INDUKSI MATEMATIS

Drs. C. Jacob, M.Pd

Email: cjacob@upi.edu

3.1 Pengantar

Apakah suatu formula untuk jumlah dari n bilangan bulat positif ganjil pertama? Jumlah dari n bilangan bulat ganjil positif pertama untuk n = 1, 2, 3, 4, 5 adalah

$1 = 1,$

$1 + 3 = 4,$

$1 + 3 + 5 = 9,$

$1 + 3 + 5 + 7 = 16,$

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25.$

Dari nilai-nilai ini layak untuk membawa jumlah dari n bilangan bulat ganjil positif pertama adalah n^2. Kita perlu suatu metode untuk membuktikan bahwa perkiraan itu benar.

Induksi matematis adalah suatu teknik pembuktian penting secara ekstrem dapat digunakan untuk membuktikan pernyataan tegas tipe ini. Seperti yang kita lihat dalam bagian ini dan dalam bab berikutnya, induksi matematis digunakan secara ekstensif untuk membuktikan hasil tentang berbagai objek diskret luas. Misalnya, induksi matematis digunakan untuk membuktikan hasil tentang kompleksitas algoritma, pembetulan tipe program komputer tertentu, teorema tentang graf dan pohon, dan juga suatu range luas dari identitas dan pertidaksamaan.

Dalam bagian ini kita akan menggambarkan bagaimana induksi matematis dapat digunakan dan mengapa induksi matematis merupakan suatu teknik pembuktian valid. Ini secara ekstrim penting dengan mencatat bahwa induksi matematis hanya dapat digunakan untuk membuktikan hasil yang diperoleh suatu cara lain. Ini bukan merupakan alat untuk menemukan formula atau teorema.

3.2 The Well–Ordering Property

Validitas induksi matematis menyusul dari aksioma fundamental tentang himpunan bilangan bulat.

The Well–Ordering Property Setiap himpunan bilangan bulat nonnegatif takkosong memiliki suatu elemen terkecil.

The Well–Ordering Property sering dapat digunakan secara langsung dalam bukti.

CONTOH 1 Menggunakan **The Well–Ordering Property** untuk membuktikan algoritma pembagian. Mengingat algoritma pembagian menyatakan bahwa jika a adalah suatu bilangan bulat dan d bilangan bulat positif, maka ada bilangan bulat q dan r dengan $0 \leq r < d$ dan $a = dq + r$.

Solusi: Misalkan S adalah himpunan bilangan bulat nonnegatif berbentuk a – dq di mana q adalah suatu bilangan bulat. Himpunan ini adalah takkosong karena -dq dapat dibuat sebesar yang ditentukan (mengambil q adalah suatu bilangan bulat negatif dengan nilai mutlak besar). Dengan **the Well–Ordering Property** S memiliki suatu elemen terkecil $r = a - dq_0$.

Bilangan bulat r adalah nonnegatif. Ini juga merupakan kasus bahwa r < d. Jika tidak, maka ada suatu elemen nonnegatif terkecil di S, yaitu, $a - d(q_0 + 1)$. Untuk melihat ini, andaikan bahwa r ≥ d. Karena $a = dq_0 + r$ berikutnya $a - d(q_0 + 1) = (a - dq_0) - d = r - d \geq 0$. Akibatnya ada bilangan bulat q dan r dengan o ≤ r < d. Bukti bahwa q dan r adalah unik diberikan kepada pembaca sebagai latihan. ■

3.3 Induksi Matematis

Banyak teorema menyatakan bahwa P(n) benar untuk semua bilangan bulat positif n, di mana P(n) adalah suatu fungsi proposisional. Induksi Matematis adalah suatu teknik untuk membuktikan teorema jenis ini. Dengan kata lain, induksi matematis digunakan untuk membuktikan proposisi berbentuk $\forall \mathbf{x}\, P(n)$, di mana semesta wacana adalah himpunan bilangan bulat positif.

