KUANTIFIKASI (QUANTIFICATION)

Drs. C. Jacob, M.Pd

Email: cjacob@upi.edu

KUANTIFIER (QUANTIFIER) ADALAH SUATU UNGKAPAN (KATA OR UCAPAN) YG NYATAKAN BERAPA BANYAK. KUANTIFIER TSB ADALAH:

"UTK SETIAP",
"UTK SEMUA",
"TIAP-TIAP",
"ADA",
"BEBERAPA",
"PALING SEDIKIT SATU."

ADA 2 MACAM KUANTIFIER:

1. KUANTIFIER UNIVERSAL: Ax, $\forall x$, (x), Λx
2. KUANTIFIER EKSISTENSIAL: Ex, $\exists x$,

$\forall x$ DIBACA: "UTK SETIAP/SEMUA x"
$\exists x$ DIBACA: "ADA x", "BEBERAPA x"

JIKA $p(x)$ SUATU PROPOSISI, BERARTI x BERSIFAT p, MAKA $(\forall x)p(x)$ ADALAH PROPOSISI UTK SETIAP x, x BERSIFAT p.

CONTOH: $p(x)$: $x + 1 = 0$. MAKA $p(-1/2)$ ADALAH (B), SEDANGKAN $p(-2)$ ADALAH (S).

CONTOH: $\{x\} = \{$SEMUA BIL. REAL POSITIF$\}$. MAKA PROPOSISI $p(x)$ DPT DIUBAH DLM PROPOSISI:
$(\forall x)p(x)$ ATAU $(\forall x)(x + 1) > 0$ (B)

KUANTIFIER EKSISTENSIAL:
$(Ex)p(x)$ BERARTI: "ADA x SHG x BERSIFAT p.

CONTOH: $\{Y\} = \{\text{BIL. REAL}\}$. MAKA

$(\exists y)(y^2 = -1)$ ADALAH PERNYATAAN (S)

$(\exists y)(y + 1 > 0)$ (B)

NEGASI PERNYATAAN KUATIFIER

$$\neg(\forall x)p(x) \equiv (\exists x) \neg p(x) \qquad \neg(\exists x)p(x) \equiv (\forall x) \neg p(x)$$

CONTOH: $\neg(\forall x)(x + 1 > 0) \equiv (\exists x)(x + 1 \equiv \leq 0)$

$\neg(\exists x)(y^2 = -1) \equiv (\forall x)(y^2 \neq -1)$

PROPOSISI UN IVERSAL:

1. AFIRMATIF UNIVERSAL: $(\forall x)(\phi x \supset \psi x)$: A
2. NEGATIF UNIVERSAL: $(\forall x)(\phi x \supset \neg\psi x)$: E

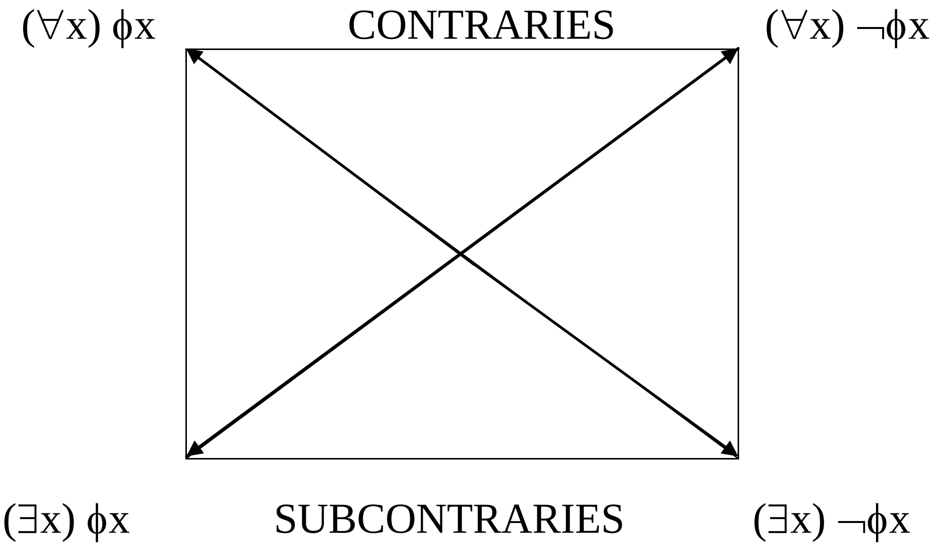
PROPOSISI EKSISTENSIAL:

1. AFIRMATIF KHUSUS: $(\exists x)(\phi x \wedge \psi x)$: I
2. NEGATIF KHUSUS: $(\exists x)(\phi x \wedge \neg\psi x)$: O

A, E, I, O DIAMBIL DARI BHS LATIN:

"AffIrmo" DAN "nEgO" ARTINYA

I affirm and I deny = SAYA SAHKAN & SANGKAL



VALIDITAS ARGUMEN KUANTIFIER

ATURAN INFERENSI (RULE OF INFERENCE)

1. THE PRICIPLE OF UNIVERSAL INSTANTIATION (DISINGKAT: "UI"

$(\forall x)(\phi x)$

UI: $\therefore \phi v$ (di mana v adalah setiap simbol individual)

BUKTI FORMAL VALIDITAS DITULIS SBB:

1. $(\forall x)(Hx \supset Mx)$
2. Hs $/\therefore Ms$
3. $Hs \supset Ms$ 1, UI
4. Ms 3, 2, M.P.

CONTOH:

SEMUA MANUSIA ADALAH MAKHLUK HIDUP

SOCRATES ADALAH MANUSIA
JADI, SOCRATES ADALAH MAKHLUK HIDUP

TAMBAHAN UI SANGAT MEMPERKUAT ALAT BUKTI, TTP LEBIH DIBUTUHKAN. PERLU ATURAN TAMBAHAN YG MENGATUR KUALIFIKASI MUNCUL DLM KONEKSI AREGUMEN SBB:

SEMUA MANUSIA ADALAH MAKHLUK HIDUP.
SEMUA ORANG YAHUDI ADALAH MANUSIA.
JADI, SEMUA ORG YAHUDI ADALAH MAK HIDUP.

TRANSLASI SIMBOLIK DR ARGUMEN INI SBB:

$$(\forall x)(Hx \supset Mx)$$
$$(\forall x)(Gx \supset Hx)$$
$$\therefore (\forall x)(Gx \supset Mx)$$

2. THE PRINCIPLE OF UNIVERSAL GENERALIZATION (DISINGKAT "UG")

ϕy (di mana 'y' menyatakan setiap
UG: $\therefore (\forall x)(\phi x)$ individual yg dipilih secara sebarang, & ϕy tdk dlm scope setiap asumsi yg memuat simbol khusus 'y')

GUNAKAN NOTASI BARU & ATURAN TAMBAHAN 'UG' UTK KONSTRUK SUATU BUKTI VAKLIDITAS FORMAL UTK ARGUMEN:

BUKAN MAKHLUK HIDUP ADALAH SEMPURNA.
SEMUA MANUSIA ADALAH IS MAKHL HIDUP.
JADI, BUKAN MANUSIA ADALAH SEMPURNA.

1. $(\forall x)(Mx \supset Px)$
2. $(\forall x)(Hx \supset Mx)$ $/\therefore (\forall x)(Hx \supset \neg Px)$

3. $Hy \supset My$ 2, UI
4. $My \supset \neg Py$ 1, UI
5. $Hy \supset \neg Py$ 3, 4, H.S.
6. $(\forall x)(Hx \supset \neg Px)$ 5, UG

CATATAN: DLM PENGGUNAAN ‘EI’ & ‘UI’, MAKA ‘EI’ YG DIGUNAKAN PERTAMA

3. THE PRINCIPLE OF EXISTENTIAL INSTANTIATION (DISINGKAT “EI”)

$(\exists x)(\phi x)$
EI: $\therefore \phi v$ (di mana v adalah setiap konstan individual (y yg lain) tdk memiliki peristiwa sebelumnya dlm konteks)

1. $(\forall x)(Cx \supset Vx)$
2. $(\exists x)(Hx \wedge Cx)$ $/\therefore (\exists x)(Hx \wedge Vx)$
3. $Ha \wedge Ca$ 2, EI
4. $Ca \supset Va$ 1, UI
5. $Ca \wedge Ha$ 3, COM.
6. Ca 5, SIMP.
7. Va 4, 6, M.P.
8. Ha 3, SIMP.
9. $Ha \wedge Va$ 8, 7, CONJ.

