KONSTRUKSI SISTEM BILANGAN REAL
(SUATU PENDEKATAN AKSIOMATIK)

C. JACOB

Jurusan Pendidikan Matematika FPMIPA UPI

Jl. DR. Setiabudhi 229, Bandung 40154

Email: cjacob@ upi.edu

ABSTRAK

Suatu sistem aljabar terbentuk, dimulai dengan adanya suatu himpunan takkosong disertai dengan suatu operasi biner yang membentuk **groupoid.** Apabila sistem ini memenuhi sifat asosiatif, maka terbentuk **semigroup.** Selanjutnya, terbentuk sistem-sistem berikutnya; seperti, **monoid** dan **group** apabila memenuhi sifat **identitas** dan **invers** secara berturut-turut. Sistem-sistem ini hanya menggunakan satu operasi biner. Namun, ada juga sistem aljabar yang menggunakan dua operasi biner, misalnya, ring.

Ada dua pendekatan dalam mengonstruksi sistem bilangan real: (1) **pendekatan aksiomatik,** yaitu, mengembangkan bilangan real dari bilangan asli (natural numbers/positive numbers/counting numbers/figuring numbers) dengan mengasumsikan aksistensi R, postulat, dan sifat-sifat yang mengklarifikasinya; (2) **pendekatan konstruktif,** yaitu, mengembangkan bilangan real dari bilangan rasional, bilangan rasional dari bilangan asli; dan bilangan asli dari teori dasar himpunan. Makalah ini menyajikan konstruksi sistem bilangan real dengan pendekatan aksiomatik.

Kata kunci: Bilangan asli (bilangan bulat positif).

1. Bilangan Asli (Natural Numbers)

Kita memulai perkembangan bilangan real dengan menyepakati **N** sebagai himpunan bilangan asli (natural numbers or positive numbers). Sehingga **N** = {1, 2, 3, 4, …}. Bagaimana sifat dasar penjumlahan dari bilangan asli dapat diturunkan dari beberapa aksioma sederhana. Aksioma-aksioma ini disebut **aksioma Peano** untuk menghormati Giuseppe Peano (1858-1932) matematisi Italia, yang mengembangkan pendekatan ini. Mula-mula kita andaikan ada suatu himpunan **N** yang elemen-elemennya disebut **bilangan asli** dan suatu relasi **pengganti (successor)** dengan sifat-sifat sebagai berikut:

P1. $1 \in$ **N**; yaitu, **N** adalah suatu himpunan takkosong dan memuat suatu elemen yang ditunjuk sebagai 1.

P2. Untuk setiap elemen $n \in$ **N** ada suatu elemen unik $n^* \in$ **N** yang disebut **pengganti (successor).**

P3. Untuk setiap elemen $n \in$ **N**, $n^* \neq 1$; yaitu, 1 bukan pengganti (successor) dari setiap elemen di **N**.

P4. Untuk setiap pasangan $n, m \in$ **N** dengan $n \neq m$, $n^* \neq m^*$, yaitu, elemen berbeda di **N** memiliki pengganti (successor) berbeda.

P5. Jika (a) $A \subseteq$ **N**, (b) $1 \in A$, dan (c) $p \in A$ mengakibatkan $p^* \in A$, maka A = **N**.

Aksioma **P1** sampai dengan **P3** mengekspresikan gagasan bahwa 1 adalah bilangan asli pertama dan kita dapat melanjutkan melalui bilangan asli dalam pengganti salah satu pada suatu saat. Aksioma **P1** sampai dengan **P5** disebut postulat Peano. Selanjutnya, **P5** disebut **prinsip induksi matematis** yang merupakan suatu alat penting dalam banyak bukti matematis. Hal ini sering muncul dalam bentuk sebagai berikut.

Jika untuk masing-masing bilangan asli n, S(n) adalah suatu pernyataan yang bergantung pada n, maka untuk membuktikan bahwa S(n) adalah suatu pernyataan benar untuk masing-masing dan setiap bilangan asli n kita menyatakan himpunan A adalah himpunan dari semua bilangan asli n ini di mana S(n) benar ($A \subseteq$ **N**). Jika kita dapat menunjukkan bahwa S(1) benar adalah ($1 \in A$) dan jika kita dapat menunjukkan bahwa kebenaran dari S(p) mengakibatkan S(p*) benar ($p \in A$ mengakibatkan $p^* \in A$), maka ini mengikuti dari prinsip induksi matematis bahwa S(n) benar untuk setiap bilangan asli n (A = **N**).

Aksioma-aksioma itu membolehkan kita untuk menamakan bilangan asli dalam cara konvensional.

(a) $1 \in$ **N** dengan **P1**.

(b) $1^* \in$ **N** dengan **P2** dan $1^* \neq 1$ dengan P3. Namakan $1^* = 2$; maka 1, 2 adalah bilangan asli berbeda.

(c) $2^* \in$ **N** dengan **P2**, dan $2^* \neq 1$ dengan **P3**. $2^* \neq 2$ dengan **P4** (karena $2 \neq 1$). Namakan $2^* = 3$; maka 1, 2, 3 adalah bilangan asli berbeda.

(d) $3^* \in$ **N** dengan **P2**, dan $3^* \neq 1$ dengan **P3**. $3^* \neq 2$ dengan **P4** (karena $3 \neq 1$). $3^* \neq 3$ dengan **P4** (karena $3 \neq 2$). Namakan $3^* = 4$; maka 1, 2, 3, 4 adalah bilangan asli berbeda.

Dengan kontinu untuk menamakan bilangan asli dalam cara ini dengan takhingga, diperoleh himpunan A = {1, 2, 3, 4, …} dari bilangan asli berbeda. Karena A memenuhi hipotesis induksi **P5**, mengikuti dari Aksioma **P5** bahwa A = **N** dan oleh karena itu setiap bilangan asli telah dinamakan. Jadi,

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$$

Selanjutnya, kita mengembangkan suatu "aritmetika" dalam **N** dengan menyatakan dua operasi biner yang disebut penjumlahan (+) dan perkalian (•).

Definisi 1.1 Penjumlahan

$n + 1 = n^*$ untuk setiap $n \in \mathbf{N}$

dan

$n + p^* = (n + p)^*$ untuk setiap $n \in \mathbf{N}$ dan $s \in \mathbf{N}$

Perkalian

$n \bullet 1 = n$ untuk setiap $n \in \mathbf{N}$

dan

$n \bullet p^* = (n \bullet p) + n$ untuk setiap $n \in \mathbf{N}$ dan $p \in \mathbf{N}$

Ingat bahwa operasi penjumlahan dan perkalian didefinisikan secara induktif: definisi penjumlahan mula-mula memberikan jumlah n + 1 dan kemudian jumlah
$n + 2 = (n + 1)^*$, $n + 3 = (n + 2)^*$, $n + 4 = (n + 3)^*$ dan seterusnya. Dengan cara yang sama, definisi perkalian mula-mula diberikan $n \bullet 1$ dan $(n \bullet 3) + n$, dan seterusnya. Dengan demikian, kehadirannya tidak mengherankan bahwa bukti berbagai sifat-sifat dari aritmetika bilangan asli berdasarkan pada Aksioma P5. sebagai suatu contoh kita membuktikan yang berikut.

Hukum Asosiatif untuk Penjumlahan

$(m + n) + p = m + (n + p)$ untuk semua $m, n, p \in \mathbf{N}$

Bukti: Misalkan $m, n \in \mathbf{N}$ adalah tertentu tetapi sebarang dan dinyatakan

$$A = \{p \in \mathbf{N} : (m + n) + p = m + (n + 1)\}$$

Ini jelas bahwa $A \subseteq \mathbf{N}$, dan karena

$$(m + n) + 1 = (m + n)^* = m + n^* = m + (n + 1)$$

diperoleh $1 \in A$. Kini andaikan $s \in \mathbf{N}$; maka

$$(m + n) + p = m + (n + p)$$

Sehingga $(m + n) + p^* = [(m + n) + p]^* = [m + (n + p)]^*$

$$= m + (n + p)^* = m + (n + p^*)$$

dan dengan demikian $p^* \in A$. Ini mengikuti dari Aksioma **P5** bahwa $A = \mathbf{N}$. Jadi, $(m + n) + p = m + (n + p)$ untuk setiap bilangan asli p. Karena m dan n sebarang, hukum asosiatif untuk penjumlahan ditetapkan.

Sifat-sifat bilangan asli lainnya dapat dibuktikan dalam cara yang sama. Sifat-sifat yang didaftarkan di bawah ini diserahkan kepada pembaca sebagai latihan.