Suatu bukti dengan induksi matematis bahwa P(n) benar untuk setiap bilangan bulat positif n memuat dua langkah:

1. **Langkah dasar (basis step)**. Proposisi P(1) ditunjukkan benar.
2. **Langkah induktif (induktive step)**. Implikasi P(n) $\rightarrow$ P(n + 1) ditunjukkan benar untuk setiap bilangan bulat positif n.

Di sini, P(n) disebut hipotesis induktif (inductive hypothesis). Apabila kita melengkapi kedua langkah bukti dengan induksi matematis, kita buktikan bahwa P(n) benar untuk semua bilangan bulat positif n; yaitu, kita harus menunjukkan bahwa $\forall \mathbf{x}\, P(n)$ benar.

Diekspresikan sebagai suatu aturan inferensi, teknik bukti ini dapat dinyatakan sebagai

$$[P(1) \wedge \forall \mathbf{n}\ P(n) \rightarrow P(n + 1))] \rightarrow \forall \mathbf{n}\, P(n).$$

Karena induksi matematis merupakan suatu teknik penting, yang bermanfaat untuk menjelaskan secara rinci langkah-langkah suatu bukti dengan menggunakan teknik ini. Hal pertama yang kita lakukan untuk membuktikan bahwa P(n) benar untuk semua bilangan positif n adalah dengan menunjukkan bahwa P(1) benar. Kuantitas ini untuk menunjukkan bahwa pernyataan khusus diperoleh apabila n ditempatkan kembali dengan 1 dalam P(n) adalah benar. Kemudian kita harus menunjukkan bahwa $P(n) \rightarrow P(n+1)$ benar setiap bilangan bulat positif n. Untuk membuktikan bahwa implikasi ini benar untuk setiap bilangan bulat positif n, kita perlu untuk menunjukkan bahwa P(n +1) tidak dapat salah apabila P(n) benar.

Ini dapat diselesaikan dengan mengasumsikan bahwa P(n) benar dan menunjukkan bahwa **di bawah hipotesis ini** P(n + 1) juga harus benar.

Perhatian: Dalam suatu bukti dengan induksi matematis tidak diasumsikan bahwa P(n) benar untuk semua bilangan bulat positif! Ini hanya menunjukkan bahwa jika diasumsikan bahwa P(n) benar, maka P(n + 1) juga benar. Sehingga, suatu bukti dengan induksi matematis bukan merupakan suatu kasus yang menimbulkan pertanyaan, atau penalaran sirkular.

Apabila kita menggunakan induksi matematis untuk membuktikan suatu teorema, pertama kita tunjukkan bahwa P(1) benar. Kemudian kita mengetahui bahwa P(2) benar, karena P(1) mengakibatkan P(2). Selanjutnya, kita mengetahui bahwa P(3) benar, karena P(2) mengakibatkan P(3). Secara kontinu melakukan hal yang sama, kita melihat bahwa P(k) benar, untuk setiap bilangan bulat positif k.

Ada berbagai ilustrasi bermanfaat dari induksi matematis yang dapat membantu anda mengingat bagaimana prinsip ini bekerja. Salah satu dari prinsip ini meliputi suatu hubungan orang, 1 orang, 2 orang, dan seterusnya. Suatu rahasia yang diceritakan kepada 1 orang, dan masing-masing orang menceritakan rahasia itu kepada orang berikutnya dalam hubungan itu, jika orang terdahulu mendengarnya. Misalkan P(n) adalah proposisi bahwa n orang mengetahui rahasia itu. Maka P(1) benar, karena rahasia itu diceritakan kepada 1 orang; P(2) benar, karena 1 orang menceritakan rahasia itu kepada 2 orang; P(3) benar, karena 2 orang menceritakan rahasia itu kepada 3 orang; dan seterusnya. Dengan prinsip induksi matematis, setiap orang dalam belajar hubungan rahasia. (Tentu, ini telah diasumsikan bahwa masing-masing orang menyampaikan rahasia itu dalam suatu cara yang tidak dirubah dengan orang berikutnya, yang biasanya tidak benar dalam kehidupan nyata.)