4. THE PRINCIPLE OF EXISTENTIAL GENERALIZATION (DISINGKAT “EG”)

ϕv (di mana v adalah setiap simbol)
EG: $\therefore (\exists x)(\phi x)$

10. $(\exists x)(Hx \wedge Vx)$ 9, EG

BUKTI FORMAL VALIDITAS DITULIS SBB:

1. $(\exists x)(Ax \wedge Cx)$
2. $(\exists x)(Bx \wedge Cx)$ $\quad / \therefore (\exists x)(Ax \wedge Bx)$
3. $Aa \wedge Ca$ $\quad$ 1, EI
4. $Ba \wedge Ca$ $\quad$ 2, EI (SALAH)
5. Aa $\quad$ 3, SIMP.
6. Ba $\quad$ 4, SIMP.
7. $Aa \wedge Bb$ $\quad$ 5, 6, CONJ.
8. $(\exists x)(Ax \wedge Bx)$ $\quad$ 7, EG

BUKTI INVALIDITAS ARGM KUANTIFIER

MODEL SECARA SIMBOLIS DITULIS SBB:

$$
\begin{array}{l}
(\forall x)(Mx \supset Ux) \\
(\forall x)(Gx \supset \neg Mx) \\
\therefore (\forall x)(Gx \supset \neg Vx)
\end{array}
$$

JIKA ADA SECARA TEPAT SATU INDIVIDUAL, SEBUT a, ARGUMEN INI EKUIVALEN LOGIS DGN

$$
\begin{array}{l}
Ma \supset Va \\
Ga \supset \neg Ma \\
\therefore Ga \supset \neg Ua
\end{array}
$$

SUATU ARGUMEN, MISALKNYA

$$
\begin{array}{l}
(\exists x)Fx \\
\therefore (\forall x)Fx
\end{array}
$$

DPT VALID UTK SETIAP MODEL DI MANA ADA SECARA TEPAT SATU INDIVIDUAL, TTP INVALID

UTK SUATU MODEL G MEMUAT DUA ATAU LEBIH INDIVIDUAL. SHG ARGUMEN HRD DIHITUNG INVALID JUGA, KRN SUATU ARGUMEN VALID HRS VALID TANPA MEMPERHATIKAN BERAPA BANYAK INDIVIDUAL YG ADA, SELAMA ADA PALING SEDIKIT SATU. CONTOH LAIN DARI ARGUMEN INI SBB:

SEMUA ANJING ADALAH PENUH KASIH SAYANG. ADA ANJING ADALAH PENJAGA. JADI, SEMUA PENJAGA ADALAH PENUH KASIH SAYANG.

TRANSLASI SIMBOLIKNYA SBB:

$$\begin{array}{ll} & (\forall x)(Cx \supset Ax) \\ & (\exists x)(Cx \wedge Wx) \qquad \text{(VALID)} \\ \therefore & (\forall x)(Wx \supset Ax) \end{array}$$

UNTUK SUATU MODEL YG MEMUAT SATU INDIVIDUAL, SEBUT a, EKUIVALEN LOGIS DGN:

$$\begin{array}{ll} & (Ca \supset Aa) \wedge (Cb \supset Ab) \\ & (Ca \wedge Wa) \vee (Cb \wedge Wb) \qquad \text{(INVALID)} \\ \therefore & (Wa \supset Aa) \wedge (Wb \supset Ab) \end{array}$$

DGN MENENT. KEBENARAN DGN Ca, Aa, Wa, Wb, & KEBOHONGAN (FALSEHOOD) DGN Cb & Ab. KARENA ARGUMEN ASLI TDK VALID UTK SUATU MODEL YG MEMUAT SECARA TEPAT DUA INDIVIDUAL, & OLEH KRN ITU “INVALID”

PENJELASAN KUANTIFIER

P(x): “$x > 3$”   ADALAH BUKAN PROPOSISI/PERNYA-

TAAN/ASERSI (ASSERTION)

P(x) DISEBUT: “NILAI DR FSI PROPOSISIONAL DR P PADA x.”