Hukum Komutatif untuk penjumlahan

$m + n = n + m$ untuk setiap $m, n \in \mathbf{N}$

Hukum Distributif

$p \bullet (m + n) = (p \bullet m) + (p \bullet n)$ untuk setiap $m, n, p \in \mathbf{N}$

$(m + n) \bullet p = (m \bullet p) + (n \bullet p)$ untuk setiap $m, n, p \in \mathbf{N}$

Hukum Asosiatif untuk Perkalian

$(m \bullet n) \bullet p = m \bullet (n \bullet p)$ untuk setiap $m, n, p \in \mathbf{N}$

Hukum Komutatif untuk Perkalian

$m \bullet n = n \bullet m$ untuk setiap $m, n \in \mathbf{N}$

Hukum Kanselasi

$p + m = p + n$ mengakibatkan $m = n$ untuk setiap $m, n, p \in \mathbf{N}$

Hukum Trichotomy

Untuk setiap pasangan $m, n \in \mathbf{N}$ secara tepat satu dari yang berikut berperan:

(a) $m = n$

(b) $m < n$

(c) $n < m$

Teorema berikut disebut **the well-ordering principle for N** adalah suatu sifat penting yang merupakan karakteristik dari himpunan bilangan asli. Prinsip ini sering digunakan dalam perkembangan sistem bilangan real.

Teorema 1.1 Setiap himpunan bagian takkosong $A \subseteq \mathbf{N}$ memiliki suatu elemen elemen pertama; yaitu, ada $p \in \mathbf{N}$ sedemikian sehingga $p \leq a$ untuk setiap $a \in A$.

Bukti: Kita asumsikan bahwa A adalah himpunan bagian takkosong dari **N** dan A tidak memiliki elemen pertama dan menunjukkan bahwa ini berperan untuk suatu kontradiksi. Nyatakan $M \subseteq \mathbf{N}$ dengan

$$M = \{x \in M: x < a \text{ untuk setiap } a \in A\}$$

Dengan hukum trichotomy $M \cap A = \emptyset$. Kini $1 \notin A$; sebaliknya 1 tentu saja merupakan elemen pertama di A. Sehingga $1 < a$ untuk setiap $a \in A$, dan juga $1 \in M$. Asumsikan $s \in M$; maka $s < a$ untuk setiap $a \in A$, jika $p + 1 \in A$, maka $p + 1$ yang merupakan bilangan asli pertama yang lebih besar dari p, akan merupakan elemen pertama di A, yang kontradiksi dengan asumsi bahwa A tidak memiliki elemen pertama. Jadi, $p + 1 \notin A$, dan juga $p + 1 < a$ untuk setiap $a \in A$. Karena $p + 1 \in M$ dan dengan induksi $M = \mathbf{N}$. Tetapi $M \cap A = \emptyset$, dan juga $A = \emptyset$, yang merupakan suatu kontradiksi. Jadi, A harus memiliki elemen pertama.

2. Perkembangan Bilangan Rasional

Bilangan bulat dikembangkan untuk mengeliminasi kekurangan tertentu yang ada dalam sistem bilangan asli. Definisi dari urutan dan hukum trichotomy bersama-sama mengakibatkan persamaan

$$n + x = m$$

memiliki suatu solusi $x \in \mathbf{N}$ jika dan hanya jika $n < m$. Sehingga ini menjadi dapat ditentukan dengan memperluas sistem bilangan asli untuk mencakup bilangan yang membantu sebagai solusi terhadap persamaan ini untuk kasus $n \geq m$. Perluasan dapat menghasilkan suatu identitas untuk operasi penjumlahan dan suatu invers untuk masing-masing elemen dalam sistem baru.

Kita mulai dengan menyatakan S adalah himpunan dari semua pasangan terurut bilangan asli

$$S = \{(m, n): m, n \in \mathbf{N}\}.$$

Suatu relasi dinyatakan dalam S dengan

$$(m, n) \sim (a, b) \text{ ditetapkan } m + b = n + a$$

Untuk melihat ini adalah suatu relasi ekuivalen di S mula-mula mengamati bahwa $m + n = n + m$ dan juga $(m, n) \sim (m, n)$ untuk setiap $(m, n) \in S$. Sehingga relasi itu reflektif. Jika $(m, n) \sim (a, b)$, maka $m + b = n + a$, dan juga $a + n = b + m$. Karena (a, b) $\sim$ (m, n), dan relasi itu simetrik. Akhirnya, andaikan bahwa (m, n) $\sim$ (a, b) dan (a, b) $\sim$ (x, y). Maka m + b = n + a dan a + y = b + x. Kini

$$(m + b) + (a + y) = (n + a) + (b + x)$$

dan juga

$$(a + b) + (m + y) = (a + b) + (n + x)$$

Dengan hukum kanselasi m + y = n + x dan karena (m, n) $\sim$ (x, y). Jadi relasi itu adalah transitif.

Kita menyatakan bilangan bulat adalah ekuivalensi yang di bawah hasil itu relasi dinyatakan.

Definisi Suatu bilangan bulat adalah suatu kelas ekuivalensi dari pasangan terurut bilangan asli.

Kita menunjuk himpunan dari semua bilangan bulat dengan **Z** , dan prosedur berikut dengan bilangan asli, kita bangun dengan menyatakan suatu aritmetika di **Z**.

Definisi 2.1 Penjumlahan

[(m. n)] + [(a., b)] = [(m + a, n + b)] untuk semua bilangan bulatr

[(m, n)], [(a, b)] $\in$ **Z**

Perkalian

[(m, n)] $\bullet$ [(a, b)] = [(ma + nb, mb + na)] untuk semua bilangan bulat

[(m, n)], [(a, b)] $\in$ **Z**

Pada tahap ini dapat berguna bagi pembaca untuk memikirkan kelas ekuivalensi [(m, n)] sebagai selisih m – n. Misalnya, bilangan bulat [(1, 3)] sebagai selisih 1 – 3 atau -2. Penjumlahan dan perkalian seperti yang didefinisikan di atas kemudian dilihat sebagai definisi biasa dengan yang pembaca familiar. Secara aktual, kita dapat melihat di bawah, kelas [(m, n)] memuat semua pasangan terurut (p, q) bilangan asli di mana p – q = m – n. Tentu, m – n adalah suatu bilangan asli jika dan hanya jika m > n, di mana dengan notasi m – n kita artikan bilangan asli unik yang merupakan suatu solusi terhadap persamaan
n + x = m.

Untuk menunjukkan bahwa operasi terdefinisi-baik perlu untuk memeriksa bahwa jumlah dan perkalian adalah independen dari representatif kelas-ekuivalensi yang digunakan untuk menyatakan operasi itu. Terhadap andaian terakhir ini bahwa

$[(\hat{m},\hat{n})] = [(m, n)]$ dan $[(\hat{a},\hat{b})] = [(a, b)]$. Maka $(\hat{m},\hat{n}) \sim (m, n)$ dan

$(\hat{a},\hat{b}) \sim (a, b)$, dan juga m + n = n + m dan a + b = b + a. Kini

$$(\hat{m} + \hat{n}) + (n + b) = (\hat{m} + n) + (\hat{a} + b) = (\hat{n} + m) + (\hat{b} + a)$$

$$= (\hat{n} + \hat{b}) + (m + a)$$

Karena $(\hat{m} + \hat{a}, \hat{n} + \hat{b}) \sim (m + a, n + b)$, dan juga

$$[(\hat{m} + \hat{a}, \hat{n} + \hat{b})] = [(m + a, n + b)].$$

Berikut ini

$$[(\hat{m}, \hat{n})] + (\hat{a}, \hat{b}) = ((m, n)) + ((a, b))$$

Verifikasi bahwa multiplikasi terdefinisi-baik adalah serupa dan diserahkan kepada pembaca sebagai latihan.

Untuk memperoleh suatu representasi yang lebih familiar dari bilangan bulat kita melihat pada kelas ekuivalensi. Perhatikan setiap kelas [(m, n)]; dengan hukum trichotomy yang berlaku salah satu; m = n, atau m > n, atau m < n. Kita perhatikan tiga kasus sebagai berikut.

Kasus 1: m = n. Kita menunjukkan bahwa $[(m, n)] = \{(x, x): x \in \mathbf{N}\}$.

Jika $(a, b) \in [(m, m)]$, maka $(a, b) \sim (m, m)$, dan juga a + m = b + m. Jadi, a = b dan juga $(a, b) \in \{(x, x) : x \in \mathbf{N}\}$. Sebaliknya, jika $(a, b) \in \{(x, x) : x \in \mathbf{N}\}$, maka a = b dan juga a + m = b + m. Tetapi kemudian $(a, b) \sim (m, m)$, dan diperoleh $(a, b) \in [(m, m)]$.

Kasus 2: m > n Dalam kasus ini ada suatu bilangan asli unik p sedemikian sehingga m = n + p, dan oleh karena itu (m, n) = (n + p, n). Kita menunjukkan bahwa $[(m, n)] = \{(x + p, x) : x \in \mathbf{N}\}$. Jika $(a, b) \in [(m, n)]$, maka $(a, b) \sim (m, n) = (n + p, n)$. Sehingga a + n = b + (n + p) = (b + p) + n, dan juga a = b + p. Jadi, (a, b) = (b + p, b)

$\in \{(x + p, x) : x \in \mathbf{N}\}$. Sebaliknya, jika $(a, b) \in \{(x + p, x) : x \in \mathbf{N}\}$, maka $a = b + p$. Kini $(b + p) + n = b + (n + p)$, dan oleh karena itu $(a, b) = (b + p, b) \sim (n + p, n) = (m, n)$. Jadi, $(a, b) \in [(m, n)]$.

Kasus 3: $m < n$ Ada suatu bilangan asli unik q sedemikian sehingga $m + q = n$, dan juga $(m, n) = (m, m + q)$. Silahkan pembaca menyelidiki bahwa
$[(m, n)] = \{(x, x + q) : x \in \mathbf{N}\}$.