Cara lain untuk mengilustrasikan prinsip induksi matematis adalah dengan memperhatikan baris domino tak terhingga, dilabelkan

1, 2, 3, …, n, … di mana masing-masing domino didudukan. Misalnya P(n) adalah proposisi bahwa domino n dijatuhkan. Jika domino pertama jatuh- yaitu, jika P(1) benar – dan jika, domino ke-n jatuh, juga domino ke (n + 1) jatuh- yaitu, jika $P(n) \rightarrow P(n+1)$ benar- maka semua domino jatuh.

Mengapa Induksi Matematis Valid Mengapa induksi matematis merupakan suatu teknik bukti valid? Alasan itu datang dari the well ordering property. Andaikan kita mengetahui bahwa P(1) benar dan bahwa proposisi $P(n) \rightarrow P(n+1)$ benar untuk semua bilangan bulat untuk menunjukkan bahwa ada paling sedikit satu bilangan bulat positif, asumsikan bahwa ada paling sedikit satu bilangan bulat positif yang mana P(n) salah. Maka himpunan S bilangan bulat positif yang mana P(n) salah adalah tak kosong. Sehingga, dengan the well ordering property, S memiliki suatu elemen terkecil, yang akan dinyatakan dengan k . Kita mengetahui bahwa k bukan 1, karena P(1) benar.

Karena k adalah positif dan lebih besar dari 1, k – 1 adalah suatu bilangan bulat positif. Selanjutnya, karena k – 1 kurang dari k, k tidak di S, sehingga P(k-1) harus benar. Karena implikasi P(k-1) $\rightarrow$ P(k) juga benar, harus merupakan kasus bahwa P(k) benar. Ini kontradiksi dengan pemilihan k. Sehingga, P(n) harus benar untuk setiap bilangan bulat positif n.

Catatan histories: Pertama mengetahui penggunaan induksi matematis adalah dalam karya matemetis abad ke-16 Francesco Maurolico (1494-1575). Maurolico menulis secara ekstensif pada karya-karya matematika klasik dan membuat banyak kontribusi kepada geometri dan optic. Dalam bukunya ***Arithmeticorum Libri Duo*** *Maurolico menyajikan berbagai sifat-sifat bilangan bulat bersama-sama dengan bukti dari sifat-sifat ini. Untuk bukti beberapa sifat ini ia mengemukakan metode induksi matematis. Penggunaan induksi matematis pertamanya dalam buku ini adalah untuk membuktikan bahwa jumlah dari n bilangan bulat positif ganjil pertama sama dengan* n^2.

3.4 Contoh-contoh Bukti dengan Induksi Matematis

Kita akan menggunakan berbagai contoh untuk mengilustrasikan bagaimana teorema dibuktikan dengan menggunakan induksi matematis. Kita mulai dengan membuktikan suatu formula untuk jumlah dari bilangan bulat positif ganjil pertama n. (Banyak teorema dibuktikan dalam bagian ini melalui induksi matematis dapat dibuktikan dengan menggunakan metode berbeda. Bagaimanapun, ini bermanfaat untuk mencoba membuktikan suatu teorema dalam cara lebih dari satu cara, karena satu metode dapat berhasil memecahkan sedangkan pendekatan lain tidak dapat berhasil memecahkan).

CONTOH 2 Gunakan induksi matematis untuk membuktikan bahwa jumlah dari n bilangan bulat positif ganjil pertama adalah n^2.

Solusi: Misalkan P(n) menyatakan proposisi bahwa jumlah dari n bilangan bulat positif ganjil pertama adalah n^2. Kita harus pertama melengkapi langkah dasar; yaitu, kita harus menunjukkan bahwa P(1) benar. Kemudian kita harus menyelesaikan langkah induktif; yaitu, kita harus menunjukkan bahwa P(n +1) benar apabila P(n) diasumsikan benar.

Langkah Dasar: P(1) menyatakan bahwa jumlah dari suatu bilangan bulat positif ganjil pertama adalah 1^2. Ini benar karena jumlah dari bilangan bulat positif ganjil pertama adalah 1.