P(x): “x > 3” JIKA x = 4, MAKA P(4) BERNILAI (B)
JIKA x = 1, MAKA P(1) BERNILAI (S)

P ADALAH “PREDIKAT”, x ADALAH “VARIABEL.”

CONTOH 1: Q(x,y): “x = y + 3”
Q(3,0) PROPOSISI (B)
Q(1,2) PROPOSISI (S)

CONTOH 2: R(x,y,z): “x + y = z”
R(1,2,3) PROPOSISI (B)
R(0,0,1) PROPOSISI (S)

SECARA UMUM: $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ADALAH PROPOSISI DR NILAI PROPOSISIONAL P PD n-TUPEL $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

P: “PREDIKAT”

$x_1, x_2, \ldots, x_n$: “VARIABEL”

APABILA SEMUA VARIABEL DLM SUATU FSI PROPOSISIONAL MENENTUKAN NILAI, MAKA PROPOSISI YG DIHASILKAN MEMILIKI SUATU “NILAI KEBENARAN.”

CARA MERUBAH FSI PROPOSISIONAL KE DLM PROPOSISI DISEBUT: “KUANTIFIKASI.”

DEF: KUANTIIKASI/KUANTIFIER UNIVERSAL P(x) ADALAH PROPOSISI “P(x) BENAR UTK SETIAP x DALAM UNIVERSE OF DISCOURSE.

CONTOH 1: EKSPRESIKAN PERNYATAAN
"SETIAP MHS DI KLS INI BELAJAR LOGIKA."
SBG SUATU KUANTIFIKASI UNIVERSAL.
SOLUSI: MISAL P(x): "x BELAJAR LOGIKA."
MAKA PERNYATAAN "SETIAP MHS DI KLS INI BELAJAR LOGIKA." DPT DITULIS SBG $\forall x\ P(x)$, DI MANA UNIVERSE DISCOURSE MEMUAT MHS DI KLS INI. PERNATAAN INI DPT DIEKSPRESIKAN:

$$\forall x\ (S(x) \supset P(x))$$

DI MANA S(x) ADALAH PERNATAAN:

"x DI KELAS INI."

UNIVERSE OF DISCOURSE: "{SEMUA MHS}."

CONTOH 2: MISAL P(x): "$x + 1 > x$." APA NILAI KEBENARAN DR KUANTIFIKASI:
$\forall x\ P(x)$, DI MANA UNIVERSE OF DISCOURSE ADALAH HIMPUNAN BIL. REAL?

SOLUSI: KRN P(x) BENAR UTK SEMUA BIL. REAL x, KUANTIFIKASI $\forall x\ P(x)$ ADALAH BENAR.

DEF: KUANTIFIKASI EKSISTENSIAL DR P(x) ADAL PROPOSISI "ADA SUATU ELEMEN x DI U.D. S.H. P(x) BENAR."

CONTOH 1: MISAL P(x): "$x > 3$." APAKAH NILAI KEBENARAN DR KUANTIFIKASI $\exists x\ P(x)$, DI MANA U.D. ADALAH HIMPUNAN BIL. REAL?

SOLUSI: KRN "$x > 3$" (B), MISALNYA, APABILA $x = 4$, KUANTIFIKASI DR P(x), $\exists x\ P(x)$ (B).