Kita memiliki tiga tipe bilangan bulat: jika $m = n$, maka

$$[(m, n)] = \{(x, x) : x \in \mathbf{N}\} = [(1, 1)];$$ jika $m > n$ dengan $m = n + p$,

maka

$$[(m, n)] = \{(x + p, x) : x \in \mathbf{N}\} = [(1 + p, 1)];$$ dan

jika $m < n$ dengan $m + q = n$, maka

$$[(m, n)] = \{(x, x + q) : x \in \mathbf{N}\} = [(1, 1 + q)].$$

Bilangan bulat $[(1, 1)]$ disebut **nol** dan ditulis $[(1, 1)] = 0$. Masing-masing bilangan bulat dari bentuk $[(1 + p, 1)]$ disebut **bilangan bulat positif,** dan ditulis $[(1 + p, 1)] = s$ untuk setiap $p \in \mathbf{N}$; masing-masing bilangan bulat dari bentuk $[(1, 1 + q)]$ disebut **bilangan bulat negatif** dan ditulis $[(1, 1 + q)] = -q$ untuk masing-masing $q \in \mathbf{N}$. Ini menghasilkan

$$\mathbf{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}$$

Mengamati yang telah kita identifikasi masing-masing bilangan bulat positif $[(1 + p, 1)]$ dengan bilangan asli p, dan juga $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$. Kita menjustifikasi identifikasi ini dengan menunjukkan bahwa operasi yang dinyatakan di J sepakat dengan definisi ini untuk bilangan asli dalam bagian sebelumnya. Jika $m = [(1 + m, 1)]$ dan $n = [(1 + n, 1)]$ adalah bilangan bulat positif (bilangan asli), maka

$$\begin{aligned} [(1 + m, 1)] + [(1 + n, 1)] &= [(1 + m + 1 + n, 1 + 1)] \\ &= [(1 + m + n, 1)] = m + n \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} [(1 + m, 1)] \bullet [(1 + n, 1)] &= [(1 + m + n + m \bullet n + 1, 1 + m + 1 + n)] \\ &= [(1 + m \bullet n, 1)] = m \bullet n \end{aligned}$$

Jadi, **Z** adalah suatu perluasan dari himpunan bilangan asli **N**. Sehingga dengan sistem bilangan asli, hukum-hukum berikut valid di **Z**:

Hukum Asosiatif untuk Penjumlahan

$j + k + \ell = j + (k + \ell)$ untuk semua $j, k, \ell \in \mathbf{Z}$

Hukum Komutatif untuk Penjumlahan

$j + k = k + j$ untuk semua $j, k \in \mathbf{Z}$

Hukum Asosiatif untuk Perkalian

$(j \bullet k) \bullet \ell = j \bullet (k \bullet \ell)$ untuk semua $j, k, \ell \in \mathbf{Z}$

Hukum Komutatif untuk Perkalian

$j \bullet k = k \bullet j$ untuk semua $j, k \in \mathbf{Z}$

Hukum Distributif

$j \bullet (k + \ell) = (j \bullet k) + (j \bullet \ell)$ untuk semua $j, k, \ell \in \mathbf{Z}$

Sistem **Z** memiliki identitas aditif dan identitas multiplikatif. Jika $j = [(m, n)]$ adalah suatu bilangan bulat sebarang, maka

$$j + 0 = [(m, n)] + [(1, 1)] = [(m + 1, n + 1)] = [(m, n)] = j$$

dan

$$j \bullet 1 = [(m, n)] \bullet [(2, 1)] = [(2m + n, m + 2n)] = [(m, n)] = j$$

jadi, 0 adalah identitas untuk penjumlahan, dan 1 adalah identitas untuk perkalian. Selain itu,

$$j \bullet 0 = [(m, n)] \bullet [(1, 1)] = [(m + n, m + n)] = [(1, 1)] = 0$$

dan juga perkalian dengan bilangan bulat 0 selalu menghasilkan 0. Ini juga benar bahwa jika suatu perkalian dua bilangan bulat adalah 0, maka paling sedikit satu dari faktor-faktor itu harus 0. Hasil ini dikenal sebagai **hukum perkalian aritmetika (the product law of arithmetic).**

Kini kita menunjukkan bahwa kekurangan dalam sistem bilangan asli disebutkan pada permulaan bagian ini telah dihilangkan; yaitu, persamaan

$$k + x = j$$

memiliki solusi $x \in J$ untuk setiap pasangan bilangan bulat j, k. Andaikan

$k = [(m, n)]$ dan $j = [(a, b)]$. Maka

$$\begin{aligned}[(m, n)] + [(a + n, b + m)] &= [(m + a + n, n + b + m)] \\ &= [(a, b)]\end{aligned}$$

Dan juga x = [(a + n, b + m)] adalah suatu solusi untuk persamaan k + x = j . Khususnya, ada suatu solusi untuk persamaan

$$k + x = 0$$

diberikan dengan x = [(1 + n, 1 + m)] = [(n, m)] $\bullet$ [(n, m)] disebut invers aditif dari [(m , n)]. Kita mencatat invers aditif dri masing-masing bilangan bulat positif p = [(1 + p, 1)] adalah [(1, 1 + p)] = -p dan invers aditif dari masing-masing bilangan bulat negatif –q = [(1, 1 + q)] adalah [(1 + q, 1)] = q. Invers aditif dari 0 = [(1, 1)] adalah tentu, 0.

Pengurangan didefinisikan sebagai berikut: Jika k = [(m, n)] dan j = [(a, b)], maka selisih j – k didefinisikan sebagai jumlah dari j dan invers aditif dari k. Yakni,

$$j - k = [(a, b)] + [(n, m)] = [(a + n, b + m)]$$

Mengamati j – k adalah solusi x untuk persamaan k + x = j. Juga, 0 – k (ditulis sederhana sebagai -k) adalah [(n, m)], invers aditif dari k.

Hukum Kanselasi

(a) $j + k = j + \ell$ mengakibatkan $k = \ell$ untuk semua $j, k, \ell \in$ **Z**

(b) $j \bullet k = j \bullet \ell$ mengakibatkan $k = \ell$ untuk semua $j, k, \ell \in$ **Z**; $j \neq 0$.

Suatu relasi urutan < diperkenalkan ke dalam **Z** dengan menulis j < k ditetapkan ada suatu bilangan asli n dengan j + n = k. Relasi ini dengan mudah dilihat adalah transitif dan secara jelas memperluas gagasan urutan di **N**. Selain itu, jika j < k, maka j + n = k untuk suatu n $\in$ **N**. Sehingga –k + n = -j, dan juga –k < -j. Jadi, diperoleh

$$\ldots < -3 < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < 3 < \ldots$$

Lagi, kita menulis k > j apabila j < k, dan juga $j \leq k$ berarti j < k atau lainnya j = k. Akhirnya, kita mencatat bahwa hukum trichotomy valid di **Z** tetapi tidak terurut-baik dalam pengertian bahwa tidak setiap himpunan bagian takkosong dari **Z** memiliki elemen pertama.

Hal ini memperkaya sistem bilangan kita untuk mencakup semua solusi dari persamaan

$$k + x = j \qquad j, k \in \mathbf{Z}$$

adalah asli untuk bertanya tentang solusi untuk persamaan

$$k \bullet x = j$$

Jika k = 0 dan $j \neq 0$, maka tidak ada solusi karena $0 \bullet x = 0$ untuk setiap bilangan bulat x. Juga, jika k = j = 0, maka setiap x adalah suatu solusi . Sehingga kita perhatikan persamaan $k \bullet x = j$ hanya untuk kasus di mana $k \neq 0$. Kini $2 \bullet x = 1$ tidak memiliki solusi di **Z**, atau secara ekuivalen, tidak ada bilangan bulat yang membantu sebagai suatu invers multiplikatif untuk bilangan bulat 2. Ini memotivasi kita untuk memperluas sistem bilangan lagi. Misalkan

$$T = \{j / k : j, k \in \mathbf{Z}, k \neq 0\}$$

Kini, j / k adalah singkatan dari suatu pasangan terurut bilangan bulat dengan $k \neq 0$. Kemudian kita dapat interpretasi j / k sebagai suatu kuosien dari dua bilangan bulat. Suatu relasi dinyatakan di T dengan

$$j / k \sim r / s \qquad \text{ditetapkan } js = rk$$

Silahkan pembaca verifikasi bahwa adalah suatu relasi ekuivalen, dan kita menyatakan bilangan rasional sebagai kelas ekuivalensi yang menghasilkan relasi ekuivalensi ini.

Definisi 2.2 Bilangan Rasional

Suatu bilangan rasional adalah suatu kelas ekuivalensi dari pasangan terurut bilangan bulat.