Langkah Induktif: Untuk melengkapi langkah induktif kita harus menunjukkan bahwa proposisi benar untuk setiap bilangan bulat positif n. Untuk melakukan ini, andaikan bahwa P(n) benar untuk suatu bilangan bulat positif n; yaitu,

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2.$$

(Catatan bahwa bilangan bulat positif ganjil ke-n adalah (2n – 1), karena bilangan bulat ini diperoleh dengan menambahkan 2 suatu total dari n – 1 kali dengan 1.) Kita harus menunjukkan bahwa

P(n + 1) benar, dengan mengasumsikan bahwa P(n) benar. Catatan bahwa P(n + 1) adalah pernyataan bahwa

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) + (2n + 1) = (n + 1)^2.$$

Sehingga, mengasumsikan bahwa P(n) benar, ini mengikuti

$$\begin{aligned} 1+3 + 5 +\ldots+(2n - 1) + (2n + 1) &= [1 + 3 +\ldots+ (2n - 1)] + (2n + 1) \\ &= n^2 + (2n + 1) \\ &= n^2 + 2n + 1 \\ &= (n + 1)^2. \end{aligned}$$

Ini menunjukkan bahwa P(n + 1) mengikuti dari P(n). Catatan bahwa kita menggunakan hipotesis induktif P(n) dalam kesamaan kedua dengan menempatkan kembali jumlah dari n bilangan bulat positif ganjil pertama dengan n^2.

Karena P(1) benar dan implikasi $P(n) \rightarrow P(n+1)$ benar untuk semua bilangan bulat positif n, prinsip induksi matematis menunjukkan bahwa P(n) benar untuk semua bilangan bulat positif n. ■

Contoh berikut menggunakan prinsip induksi matematis untuk membuktikan suatu kesamaan.

CONTOH 3 Gunakan induksi matematis untuk membuktikan pertidaksamaan $n < 2^n$ untuk semua bilangan bulat positif n.

Solusi: Misalkan P(n) adalah proposisi "$n < 2^n$".

Langkah Dasar: P(1) benar, karena $1 < 2^1 = 2$.

Langkah Induktif: Asumsikan bahwa P(n) benar untuk bilangan bulat positif n. Yakni, asumsikan bahwa $n < 2^n$. Kita perlu menunjukkan bahwa P(n + 1) benar. Yakni, kita perlu untuk menunjukkan bahwa $n + 1 < 2^{n+1}$. Dengan menambahkan 1 untuk kedua sisi dari $n < 2^n$, dan kemudian mencatat bahwa $1 \le 2^n$, memberikan

$$n + 1 < 2^n + 1 \le 2^n + 2^n = 2^{n+1}.$$

Kita telah menunjukkan bahwa P(n +1) benar, yaitu, $n + 1 < 2^{n+1}$, didasarkan pada asumsi bahwa P(n) benar. Langkah induktif lengkap.

Jadi, dengan prinsip induksi matematis, telah ditunjukkan bahwa $n < 2^n$ benar untuk semua bilangan bulat positif. ■

Kita kini menunjukkan bagaimana menggunakan induksi matematis untuk membuktikan sesuatu teorema yang meliputi divisibilitas bilangan bulat.

CONTOH 4 Gunakan induksi matematis untuk membuktikan bahwa $n^3 - n$ dapat dibagi dengan 3 apabila n adalah suatu bilangan bulat positif.

Solusi: Untuk mengonstruksi bukti, misalkan P(n) menyatakan proposisi: "$n^3 - n$ dapat dibagi dengan oleh 3."

Langkah Dasar: P(1) benar, karena $1^3 - 1 = 0$ dapat dibagi dengan 3.