VARIABEL MENGIKAT

APABILA SUATU KUANTIFIER DIGUNAKAN PADA

VAR x, ATAU APABILA KITA MENENTUKAN SUATU NILAI THD VAR INI DIKATAKAN BHW
PERISTIWA VAR INI ADALAH “TERIKAT”(“BOUND”).
SUATU PERISTIWA DR VAR YG TDK TERIKAT OLEH SUATU KUANTIFIER
ATAU HIMPUNAN SAMA DGN SUATU NILAI KHUSUS DIKATAKAN “BEBAS” (“FREE”).

SEMUA VAR YG TERJADI DLM SUATU FSI PROPOSISIONAL HRS BERUBAH KE DLM SUATU PROPOSISI. INI DILAKUKAN MENGGUNAKAN SUATU KOMBINASI KUANTIFIER UNIVERSAL, KUANTIFIER EKSISTENSIALK, & TUGAS NILAI.

BANYAK PERNYATAAN MATEMATIS MENCAKUP KUANTIFIKSI MULTIPEL DR FSI PROPOSISIONAL YG MELIPUTI LEBIH DR SATU VARIABEL.

CONTOH 1: MIASAL P(x,y): “x + y = y + x.” APAKAH NILAI KEBENARAN KUANTIFIKASI $\forall x\ \forall y\ P(x,y)$?

SOLUSI: KUANTIFIKASI $\forall x\ \forall y\ P(x,y)$: PROPOSISI “UTK SEMUA BIL. REAL x DAN UTK SEMUA BIL. REAL y (B) BHW “x + y = y + x.” KRN P(x,y) (B) UTK SEMUA BIL. REAL x & y, PROPOSISI $\forall x\ \forall y\ P(x,y)$ ADALAH BENAR.

CONTOH 2: MISAL Q(x,y): “x + y = 0.” APAKAH NILAI KEBENARAN DR KUANTIFIKASI $\exists y\ \forall x\ P(x,y)$?

SOLUSI: KUANTIFIKASI $\exists y\ \forall x\ P(x,y)$: PROPOSISI

“ADA SUATU BIL. REAL y S.H. UTK SETIAP BIL. REAL x Q(x,y) ADALAH BENAR.”

BUKAN MATERI APA NILAI y DIPILIH, HANYA ADA SATU NILAI x DI MANA x + y = 0. KARENA TDK ADA BIL. REAL y S.H. x + y = 0 UTK SEMUA BIL. REAL x, PERNYATAAN $\exists y\ \forall x\ Q(x,y)$ SALAH.

KUANTIFIKASI $\forall x\ \exists y\ P(x,y)$: PROPOSISI
"UTK SETIAP x ADA BIL. REAL y S.H. Q(x,y) BENAR."

DIBERIKAN SUATU BIL. REAL x, ADA SUATU BIL. REAL y S.H. x + y = 0, YAITU, y = -x.
JADI, $\forall x\ \exists y\ P(x,y)$ ADALAH BENAR.

CATATAN: DARI CONTOH 2 DI ATAS, TERNYATA
$\exists y\ \forall x\ P(x,y)$ TDK EKUIVALEN LOGIS DGN
$\forall y\ \exists x\ P(x,y$

KUANTIFIKASI DUA VARIABEL

PERNYATAAN	KAPAN (B)?	KAPAN (S)?
$\forall x\ \forall y\ P(x,y)$ $\forall y\ \forall x\ P(x,y)$	$P(x,y)$ (B) $\forall x,y$	$\exists x$, $P(x)$ (S)
$\forall x\ \exists y\ P(x,y)$	$\forall x\ \exists y$, $P(x,y)$ (B) UTK y	$\exists x \ni P(x,y)$ (S) UTK y
$\exists x\ \forall y\ P(x,y)$	$\exists x$, $P(x,y)$ (B) $\forall y$	$\forall x\ \exists y$, $P(x,y)$ (S)
$\exists x\ \exists y\ P(x,y)$ $\exists y\ \exists x\ P(x,y)$	$\exists x,y$, $P(x,y)$ (B)	$P(x,y)$ (S) $\forall x,y$

CONTOH KUANTIFIKASI LEBIH DR 2 VAR

CONTOH 1: MISAL Q(x,y,z): “x + y = z.” APAKAH NILAI KEBENARAN PERNYATAAN $\forall x\ \forall y\ \exists z\ Q(x,y,z)$ DAN $\exists z\ \forall x\ \forall y\ Q(x,y,z)$?

