonhard Euler dan Daniel Bernoulli, untuk conjecture terkenalnya dalam teori bilangan, dan untuk berbagai kontribusi untuk analisis.

LATIHAN

1. Aturan inferensi apakah yang digunakan dalam masing-masing argumen berikut?
 - a) Donni menyenangi bola basket. Jadi, Donni menyenangi bola basket atau tolak peluru.
 - b) Donni menyenangi bola basket dan tolak peluru. Jadi, Donni menyenangi bola basket.
 - c) Jika hari ini tanggal 20 Mei, maka ada upacara bendera. Hari ini tanggal 20 Mei. Jadi, ada upacara bendera.
 - d) Jika hari ini adalah hari Minggu, maka para siswa libur. Para siswa tidak libur hari Minggu. Jadi, hari ini adalah bukan hari Minggu.
 - e) Jika $2 + 2 = 5$, maka ibu kota provinsi Kalsel adalah Sampit. Jika ibu kota provinsi Kalsel adalah Sampit, maka $2 \times 5 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2$. Jadi, jika $2 + 2 = 5$, maka $2 \times 5 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2$.
2. Tentukan manakah dari masing-masing argumen berikut adalah valid?

Jika suatu argumen benar, aturan inferensi apakah yang digunakan?
Jika argumen tidak benar, kesesatan apakah yang terjadi?

 - a) Jika n suatu bilangan real sehingga $n > 1$, maka $n^2 > 1$. Andaikan $n^2 > 1$. Maka $n > 1$.
 - b) Bilangan $\log_2 3$ adalah irasional jika ia bukan rasio dari dua bilangan bulat. Jadi, karena $\log_2 3$ tidak dapat ditulis dalam bentuk a / b di mana a dan b bilangan bulat, irasional.
3. Buktikan atau tanpa dibuktikan bahwa hasil kali dua bilangan irasional adalah irasional?
4. Buktikan jika n adalah suatu bilangan bulat positif, maka n adalah gasal jika dan hanya jika $5n + 6$ adalah gasal.