Langkah Induktif: Asumsikan bahwa P(n) benar; yaitu, $n^3 - n$ dapat dibagi dengan 3. Kita harus menunjukkan bahwa $(n + 1)^3 - (n + 1)$ dapat dibagi dengan 3. Ingat bahwa

$(n + 1)^3 - (n + 1) = (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - (n + 1)$

$= (n^3 - n) + 3(n^2 + n)$.Karena kedua suku dalam jumlah ini dapat dibagi dengan 3 (pertama dengan asumsi dari langkah induktif, dan kedua karena jumlah itu merupakan 3 kali suatu bilangan bulat), selanjutnya $(n + 1)^3 - (n + 1)$ juga dapat dibagi dengan 3. Ini melengkapi langkah induktif. Sehingga, dengan prinsip induksi matematis, $n^3 - n$ dapat dibagi oleh 3 apabila n adalah suatu bilangan bulat positif. ■

Kadang-kadang kita perlu untuk menunjukkan bahwa P(n) benar untuk n = k, k + 1, k + 2, …, di mana k adalah suatu bilangan bulat lain dari 1. Kita dapat menggunakan induksi matematis untuk menyelesaikan ini asalkan kita merubah langkah dasar. Misalnya, perhatikan Contoh 5, yang menentukan bahwa suatu formula sumasi valid untuk semua bilangan bulat nonnegatif, sedemikian hingga kita perlu untuk membuktikan bahwa P(n) benar untuk n = 0, 1, 2, ….

CONTOH 5 Gunakan induksi matematis untuk menunjukkan bahwa

$$1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

untuk semua bilangan bulat nonnegatif n.

Solusi: Misalkan P(n) adalah proposisi bahwa formula ini tepat untuk bilangan bulat n.

Langkah Dasar: P(0) benar karena $2^0 = 1 = 2^1 - 1$.

Langkah Induktif: Asumsikan bahwa P(n) benar. Untuk menyelesaikan langkah induktif dengan menggunakan asumsi ini, harus ditunjukkan bahwa P(n + 1) benar, yaitu,

$1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n + 2^{n+1} = 2^{(n+1)+1} - 1 = 2^{n-2} - 1$.

Dengan menggunakan hipotesis induktif P(n), diperoleh

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n + 2^{n+1} &= (1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n) + 2^{n+1} \\ &= (2^{n+1} - 1) + 2^{n+1} \\ &= 2.\ 2^{n+1} - 1 \\ &= 2^{n+2} - 1. \end{aligned}$$

Langkah induktif terakhir ini, yang melengkapi bukti itu. ■

Seperti demontrasi Contoh 5, dengan menggunakan induksi matematis untuk menunjukkan bahwa P(n) benar untuk n = k, k +1, k + 2, …, di mana k adalah suatu bilangan bulat lain dari 1, kita tunjukkan bahwa P(k) benar (langkah dasar) dan kemudian menunjukkan bahwa implikasi $P(n) \rightarrow P(n+1)$ benar untuk n = k, k +1, k + 2, … (langkah induktif). Ingat k dapat negatif, nol, atau positif. Kita menyerahkan kepada pembaca untuk menunjukkan bahwa bentuk induksi ini valid.

Formula yang diberikan dalam Contoh 5 merupakan suatu kasus khusus dari suatu hasil umum untuk jumlah dari suku-suku dari suatu **progresi geometrik**, yang merupakan suatu barisan yang berbentuk: a, ar, ar^2, …, ar^n, …, di mana a dan r adalah bilangan real. Misalnya barisan dalam Contoh 5 adalah suatu progresi geometrik dengan a = 1 dan r = 2. Demikian juga dengan barisan:

3, 15, 75, …, 3. 5^n, … adalah suatu progresi geometrik dengan a = 3 dan r = 5.

Contoh berikut memberikan suatu formula untuk jumlah dari n + 1 suku pertama suatu barisan. Bukti dari formula umum ini menggunakan induksi matematis.

CONTOH 6 **Jumlah dari Progresi Geometrik** Gunakan induksi matematis untuk membuktikan formula berikut untuk jumlah dari banyaknya suku-suku finit suatu progresi geometrik:

$$\sum_{j=0}^{n} ar^j = a + ar + ar^2 + ... + ar^n = (ar^{n+1} - a)/(r-1)$$

apabila r ≠ 1.

Solusi: Untuk membuktikan formula ini menggunakan induksi matematis, misalkan P(n) adalah proposisi bahwa jumlah dari n + 1 suku pertama progresi geometrik dalam formula ini adalah tepat.