Kita menunjuk himpunan dari semua bilangan rasional dengan **Q**. Misalnya, ½ dalam kelas yang sama sebagai 2 / 4 dan (-3 / -6), tetapi 2 / 3 adalah dalam kelas ekuivalensi berbeda. Ini sesuai dengan bilangan rasional [1/2] disingkat ½ (atau 2 / 4 atau (-3 / -6)) atau setiap pasangan terurut bilangan bulat lainnya dalam kelas itu. Bilangan rasional [2 / 3] terkait dengan 2 / 3 atau 4 / 6 atau (-10 / -15), dan seterusnya. Kita dapat bebas menunjuk suatu kelas ekuivalensi dengan setiap anggota dari kelas. Berikut kita definisikan suatu aritmetika dalam himpunan **Q** dari semua bilangan rasional.

Definisi 2.3 Penjumlahan

$j / k + r / s = (js + rk) / ks$ untuk semua bilangan rasional $j / k, r / s \in \mathbf{Q}$

Perkalian

$j / k \bullet r / s = jr / ks$ untuk semua bilangan rasional $j / k, r / s \in \mathbf{Q}$

Operasi penjumlahan dan perkalian dari bilangan rasional terdefinisi-baik.

Kita identifikasi bilangan rasional dari bentuk $j / 1$ dengan j (di mana $j \in \mathbf{Z}$) dan menyebut **bilangan cacah bilangan rasional (rational numbers whole numbers).** Ingat bahwa pasangan terurut $12 / 4 \sim 3 / 1$, dan juga $12 / 4$ adalah bilangan cacah yang kita maksudkan dengan 3. Representasi ini mengidentifikasi suatu himpunan bagian tertentu dari **Q**, yaitu **bilangan cacah,** dengan himpunan **Z** dari semua bilangan bulat. Sehingga **Z** $\subset$ **Q**. Silahkan pembaca justifikasi identifikasi ini dengan menunjukkan bahwa aritmetika di **Q** sepakat suatu perluasan dari sistem semua bilangan bulat.

Kekurangan di **Z** telah dieliminasi; yaitu, persamaan

$$v \bullet x = u$$

Selalu memiliki solusi x $\in$ **Q**, di mana u, v $\in$ **Q**. Dalam kenyataan, jika v = j / k dengan j $\neq$ 0 dan u = r / s, maka x = rk / js adalah suatu solusi terhadap persamaan

$$v \bullet x = 1 \qquad \text{di mana } v = j / k$$

x = k / j disebut **invers multiplikatif** dari bilangan rasional taknol j / k.

Pembagian didefinisikan sebagai berikut. Jika j / k = v, 0 dan r / s = u, maka kuosien $\frac{u}{v}$ didefinisikan sebagai product dari u dan invers multiplikatif dari v. Yakni,

$$\frac{u}{v} = (r / s) \bullet (k / j) = rk / js$$

Mengamati bahwa $\frac{u}{v}$ adalah solusi terhadap persamaan v • x = u. Juga, $\frac{1}{v}$ = k / j, invers multiplikatif dari v.

Kita merangkum sifat-sifat berikut dari **Q** dalam definisi teorema berikut.

3. Field

Definisi 3.1 Suatu field **F** adalah suatu himpunan takkosong bersama-sama dengan dua operasi biner penjumlahan (+) dan perkalian (•) yang memenuhi kondisi berikut:

Penjumlahan

A1. **Tertutup:** u + v $\in$ **F** untuk setiap u, v $\in$ **F**

A2. **Asosiatif:** (u + v) + w = u + (v + w) untuk setiap u, v, w $\in$ **F**

A3. **Identitas:** Ada 0 $\in$ **F** $\ni$ u + 0 = u untuk setiap u $\in$ **F**

A4. **Invers:** Untuk setiap u $\in$ **F**, ada –u $\in$ **F** $\ni$ u + (-u) = 0

A5. **Komutatif:** u + v = v + u untuk setiap u, v $\in$ **F**

Perkalian

M1. **Terutup:** $u \bullet v \in \mathbf{F}$ untuk setiap $u, v \in \mathbf{F}$

M2. **Asosiatif:** $(u \bullet v) \bullet w = u \bullet (v \bullet w)$ untuk setiap $u, v, w \in \mathbf{F}$

M3. **Identitas/Unity:** Ada $1 \in \mathbf{F} \ni u \bullet 1 = u$ untuk semua $u \in \mathbf{F}$

M4. **Invers:** Untuk setiap $u \in \mathbf{F}$, $u \neq 0$, ada $1/u \in \mathbf{F} \ni u \bullet 1/u = 1$

$$\left.\begin{array}{r} \textbf{Distributif: } u \bullet (v + w) = (u \bullet v) + (u \bullet w) \\ \\ (v + w) \bullet u = (v \bullet u) + (w \bullet u) \end{array}\right\} \text{ untuk semua } u, v, w \in \mathbf{F}$$

M5. **Komutatif:** $u \bullet v = v \bullet u$ untuk setiap $u, v \in \mathbf{F}$

Teorema **Q** adalah suatu field

Suatu bilangan rasional $u = j / k$ disebut **positif** jika j dan k adalah bilangan bulat positif atau bilangan bulat **negatif**. Jika salah satu dari dua bilangan bulat j dan k adalah suatu bilangan bulat positif dan yang lain adalah bilangan bulat negatif, maka $u = j / k$ disebut **bilangan rasional negatif.** Bilangan rasional 0 adalah tidak positif maupun negatif. Kita mencatat bahwa definisi ini sepakat dengan yang didefinisikan di **Z**; yaitu, **suatu bilangan cacah positif** adalah **suatu bilangan bulat positif,** dan suatu **bilangan cacah negatif** adalah **suatu bilangan bulat negatif.** Ini diikuti dari definisi 2.3 bahwa jumlah dan product dari dua bilangan rasional positif adalah juga bilangan rasional positif.

Suatu relasi urutan $<$ yang diperkenalkan ke dalam **Q** dengan menulis $u < v$ ditetapkan ada suatu bilangan rasional positif w dengan $u + w = v$. Secara jelas $0 < u$ jika dan hanya jika u adalah suatu bilangan rasional positif. Hukum trichotomy berperan, seperti masing-masing dari dua sifat urutan berikut:

1. Jika $u < v$, maka $u + w \quad v + w$ untuk setiap $w \in \mathbf{Q}$.
2. Jika $u < v$ dan $w > 0$, maka $u \bullet v < v \bullet w$.

Setiap field yang memiliki relasi urutan yang didefinisikan di dalamnya memenuhi hukum trichotomy dan sifat 1 dan 2 di atas disebut **field terurut.** Sistem bilangan rasional adalah suatu field terurut.

Ini dapat muncul bahwa kita harus tentu saja mengakhiri dengan memperluas sistem bilangan kita, tetapi masih ada suatu kekurangan kembali dalam sistem bilangan rasional.

Kita mengeksplor kekurangan ini dalam bagian berikutnya, di mana kita menyimpulkan perkembangan dari sistem bilangan real.

4. Konstruksi Sistem Bilangan Real

Dalam bagian ini kita mengembangkan sistem bilangan real. Untuk menjustifikasi kebutuhan untuk memperluas sistem bilangan rasional, kita mengeksplor lagi suatu kekurangan yang ada dalam bilangan rasional. Ini merupakan cara motivasi yang diusulkan kepada kita untuk mengembangkan bilangan bulat dari bilangan asli dan kemudian bilangan rasional dari bilangan bulat.

Apakah jenis kekurangan yang ada dalam sistem dari semua bilangan rasional? Bagaimana juga, bilangan rasional memenuhi banyak sifat-sifat ini yang membuatnya suatu field terurut. Apa lagi yang kita inginkan? Kekurangan tajam dalam sistem bilangan rasional merupakan suatu yang sedikit lebih tajam; kita menyebutnya **kelengkapan.** Sebelum memperlihatkan sifat ini kita catat lemma berikut.

Lemma Tidak ada bilangan rasional r sedemikian sehingga $r^2 = 2$.

Bukti: Andaikan $r^2 = 2$. r dapat ditulis dalam bentuk $r = p / q$, di mana $q \in \mathbf{N}$, dalam banyak cara berbeda yang takhingga. Misalkan $A = \{q \in \mathbf{N} : \text{ada } p \in \mathbf{Z} \text{ dengan } p / q = r\}$. Dengan well-ordering property dari **N**, A memiliki elemen pertama, yang kita nyatakan dengan q_0. Maka $r = p_0 / q_0$ untuk suatu $p_0 \in \mathbf{Z}$. Karena $p_0^2 / q_0^2 = r^2 = 2$, dan juga p_0^2 adalah genap. Sehingga, p_0 genap. Jadi, $p_0 = 2k$ untuk suatu $k \in \mathbf{Z}$, dan juga $2q_0^2 = p_0^2 = 4k^2$ atau $q_0^2 = 2k^2$. Sehingga q_0^2 adalah genap, dan juga q_0 harus genap. Misalkan $q_0 = 2n$, di mana $n \in \mathbf{N}$. Maka $r = p_0 / q_0 = 2k / 2n = k / n$. Secara jelas, kemudian, $n \in A$ dan $n < q_0$, suatu kontradiksi terhadap hipotesis bahwa q_0 adalah elemen pertama di A. Jadi, tidak ada bilangan rasional r dengan $r^2 = 2$.

Berikut adalah suatu variasi dari **metode cut Dedekind** untuk menyatakan bilangan real: metode cut disajikan oleh matematisi Jerman Richard Dedekind lebih dari abad yang lalu.