SOLUSI: ANDAIKAN x, y ADALAH NILAI-NILAI YG DITENT. MAKA, ADA SUATU BIL. REAL x S.H. x + y = z. AKIBATNYA, KUANTIIKASI
$\forall x\ \forall y\ \exists z\ Q(x,y,z)$ YG MERUPAKAN PERNYATAAN:
“UTK SETIAP BIL. REAL x DAN UTK SETIAP BIL. REAL y ADA SUATU BIL. REAL z S.H. x + y = z.” ADALAH BENAR. URUTAN KUANTIFI*KASI DI SINI PENTING, KRN KUANTIFIKASI $\exists y\ \forall x\ \forall z\ Q(x,y,z)$ YG MERUPAKAN PERNYATAAN:
“ADA SUATU BIL. REAL z S.H. UTK SETIAP BIL. REAL x DAN UTK SETIAP BIL. REAL y ADALAH (B)
x + y = z.” ADALAH (S), KRN TDK ADA NILAI z YG MEMENUHI PERS. x + y = z UTK SEMUA NILAI DR
x DAN y.
CONTOH 2: GUNAKAN KUANTIFIER UTK EKSPRESI PERNYATAA: “ADA SEORANG WANITA YG MENGAMBIL SUATU PENERBANGAN PD SETIAP PESAWAT DI DUNIA.”

SOLUSI: MISAL P(w,f): “w MENGAMBIL f” DAN Q(f,a): “f ADALAH SUATU PENERBANGAN Pd a.”
KITA DPT EKSPRESIKAN PERNYATAAN ITU SBB:

$$\exists w\ \forall a\ \exists f\ (P(w,f) \land Q(f,a))$$

DI MANA UNIVERSE OF DISCOURSE UTK:
w: “MEMUAT SEMUA WANITA DI DUNIA.”
f: “MEMUAT SEMUA PENERBANGAN PESAWAT.”
a: “MEMUAT SEMUA PESAWAT.”

PERNYATAAN ITU DPT JUGA DIEKSPRESIKAN:

$$\exists w\ \forall a\ \exists f\ R(w,f,a)$$

DI MANA R(w,f,a): “w MENGAMBIL PENERBANGAN f PADA a.” MESKIPUN INI LEBIH KOMPAK, SEDIKIT MENGABURKAN HUB. ANT. VAR. AKIBATNYA, SOLUSI PERTAMA BIASANYA
LEBIH BAIK.

CONTOH 3: EKSPRESIKAN DEF SUATU LIMIT DGN MENGGUNAKAN KUANTIFIER.

SOLUSI: DEF PERNYATAAN: $\lim_{x \to a} f(x) = L$

ADALAH: UTK SETIAP BIL. REAL $\in > 0$ ADA SUATU BIL. REAL $\delta > 0$ ∍ $| f(x) - L | < \in$ DI MANA $0 < | x - a | < \delta$. INI DEF DR SUATU LIMIT DPT DIUNGKAPKAN DLM ISTILAH KUANTIFIER DGN
$\forall \in \exists \delta \forall x \, (0 < | x - a | < \delta \to | f(x) - L | < \in)$,

DI MANA UNIVERSE OF DISCOURSE UTK VAR δ & $\in$ ADALAH HIMPUNAN BIL. REAL POSITIF & UTK x ADALAH HIMPUNAN BIL. REAL.

MENEGASI KUANTIFIER

NEGASI	PERNY EKUI	KAPAN (B)?	KAPAN (S)?
$\neg\exists x$ P(x) (B)	$\forall x \neg$P(x)	P(x) (S) $\forall x$	$\exists x$,P(x) (B)
$\neg\forall x$ P(x) $\forall x$	$\exists x \neg$ P(x)	$\exists x$, P(x) (S)	P(x) (B) $\forall x$

Q(1,2) PROPOSISI (S)

CONTOH 2:
R(