Langkah Dasar: P(0) benar karena $a = \dfrac{ar - a}{r - 1}$

Langkah Induktif: Asumsikan bahwa P(n) benar. Yaitu, asumsikan

$a + ar + ar^2 + \ldots + ar^n = (ar^{n+1} - a) / (r - 1)$.

Untuk menunjukkan bahwa implikasi P(n + 1) ini benar, tambahkan ar^{n+1} kepada kedua ruas persamaan ini untuk memperoleh

$a + ar + ar^2 + \ldots + ar^n + ar^{n+1} = (ar^{n+1} - a) / (r - 1) + ar^{n+1}$.

Menulis kembali ruas-kanan persamaan ini menunjukkan bahwa

$$\begin{aligned}(ar^{n+1} - a) / (r - 1) + ar^{n+1} &= (ar^{n+1} - a) / (r - 1) + \\ &\quad (ar^{n+2} - ar^{n+1}) / (r - 1) \\ &= (ar^{n+2} - a) / (r - 1).\end{aligned}$$

Menggabungkan persamaan ini diperoleh

$a + ar + ar^2 + \ldots + ar^n + ar^{n+1} = (ar^{n+2} - a) / (r - 1)$.

Ini menunjukkan bahwa jika P(n) benar, maka P(n + 1) juga harus benar. Ini melengkapi argumen induktif dan menunjukkan bahwa formula untuk jumlah dari suku-suku deret geometrik adalah benar. ■

Seperti disebutkan sebelumnya, formula dalam Contoh 5 merupakan kasus dari formula dalam Contoh 6 dengan a = 1 dan r = 2. Pembaca akan membuktikan bahwa dengan mengambil nilai-nilai ini untuk a dan r dalam formula umum memberikan formula yang sama seperti dalam Contoh 5.

Suatu pertidaksamaan penting untuk jumlah dari kebalikan suatu himpunan bilangan bulat positif akan dibuktikan dalam contoh berikutnya.

CONTOH 7 **Suatu Pertidaksamaan untuk Bilangan Harmonik**

Bilangan Harmonik

$\mathbf{H}_k$ **,** k = 1, 2, 3, …, dinyatakan dengan

$$H_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k}$$

Misalnya,

$$H_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{25}{12}$$

Menggunakan induksi matematis untuk menunjukkan bahwa

$$H_{2^n} \geq 1 + n / 2,$$

apabila n adalah suatu bilangan bulat nonnegatif.

Solusi: Untuk menyelesaikan bukti itu, misalkan P(n) adalah proposisi $H_{2^n} \geq 1 + n / 2$.

Langkah Dasar: P(0) benar karena $H_{2^0} = H_1 \geq 1 + 0 / 2$.

Langkah Induktif: Asumsikan bahwa P(n) benar, sedemikian hingga $H_{2^n} \geq 1 + n / 2$. Ini harus ditunjukkan bahwa P(n + 1), yang menyatakan $\mathbf{H}_{2^{n+1}} \geq 1 + (n + 1) / 2$, juga harus benar di bawah asumsi ini. Ini dapat dilakukan karena

$$
\begin{aligned}
H_{2^{n+1}} &= 1 + 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/2^n + 1/2^n + 1 + \ldots + 1/2^{n+1} \\
&= H_{2^n} + 1/2^n + 1 + \ldots + 1/2^{n+1} \\
&\geq (1 + n/2) + 1/2^n + 1 + \ldots + 1/2^{n+1} \quad \text{(dengan hipotesis induktif)} \\
&\geq (1 + n/2) + 2^n \cdot 1/2^{n+1} \quad \text{(karena ada } 2^n \text{ suku yang masing-masing tidak kurang dari } 1/2^{n+1}\text{)} \\
&\geq (1 + n/2) + ½ \\
&= 1 + (n + 1)/2.
\end{aligned}
$$

Ini menentukan langkah induktif dari bukti itu. Sehingga, pertidaksamaan untuk bilangan harmonik adalah valid untuk semua bilangan bulat nonnegatif.