Definisi 4.1 Suatu sinar (ray) dalam himpunan dari semua bilangan rasional **Q** adalah suatu himpunan bagian takkosong murni $U \subset \mathbf{Q}$ yang memenuhi sifat-sifat berikut:

(a) Jika $x \in U$ dan $y > x$, maka $y \in U$.

(b) U tidak memiliki elemen pertama.

Pembaca dapat mengenal U sebagai suatu **interval rasional** pada garis real, yaitu, suatu himpunan yang memuat semua titik-titik rasional ke kanan dari suatu titik real P tertentu. Selanjutnya, sinar U diidentifikasi dengan menentukan titik P. Ada dua kasus yang bergantung pada apakah titik P adalah rasional ataukah titik P bukan rasional:

1. Himpunan U’ **=** **Q** **–** U dari semua yang tidak rasional di U memiliki suatu elemen terbesar r_0.
2. U**’** tidak memiliki elemen terbesar.

Jika U’ memiliki suatu elemen terbesar r_0, maka sinar U di **Q** dapat dinyatakan dengan

$$U = \{x \in \mathbf{Q} : x > r_0\}.$$

Ini mudah untuk didemostrasikan bahwa setiap himpunan dari bentuk

$$\{x \in \mathbf{Q} : x > r\}$$

untuk suatu $r \in \mathbf{Q}$ tertentu adalah suatu sinar di **Q** tipe 1. Kita menyebut **himpunan sinar rasional** dan identifikasi sinar $\{x \in \mathbf{Q} : x > r\}$ dengan bilangan rasional r. Suatu **field terurut F** disebut **lengkap** jika masing-masing sinar dalam field dapat diidentifikasi (dalam pengertian di atas) dengan suatu bilangan di field. Dengan kata lain, setiap sinar U harus dari tipe 1; yaitu, harus ada suatu $t \in \mathbf{F}$ sedemikian sehingga $U = \{x \in \mathbf{F} : x > t\}$.

Teorema 4.1 **Q** tidak lengkap.

Bukti: Misalkan $V = \{x \in \mathbf{Q} : x > 0 \text{ dan } x^2 > 2\}$. Kita mula-mula demonstrasikan bahwa V adalah suatu sinar di **Q.** Secara jelas $\Phi \neq V \subset \mathbf{Q}$**;** dalam kenyataan masing-masing bilangan asli kecuali 1 di V. Andaikan $x \in V$ dan $y > x$. Maka $y > U$ dan $y^2 > xy > x^2 > 2$, dan juga $y \in V$. Kini jika x_0 adalah elemen pertama di V, maka $x_0 > 0$ dan $x_0^2 > 2$. Sehingga ada suatu bilangan asli n dengan

$$n > \frac{2x_0}{x_0^2 - 2} \text{ dan } \frac{1}{n} < \frac{x_0^2 - 2}{2x_0}$$

Maka

$$x_0^2 - 2 > \frac{2x_0}{n}$$

dan juga

$$x_0^2 - \frac{2x_0}{n} + \frac{1}{n^2} > 2$$

sehingga

$$(x_0 - \frac{1}{n})^2 > 2$$

Kini

$$x_0 - \frac{1}{n} > x_0 - \frac{x_0^2 - 2}{2x_0} = \frac{x_0^2 + 2}{2x_0} > 0$$

dan juga x_0 - 1 / n $\in$ V. Tetapi x_0 - 1 / n < x_0, yang kontradiksi kenyataan bahwa x_0 adalah elemen pertama di V. Jadi, V tidak memiliki elemen pertama, dan ini membuktikan bahwa V adalah suatu sinar di **Q**.

Kita menunjukkan bahwa V' tidak memiliki elemen terbesar dan juga V bukan suatu sinar rasional. Andaikan r_0 adalah elemen terbesar di V'. Karena 1 $\in$ V', kita harus memiliki $r_0 \geq 1$. Karena $r_0 > 0$ dan $r_0 \notin$ V, $r_0^2 \geq 2$. Tetapi $r_0^2 \neq 2$ dengan lemma sebelumnya, dan juga $r_0^2 < 2$. Kemudian kita menentukan bahwa ada suatu bilangan asli m dengan

$$m > \frac{2r_0 + 1}{2 - r_0^2} \text{ dan } \frac{1}{m} < \frac{2 - r_0^2}{2r_0 + 1}$$

Kini

$$\frac{2r_0}{m} + \frac{1}{m} < 2 - r_0^2$$

dan karena $1/k^2 \leq 1/k$ untuk setiap k $\in$ N,

$$\frac{2r_0}{m} + \frac{1}{m^2} < 2 - r_0^2$$

Karena

$$r_0^2 + \frac{2r_0}{m} + \frac{1}{m^2} < 2$$

dan juga

$$(r_0 + \frac{1}{m})^2 < 2$$

Berikut $r_0 + 1 / m \in V'$ dan masih $r_0 + 1 / m > r_0$, di mana r_0 diasumsikan elemen terbesar di V'. Kontradiksi ini menjamin bahwa V' tidak memiliki elemen terbesar.

Karena kita telah menghasilkan suatu sinardi **Q** dari tipe 2, field terurut bilangan rasional tidak lengkap.

Setiap sinar di **Q** dari tipe 2 disebut **sinar irasional.** Kita kini mempersiapkan untuk menyatakan apa yang kita maknai dengan bilangan real.

Definisi 4.2 Suatu bilangan real adalah suatu sinar di **Q.**

Kita menunjuk himpunan dari semua bilangan real dengan **R** dan menjelaskan lagi dua jenis bilangan real: **sinar rasional di Q,** disebut **bilangan rasional,** dan **sinar irasional di Q,** disebut **bilangan irasional.**

Juga, berikut pola perkembangan yang ditetapkan dalam bagian sebelumnya, kita menyatakan suatu aritmetika di **R**.

Definisi 4.3 Penjumlahan

U + V = {u + v: u ∈ U dan v ∈ V untuk semua U, V ∈ **R**}

Perkalian

(a) 0 ∉ U, U ∉ V : U • V = {uv : u ∈ U dan v ∈ V}

(b) 0 ∈ U, 0 ∉ V : U • V = {r ∈ **Q** : r > uy untuk suatu u ∈ U dan suatu y ∈ V' dengan y ≥ 0}

(c) 0 ∉ U, 0 ∈ V : U • V = {r ∈ **Q** : r > xv untuk suatu x ∈ U' dengan x ≥ 0 dan suatu v ∈ V}

(d) 0 ∈ U, 0 ∈ V : U • V = {r ∈ **Q** : r > xy untuk suatu x ∈ U' dan suatu y ∈ V'}

Untuk menunjukkan bahwa penjumlahan dan perkalian bilangan real adalah operasi terdefinisi-baik perlu untuk menentukan bahwa dalam masing-masing kasus U + V dan U • V adalah suatu sinar di **Q**. Kepada pembaca disilahkan untuk membuat verifikasi ini bahwa masing-masing sinar rasional di **Q**, $\{x \in \mathbf{Q} : x > r\}$ untuk suatu $r \in \mathbf{Q}$ tertentu diidentifikasi dengan bilangan rasional r. Jadi, $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$**;** juga diserahkan kepada pembaca untuk menjustifikasi identifikasi ini dengan menunjukkan bahwa operasi yang dinyatakan di atas sesuai dengan penjumlahan dan perkalian bilangan rasional yang dinyatakan dalam bagian sebelumnya. Jadi, **R** adalah suatu perluasan dari sistem bilangan **Q**.

Bilangan real $\{x \in \mathbf{Q} : x > 0\} = 0$ adalah **identitas penjumlahan di R**, dan jika U adalah setiap sinar di **Q** (U adalah setiap bilangan real), maka

$$-U = \{x \in \mathbf{Q} : x > -r \text{ untuk suatu } r \in U'\}$$

adalah **invers aditif dari U.** Lagi pula, $\{x \in \mathbf{Q} : x > 1\} = 1$ adalah **identitas multiplikatif di R,** dan jika U adalah setiap bilangan real taknol, maka

$$U^{-1} = \begin{cases} \left\{ x \in \mathbf{Q} : x > \dfrac{1}{r} \text{ untuk suatu } r \in U' \right\} & \text{jika } 0 \in U \\ \left\{ x \in \mathbf{Q} : x > \dfrac{1}{r} \text{ untuk suatu } r \in U' \text{ dengan } r > 0 \right\} & \text{jika } 0 \notin U \end{cases}$$

adalah **invers multiplikatif dari U.** Kita meragkum sifat-sifat dari **R** dalam teorema berikut.

Teorema 4.2 R adalah suatu field.

Suatu bilangan real U disebut **positif** jika U' memuat suatu bilangan rasional positif. Ini mudah untuk mendemonstrasikan jumlah dan product dari dua bilangan real positif adalah juga positif untuk setiap bilangan real U berlaku salah satu; U adalah positif atau yang lain –U adalah positif (bilangan real seperti itu disebut negatif) atau yang lain U = 0. Kita memperkenalkan suatu relasi urutan ke dalam R dengan menyatakan

$$U < V \qquad \text{ditetapkan} \qquad V \subset U$$

Secara ekuibalen, $U < V$ jika $U' \subset V'$, di mana $U' = \mathbf{Q} - U$ dan $V' = \mathbf{Q} - U$. Maka U adalah positif jika dan hanya jika $U > 0$. Relasi urutan adalah transitif secara jelas. Lagi pula, hukum trichotomy berperan, sehingga berlaku sifat-sifat urutan:

1. Jika $U < V$, maka $U + V < V + W$ untuk setiap $W \in$ **R**.

2. Jika $U < V$ dan $W > 0$, maka $U \bullet V < V \bullet W$.

Untuk merangkum, **R** adalah suatu field terurut. Lemma berikut dapat menentukan kelengkapan di **R**.