Perhatian: Pertidaksamaan yang ditentukan di sini dapat digunakan untuk menunjukkan bahwa **deret harmonik**

$$1 + ½ + 1/3 + \ldots + 1/n + \ldots$$

adalah suatu deret infinit divergen. Ini merupakan suatu contoh penting dalam studi deret infinit. ■

Contoh berikut menunjukkan bagaimana induksi matematis dapat digunakan untuk membuktikan suatu formula untuk banyaknya himpunan bagian dari suatu himpunan finit.

CONTOH 8 **Banyaknya Himpunan Bagian dari suatu Himpunan Finit** Gunakan induksi matematis untuk menunjukkan bahwa jika S adalah suatu himpunan finit dengan n elemen, maka S memiliki 2^n himpunan bagian. (Kita akan buktikan hasil ini secara langsung dalam berbagai cara dalam bab berikutnya tentang **menghitung (counting)**.

Solusi: Misalkan P(n) adalah proposisi bahwa suatu himpunan dengan n elemen memiliki 2^n himpunan bagian.

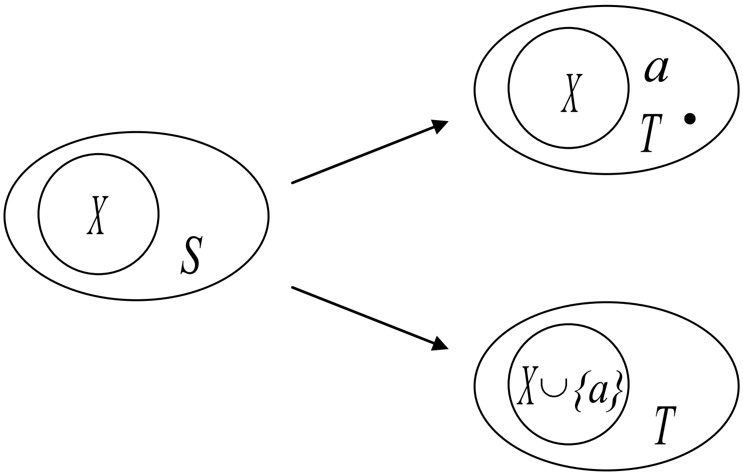
Langkah Dasar: P(0) benar, karena suatu himpunan dengan nol elemen, himpunan kosong, memiliki secara tepat $2^0 = 1$ himpunan bagian, yaitu, dirinya sendiri.

Langkah Induktif: Asumsikan bahwa P(n) benar, yaitu, setiap himpunan dengan n elemen memiliki 2^n himpunan bagian. Ini harus ditunjukkan bahwa di bawah asumsi ini P(n + 1) yang merupakan pernyataan bahwa setiap himpunan dengan n + 1 elemen memiliki himpunan dengan 2^{n+1} himpunan bagian, juga harus benar. Untuk menunjukkan ini, misalkan T adalah suatu himpunan dengan n + 1 elemen. Maka, ini dimungkinkan untuk menulis $T = S \cup \{a\}$ di mana a adalah suatu elemen dari T dan $S = T - \{a\}$. Himpunan bagian dari T dapat diperoleh dalam cara berikut. Untuk masing-masing himpunan bagian X dari S ada secara tepat dua himpunan bagian dari T, yaitu, X dan $X \cup \{a\}$.

(Ini diilustrasikan dalam Gambar 3.) Ini merupakan semua himpunan bagian dari T dan semuanya berbeda. Karena ada 2^n himpunan bagian dari S, ada $2 . 2^n = 2^{n+1}$ himpunan bagian dari T. Ini mengakhiri argumen induksi. ■

CONTOH 9 Tunjukkan bahwa jika n adalah suatu bilangan bulat positif,

$1 + 2 + \ldots + n = n(n + 1) / 2$.



Gambar 3 **Himpunan bagian yang dihasilkan dari suatu himpunan dengan n +1 elemen. Di sini $T = S \cup \{a\}$.**

Solusi: Misalkan P(n) adalah proposisi bahwa jumlah dari n bilangan bulat positif pertama adalah n(n +1) / 2. Kita harus melakukan dua hal untuk membuktikan bahwa P(n) benar untuk n = 1, 2, 3, …. Yaitu, kita harus menunjukkan bahwa P(1) benar dan implikasi P(n) mengakibatkan P(n + 1) benar untuk n = 1, 2, 3, ….