Lemma Jika $r \in$ **Q** dan $V \in$ **R** , $r \in V$ jika dan hanya jika $r > V$.

Bukti: Misalkan $r \in V$. Maka $\{x \in \mathbf{Q} : x > r\} \subset V$, dan juga $V < \{x \in \mathbf{Q} : x > r\} = r$. Sebaliknya, andaikan $r > V$. maka dengan definisi urutan $\{x \in \mathbf{Q} : x > r\} \subset V$. Karena ada suatu $r_0 \in V$ dengan $r_0 \leq r$. Jadi, $r \in V$.

Teorema berikut menentukan kekurangan dalam sistem bilangan rasional yang telah diabaikan. Suatu sinar di **R** adalah suatu himpunan bagian murni takkosong $A \subset$ **R** yang memenuhi: (a) Jika $x \in A$ dan $y > x$, maka $y \in A$; dan (b) A tidak memiliki elemen pertama.

Teorema 4.3 Teorema Dedekind **R** adalah lengkap.

Bukti: Misalkan A adalah setiap sinar di **R**; kita harus menunjukkan bahwa A' memiliki suatu elemen terbesar. Nyatakan himpunan

$$U = \{x \in \mathbf{Q} : x > W \text{ untuk setiap } W \in A'\}$$

(Disini, tentu, himpunan $A' = \mathbf{R} - A$.) Kita mula-mula menentukan bahwa U adalah suatu sinar di **Q**.

Misalkan $V \in A$ adalah sebarang. Maka $V > W$ untuk setiap $W \in A'$, karena $V \leq W$ mengakibatkan $W \in A$. Kini, $r \in V$ mengakibatkan $r > V$ (dengan lemma), dan juga $r > W$ untuk setiap $W \in A'$. Sehingga $r \in U$. Ini mengikuti masing-masing $V \in A$ memenuhi $V \subseteq U$; khususnya, $U \neq \Phi$. Kini misalkan $W \in A'$ adalah sebarang. Maka $r \in W'$ mengakibatkan $r \leq W$ (juga, dengan lemma), dan juga $r \in U'$.

Akibatnya, masing-masing $W \in A'$ memenuhi $W' \subseteq U'$; khususnya $U' \neq \Phi$. Ini telah ditentukan bahwa U adalah himpunan bagian murni takkosong dari **Q** dan lagi pula, untuk setiap $W \in A'$ dan $V \in A$, $V \subseteq U \subseteq W$.

Selanjutnya, sifat (a) dan (b) dari Definisi 4.1 menunjukkan dengan peran untuk himpunan U.

(a) Andaikan bahwa $x \in U$ dan $y > x$. Maka $x > W$ untuk setiap $W \in A'$, dan juga $y > W$ untuk setiap $W \in A'$. Sehingga $y \in U$.

(b) Andaikan bahwa r_0 adalah elemen pertama di U. Maka $r_0 \in U$, dan juga $r_0 > W$ untuk setiap $W \in A'$. Sehingga $r_0 \in A$. Misalkan $V \in A$ adalah sebarang. Kini $k \in V$ mengakibatkan bahwa $k \in U$ (karena masing-masing $V \in A$ memenuhi $V \subseteq U$), dan juga $k \geq r_0$ (karena r_0 adalah elemen pertama di U).

Dengan lemma, $r_0 \leq V$. Sehingga r_0 harus merupakan elemen pertama di A, tetapi ini merupakan suatu kontradiksi (mengingat A tidak memiliki elemen pertama). Jadi, U tidak memiliki elemen pertama.

Ini mengikuti dari Definisi 4.1 bahwa U adalah suatu sinar di **Q**; yaitu $U \in$ **R**.

Kini jika $V \in A$, maka $V \subseteq U$, dan juga $U \leq V$. Karena A tidak memiliki elemen pertama, kita harus peroleh $U \in A'$ (sebaliknya U merupakan elemen pertama di A). Jika $W \in A'$, maka $U \subseteq W$, dan juga $W \leq U$. Jadi, W adalah elemen terbesar di A'. Jadi, **R** adalah lengkap.

Sistem **R** adalah suatu **field terurut lengkap.** Dalam paragraf berikut suatu yang lebih berguna, tetapi secara total ekuivalen, bentuk dari aksioma kelengkapan dikembangkan.

Suatu bilangan real u disebut **batas atas** dari himpunan takkosong $S \subset$ **R** ditetapkan $u \geq x$ untuk setiap $x \in S$; suatu bilangan real ℓ disebut **batas bawah** dari S ditetapkan $\ell \leq x$ untuk setiap $x \in S$. S dikatakan **terbatas atas** jika S memiliki suatu batas atas; dengan cara yang sama, S dikatakan **terbatas bawah** jika S memiliki batas bawah. Himpunan S disebut **terbatas** jika ia terbatas atas dan terbatas bawah.

Jika u adalah suatu batas atas dari S dan $u' > u$, maka secara jelas u' adalah suatu batas atas dari S; secara analogi jika ℓ adalah suatu batas bawah dari S dan $\ell' < \ell$, maka ℓ' adalah suatu batas bawah dari S. Kita menentukan himpunan dari semua batas atas dari S dengan U_S dan himpunan dari semua batas bawah dari S dengan L_S. Tentu, jika S tidak terbatas atas, maka $U_S = \Phi$; dan jika tidak terbatas bawah, $L_S = \Phi$.

Definisi 4.4 Misalkan $M \in$ **R** disebut **batas atas terkecil** dari S (atau Supremum dari S), dan kita tulis $M = \sup S$ ditetapkan:

(a) $M \in U_S$.

(b) $M \leq u$ untuk setiap $u \in U_S$.

m $\in$ **R** disebut **batas bawah terbesar** dari S (atau infimum dari S), dan ditulis m = inf S ditetapkan:

(a) m $\in L_S$.

(b) m $\geq \ell$ untuk setiap $\ell \in L_S$.

Sifat **R** berikut, dikenal sebagai **sifat batas-batas terkecil (least-upper-bound property)** ekuivalen dengan teorema Dedekind.

Teorema 4.4 Setiap himpunan takkosong S $\subset$ **R** yang terbatas atas memiliki suatu batas atas terkecil.

Bukti: Misalkan $\Phi \neq S \subset$ **R** dan andaikan bahwa S terbatas atas. Nyatakan himpunan A dengan

A = {x $\in$ **R**: x > 0 untuk setiap u $\in U_S$}

Kita mula-mula menentukan A adalah suatu sinar di **R**. A $\neq \Phi$ karena S terbatas atas. Juga, A' $\neq \Phi$ karena S $\subseteq$ A'. Jadi, A adalah himpunan bagian murni takkosong dari R. Kita tunjukkan bahwa A adalah suatu sinar di **R**:

(a) Jika x $\in$ A dan y > x, maka x > u untuk suatu u $\in U_S$. Jelas y > u dan juga y $\in$ A.

(b) Andaikan a_0 adalah elemen pertama di A. Maka a_0 > u untuk suatu u $\in U_S$. Kini u + u < a_0 + u < a_0 + a_0 dan juga u < $\frac{1}{2}(a_0 + u) <$ a_0. Karena $\frac{1}{2}(a_0 + u) \in$ A, dan ini kontradiksi dengan asumsi kita bahwa a_0 adalah elemen pertama di A. Jadi, A tidak memiliki elemen pertama.

Karena A adalah suatu sinar di **R**. Ini mengikuti dari teorema Dedekind bahwa A' memiliki elemen terbesar M. Kita demonstrasikan bahwa M adalah batas atas terkecil dari S.

(a) Jika M < x untuk suatu x $\in$ S, maka M < $\frac{1}{2}(m + x) <$ x mengakibatkan $\frac{1}{2}(M + x) \notin U_S$, dan juga $\frac{1}{2}(M + x) \notin$ A. Tetapi kemudian $\frac{1}{2}(M + x) \in$ A', dan ini kontradiksi dengan fakta bahwa M adalah elemen terbesar di A'. Jadi, M $\geq$ x untuk setiap x $\in$ S dan juga M $\in U_S$.

(b) Karena M $\notin$ A, M $\leq$ u untuk setiap u $\in U_S$. Akibatnya, M = sup S.

Ekuivalensi dari teorema Dedekind dan sifat batas-atas-terkecil ditetapkan dengan membuktikan teorema Dedekind merupakan konsekuensi dari sifat batas-atas-terkecil.

5. Sifat-Sifat Bilangan Real

Himpunan dari semua bilangan real **R** adalah suatu himpunan takkosong bersama-sama dengan dua operasi biner penjumlahan (+) dan perkalian (•) yang memenuhi aksioma-aksioma berikut:

1. $(a + b) + c = a + (b + c)$ untuk setiap a, b, c $\in$ **R**
2. $a + b = b + a$ untuk setiap a, b $\in$ **R**
3. Ada $0 \in$ **R** dengan $a + 0 = a$ untuk setiap a $\in$ **R**
4. Untuk setiap a $\in$ **R**, ada suatu elemen –a $\in$ **R** dengan $a + (-a) = 0$
5. $(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$ untuk setiap a, b, c $\in$ **R**
6. $a \bullet b = b \bullet a$ untuk setiap a, b $\in$ **R**
7. Ada $1 \in$ **R** dengan $a \bullet 1 = a$ untuk setiap a $\in$ **R**
8. Untuk setiap a $\in$ **R** sedemikian sehingga $a \neq 0$ ada suatu elemen $1 / a \in$ **R** dengan $a \bullet (1 / a) = 1$
9. $a \bullet (b + c) = (a \bullet b) + (a \bullet c)$ untuk setiap a, b, c $\in$ **R**

Aksioma-aksioma di atas menceritakan kepada kita bahwa **R** adalah suatu field. Ada suatu himpunan bagian P dari **R** yang memenuhi tiga sifat berikut:

1. Jika a, b $\in$ P, maka $a + b \in$ P.
2. Jika a, b $\in$ P, maka $a \bullet b \in$ P.
3. Untuk setiap a $\in$ **R** secara tepat satu dari yang berikut berperan: a $\in$ P atau –a $\in$ P atau $a = 0$.

Setiap field yang memiliki himpunan bagian P memenuhi sifat 1 sampai dengan 3 di atas disebut **field terurut.** Relasi urutan < yang dinyatakan dengan $a < b$ ditetapkan $b - a \in P$. P adalah himpunan dari semua bilangan real positif, dan berikut dari atas bahwa:

1. Jika $a < b$ dan $b < c$, maka $a < c$ (hukum transitif)
2. Untuk semua a, b $\in$ **R** secara tepat satu dari yang berikut berperan:
   $a < b$ atau $b < a$ atau $a = b$ (hukum trichotomy)
3. Jika $a < b$, maka $a + c < b + c$ untuk semua c $\in$ **R**
4. Jika $a < b$ dan $c > 0$, maka $a \bullet c < b \bullet c$.

Lagi pula, satu aksioma selanjutnya dibutuhkan untuk menjamin bahwa kita memiliki sifat-sifat biasa dan familiar dari sistem bilangan real.

Aksioma Kelengkapan (atau Aksioma Dedekind)

Setiap himpunan bagian takkosong dari **R** yang terbatas atas memilikin suatu batas atas terkecil.

Pembaca dapat mengenal aksioma kelengkapan, diberikan di sini, sebagai sifat batas atas terkecil dari **R** yang telah dibuktikan sebelumnya. Jadi, **R** adalah suatu **field terurut lengkap.**

Hasil pertama dalam bagian ini adalah sifat **R** yang ditentukan penggunaan berulang-ulang untuk bagian sebelumnya. Ini dikenal sebagai **sifat archimedes (archimedean property),** dan kenyataannya bahwa sistem bilangan real sifat ini berperan bagi kita tentang **R** sebagai **field terurut archimedes lengkap (complete archimedean ordered field).** Sebelum menyatakan sifat archimedes kita membutuhkan lemma berikut.

Lemma Jika M = sup S dan y < M, maka ada suatu $x_0 \in$ S dengan $x_0 >$ y.

Bukti: Andaikan bahwa na ≤ b untuk setiap n ∈ **N**. Misalkan

S = {na: n ∈ **N**}

S terbatas atas karena b adalah suatu batas atas dari S. Dengan aksioma kelengkapan, M = sup S ada. Kini M – a < M, dan juga dengan lemma sebelumnya ada suatu $n_0 \in$ **N** sedemikian sehingga $n_0 a >$ M – a. Tetapi kemudian $n_0 a + a >$ M, dan juga $(n_0 + 1)a >$ M. Karena $n_0 + 1 \in$ **N**, ini kontradiksi bahwa $(n_0 + 1)a \in$ S dan $(n_0 + 1)a >$ sup S. Jadi, na ≤ b tidak dapat berperan untuk setiap n ∈ **N**.

Corollary berikut merupakan suatu bentuk berguna secara khusus dari sifat archimdes.

Corollary Diberikan ∈ > 0 ada suatu bilangan asli n sedemikian sehingga 1 / n < ∈.

Kita menggunakan notasi berikut untuk **interval** bilangan real. Ini diasumsikan bahwa a dan b adalah bilangan real dengan a < b. Suatu interval terbatas adalah suatu himpunan dari bentuk

[(a, b)] = {x ∈ **R** : a ≤ x ≤ b} (a, b) = {x ∈ **R** : a < x < b}

[(a, b)] = {x ∈ **R** : a ≤ x ≤ b} (a,b] = {x ∈ **R** : a < x ≤ b} [a, b] disebut **interval tertutup,** dan (a, b) disebut **interval terbuka.** Himpunan tertutup dan himpunan terbuka dapat didiskusikan lebih lengkap pada bagian lain. Interval terbatas [a, b) dan (a, b] adalah tidak terbuka maupun tidak tertutup. Ingat bahwa masing-masing dari empat tipe interval di atas adalah suatu himpunan bagian terbatas dari R dengan batas atas terkecil b dan batas bawah terbesar a. Suatu interval takterbatas adalah suatu himpunan dari bentuk $[a, \infty) = \{x \in \mathbf{R} : x \geq a\}$ $(-\infty, b] = \{x \in \mathbf{R} : x \leq b\}$

$(a, \infty) = \{x \in \mathbf{R} : x > a\}$ $(-\infty, b) = \{x \in \mathbf{R} : x < b\}$

Menggunakan notasi ini, kita dapat menulis $\mathbf{R} = (-\infty, \infty)$.

Teorema 5.2 Setiap interval terbuka (a, b) memuat suatu bilangan rasional.

Bukti:

Kasus 1: $0 < a < b$ Dengan sifat archimedes ada suatu $k \in \mathbf{N}$ sedemikian sehingga $1 / k < b - a$. Misalkan $A = \{n \in \mathbf{N} : n / k > a\}$. Lagi dengan sifat archimedes $A \neq \Phi$. Kini, dengan the well-ordering principle untuk **N**, A memiliki suatu elemen pertama, sebut, n_0. Maka $n_0 / k > a$ dan $(n_0 - 1) / k \leq a$. Lagi pula,

$$\frac{n_0}{k} \leq a + \frac{1}{k} < a + (b - a) = b$$

Jadi, bilangan rasional n_0 / k termuat dalam interval (a, b).

Kasus 2: $a \leq 0 < b$ Dengan sifat archimedes ada suatu $k \in \mathbf{N}$ dengan $1 / k < b$. Jelas $1 / k \in (a, b)$.

Kasus 3: $a < 0 \leq b$ Maka $U \leq -b < -a$. Dengan kasus sebelumnya ada suatu rasional $r \in (-b, -a)$, dan juga bilangan rasional $-r \in (a, b)$.

Corollary Setiap interval terbuka (a, b) memuat banyaknya bilangan rasional takterhingga.

Ini jelas bahwa kita tidak perlu memperluas interval terbuka dalam teorema di atas. Kenyataannya, setiap interval memuat suatu interval terbuka sebagai suatu himpunan bagian, dan juga masing-masing interval pada garis real memuat takterhingga banyaknya bilangan rasional. Dalam bagian 4 kita melihat bahwa tidak ada bilangan rasional r sedemikian sehingga $r^2 = 2$. Kita menyatakan bilangan real positif r yang memenuhi $r^2 = 2$ dengan $\sqrt{2}$ ($\sqrt{2}$ menyatakan sinarV di **Q** dinyatakan dengan $V = \{x \in Q : x > 0 \text{ dan } x^2 > 2\}$). $\sqrt{2}$ adalah **bilangan irasional.**

Teorema 5.3 Setiap interval I dari bilangan real memuat suatu bilangan irasional.

Bukti: Pilih a, b $\in$ I dengan a < b dan pilih bilangan rasional taknol r sedemikian sehingga a/$\sqrt{2}$ < r < b/$\sqrt{2}$. Maka a < r$\sqrt{2}$ < b. Jelas r$\sqrt{2}$ adalah irasional (karena r$\sqrt{2}$) rasional mengakibatkan (1/r)(r$\sqrt{2}$) = $\sqrt{2}$ rasional, dan r$\sqrt{2}$ $\in$ I.

Corollary Setiap interval I dari bilangan real memuat takterhingga banyaknya bilangan irasional.

Kita menyebut himpunan D $\subseteq$ **R** **padat (dense)** di **R** dibuktikan D $\cap$ I $\neq$ Φ untuk setiap interval I. Teorema sebelumnya mengatakan bahwa **Q** padat di **R** dan juga **R** – **Q** (himpunan dari semua bilangan irasional) padat di **R**.

6. Rangkuman

Sistem bilangan real dan himpunan bilangan real memiliki **sifat-sifat yang sama.** Sistem bilangan real dikembangkan mulai dari bilangan asli (bilangan bulat positif) **N** (natural numbers or positive integers or counting numbers or figuring numbers). Jadi,

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathbf{F} \arrow[dr] & & \\
\mathbf{N} \arrow[r] & \mathbf{W} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \mathbf{Q} \arrow[r] & \mathbf{R} \\
 & & \mathbf{I} \arrow[ur] & & \\
 & & & \overbrace{R-Q} = \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} = \textbf{Irasional} \arrow[uur] &
\end{tikzcd}$$

Aksioma (sifat-sifat) bilangan real pada penjumlahan (+) dan perkailan ($\bullet$) adalah sebagai berikut.

Penjumlahan (+)	**Perkalian ($\bullet$)**
A1. **Aksioma Ketertutupan**	M1. **Aksioma Ketertutupan**
$\forall$ a, b $\in$ **R**, a + b $\in$ **R**	$\forall$ a, b $\in$ **R**, a $\bullet$ b $\in$ **R**
A2. **Aksioma Asosiatif**	M2. **Aksioma Asosiatif**
$\forall$ a, b, c $\in$ **R**,	$\forall$ a, b, c $\in$ **R**,
a + (b + c) = (a + b) + c	a $\bullet$ (b $\bullet$ c) = (a $\bullet$ b) $\bullet$ c

A3. **Aksioma Identitas**

Ada suatu bilangan unik 0 sedemikian sehingga

$a + 0 = x$, $\forall a \in \mathbf{R}$

A4. **Aksioma Invers**

$\forall a \in \mathbf{R}$, ada suatu bilangan Unik –a sedemikian sehingga

$a + (-a) = 0$

A5. **Aksioma Komutatif**

$\forall a, b \in \mathbf{R}$, $a + b = b + a$.

M3. **Aksioma Identitas**

Ada suatu bilangan unik 1 sedemikian sehingga

$a \bullet 1 = a$, $\forall a \in \mathbf{R}$

M4. **Aksioma Invers**

$\forall a \in \mathbf{R}$, dengan $a \neq 0$, ada suatu bilangan unik 1 / x sedemikian sehingga $x \bullet 1 / x = 1$.

(1 / x dapat ditulis x^{-1})

M5. **Aksioma Komutatif**

$\forall a, b \in \mathbf{R}$, $a \bullet b = b \bullet a$.

DL. Hukum Distributif perkalian atas penjumlahan

$$\forall a, b, c \in \mathbf{R},\ a \bullet (b + c) = a \bullet b + a \bullet c$$

$$(b + c) \bullet a = b \bullet a + c \bullet a$$

Ke-11 aksioma pertama disebut **aksioma field** karena aksioma-aksioma ini mengggambarkan suatu sistem yang dikenal dalam aljabar Abstrak sebagai **field.** Belakangan aksioma-aksioma itu disebut “hukum” (“laws”). Karena aksioma A1 dan M1 dipandang penjumlahan dan perkalian sebagai fungsi yang memetakan **R** x **R** into **R**. Sehingga menulis perkalian $x \bullet y$ sebagai xy. Suatu bilangan real x disebut **nonnegatif** jika $x \geq 0$ dan positif jika $x > 0$. Suatu pasangan pertidaksamaan serentak seperti “$x < y$ dan $y < z$” ditulis singkat sebagai “$x < y < z$.” Juga, penulisan “$x \leq y$” sebagai singkatan untuk “$x < y$ atau $x = y$.” Notasi ”≥” dinyatakan secara analog.

Relasi < memenuhi sifat-sifat berikut:

Aksioma urutan

O1. $\forall x, y \in \mathbf{R}$, secara tepat satu relasi berlaku:

$x = y$, $x < y$, $x > y$ (Hukum trichotomy)

O2. $\forall x, y, z \in \mathbf{R}$, jika $x < y$ dan $y < z$, maka $x < z$.

O3. $\forall x, y, z \in \mathbf{R}$, jika $x < y$, maka $x + z < y + z$.

O4. $\forall x, y \in \mathbf{R}$, jika $x < y$ dan $z > 0$, maka $xz < yz$.

Field yang memenuhi **O1** sampai dengan **O4** disebut **Field terurut.**

Aksioma Kelengkapan (Aksioma Dedekind)

Setiap himpunan bagian takkosong S dari **R** yang terbatas atas memiliki batas atas terkecil (Sup S) adalah suatu bilangan real.

Field terurut yang memenuhi **aksioma kelengkapan (aksioma Dedekind)** disebut **Field terurut lengkap. R** adalah satu-satunya dari **Field terurut lengkap**.

Berikut disajikan sifat-sifat yang dipenuhi mulai dari **N** sampai dengan **R**.

1. **N** = {1, 2, 3, …}. Semua sifat dipenuhi kecuali sifat identitas untuk penjumlahan dan perkalian. (Di sini **N** belum didefinisikan)
2. Whole numbers = **W** = {0, 1, 2, …} (Setelah **N** didefinisikan). Semua sifat dipenuhi.

   Definisi N

   Himpunan bilangan asli **N** adalah himpunan bagian dari **R** dengan memenuhi tiga syarat berikut:

   (i) $0 \in$ **N**

   (ii) $n \in$ **N** $\Rightarrow n + 1 \in$ **N**

   (iii) Himpunan N, betapapun kecilnya, subjek dengan dua syarat I dipenuhi; yaitu, $M \subseteq$ **R** dan memenuhi (i) dan (ii) **N** $\subseteq M$.

   (Syarat (iii) perlu karena banyak himpunan bagian dari **R**; misalnya, **R** $\subseteq$ **R**, **Q** $\subseteq$ **R**, **Z** $\subseteq$ **R** memenuhi 2 syarat pertama.)

3. Fraction numbers = **F** = $\{\frac{a}{b}$: a, b $\in$ **W**, b $\neq 0\}$. Semua sifat dipenuhi.
4. **I** = **Z** = $\{\underbrace{\ldots,-2,-1,}_{Bilangan\,bulat\,negatif}\ \underbrace{0,}_{\text{Tidak negatif tidak positif}}\ \underbrace{1,2,\ldots}_{Bilangan\,bulat\,positif}\}$. Semua sifat dipenuhi, kecuali invers multiplikatif

Definisi Z

Z = {…, -2, -1, 0, 1, 2, …}. Bilangan -1, -2, -3, … disebut bilangan bulat negatif, dan bilangan 1, 2, 3, … disebut bilangan bulat positif. Sedangkan, 0 bukan negatif maupun positif.

5. **Q** = { $\frac{a}{b}$: a, b $\in$ **Z**, b $\neq$ 0}. Semua sifat dipenuhi.
6. **Field** memenuhi ke-11 sifat (aksioma) di atas.
7. **Field terurut** adalah field yang memenuhi aksioma urutan.
8. **Field terurut lengkap** adalah field terurut yang memenuhi aksioma kelengkapan (aksioma Dedekind).
9. **R** = **Field terurut lengkap**
10. Karena untuk memperoleh **R** dengan cara menggunakan sifat-sifat berulang-ulang, sehingga ini dikenal sebagai **"sifat archimedes" ("archimedean property")** dan fakta menunjukkan bahwa sistem bilangan real memenuhi sifat ini yang berperan untuk **R** sebagai **field terurut archimedes lengkap (complete archimedean ordered field).**

REFERENSI

Abrahamson, B., & Gray, M. C. (1975). The art of algebra. Adelaide: Rigby Limited.

Bloch, N. J. (1987). Abstract algebra with applications. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, Inc.

Bronshtein, I. N., & Semendyayev, K. A. (1985). Handbook of mathematics. New York: Verlag Harri Deutsch.

Chaudhuri, N. P. (1983). Abstract algebra. New Delhi: TATA McGraw-Hill Publishing Company Limited.

Fraleigh, J. B. (1982). A first course in abstract algebra (3rd ed.). Reading: Addison-Wesley Publishing Company.

Graves, L. M. (1986). The theory of functions of real analysis (2nd ed.). Bombay: TATA McGraw-Hill Publishing Company, Ltd.

Jacob, C. (2003). Bilangan asli (natural numbers): Suatu telaah historis. Jurnal Matematika Integratif (Vol. 2, 1-10). Bandung: Jurusan Matematika FMIPA Universitas Padjadjaran.

Landau, E. (1986). Foundations of analysis: The arithmetic of whole, rational, Irrational and complex numbers. New York: Chelsea Publishing Company.

Lay, St. R. (1986). Analysis: An introduction to proof. Englewood Cliffs: Prentice-Hall.

Malik, D. S., Mordeson, J. N., & Sen, M. K. (1987). Fundamentals of abstract algebra. New York: The McGraw-Hill Companies, Inc.

Parzynski, W. R., & Zipse, Ph. W. (1982). Introduction to mathematical analysis. Auckland: McGraw-Hill International Book Company.

Rosen, K. H. (1991). Discrete mathematics and it's applications (2nd ed.). New York: McGraw-Hill, Inc.

Royden, H. L. (1989). Real analysis (3rd ed.). New York: Macmillan Publishing Company.

Tremblay, J. P., & Manohar, R. (1987). Discrete mathematical structures with applications to computer science. New York: McGraw-Hill Book Company.

Velleman, D. J. (1994). How to prove it: A structured approach. Cambridge: Cambridge University Press.