Langkah Dasar: P(1) benar, karena $1 = 1(1 + 1)/ 2$.

Langkah Induktif: Asumsikan bahwa P(n) berperan, sedemikian hingga,

$$1 + 2 + \ldots + n = n (n +1)/ 2.$$

Di bawah asumsi ini, harus ditunjukkan bahwa P(n +1) benar, yaitu

$$1 + 2 + \ldots + n + n + 1 = (n +1) [(n + 1) + 1] / 2 = (n + 1) (n + 2)/ 2$$

juga benar. Tambahkan n + 1 kepada kedua ruas dari persamaan dalam P(n) diperoleh

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \ldots + n + (n + 1) &= n(n +1)/ 2 + (n + 1) \\ &= [(n / 2) + 1] (n + 1) \\ &= (n + 1) (n + 2)/ 2. \end{aligned}$$

Persamaan terakhir ini menunjukkan bahwa P(n + 1) benar. Ini melengkapi langkah induktif dan melengkapi bukti. ■

CONTOH 10 Gunakan induksi matematis untuk membuktikan $2^n < n!$ untuk setiap bilangan bulat positif n dengan $n \geq 4$.

Solusi: Misalkan P(n) adalah proposisi bahwa $2^n < n!$.

Langkah Dasar: Untuk membuktikan pertidaksamaan untuk $n \geq 4$ dibutuhkan langkah dasar P(4). Ingat bahwa P(4) benar, karena $2^4 = 16 < 4! = 24$.

Langkah Induktif: Asumsikan bahwa P(n) benar. Yaitu, asumsikan bahwa $2^n < n!$. Kita harus menunjukkan bahwa P(n + 1) benar. Yaitu, kita harus menunjukkan bahwa $2^n + 1 < (n + 1)!$ Dengan mengalikan kedua ruas pertidaksamaan $2n < n!$ dengan 2, diperoleh

$$\begin{aligned} 2.2n &< 2.\ n! \\ &< (n + 1).\ n! \\ &= (n +1)\ !. \end{aligned}$$

Ini menunjukkan bahwa P(n + 1) benar apabila P(n) benar. Ini melengkapi langkah induktif dari bukti. Sehingga, 2n < n! benar untuk semua bilangan bulat n dengan n ≥ 4. ■

CONTOH 11 Gunakan induksi matematis untuk membuktikan generalisasi dari salah satu hukum De Morgan berikut:

$$\overline{\bigcap_{k=1}^{n} A_k} = \bigcup_{k=1}^{n} \overline{A_k}$$

apabila $A_1, A_2, ..., A_n$ adalah himpunan bagian dari himpunan universal U, dan n ≥ 2.

Solusi: Misalkan P(n) adalah identitas untuk n himpunan.

Langkah Dasar: Pernyataan P(2) menyatakan bahwa

$$\overline{A_1 \cap A_2} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2}$$

Ini merupakan salah satu dari hukum De Morgan.

Langkah Induktif: Asumsikan bahwa P(n) benar, yaitu

$$\overline{\bigcap_{k=1}^{n} A_k} = \bigcup_{k=1}^{n} \overline{A_k}$$

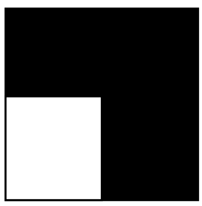
apabila $A_1, A_2, ..., A_n$ adalah himpunan bagian dari himpunan universal. Untuk menyelesaikan langkah induktif harus ditunjukkan bahwa jika kesamaan ini berperan untuk setiap n himpunan bagian dari U, juga harus valid untuk setiap n + 1 himpunan bagian U. Andaikan bahwa $A_1, A_2, ..., A_n, A_{n+1}$ adalah himpunan bagian dari U. Apabila hipotesis induktif diasumsikan berperan, diperoleh

$$
\begin{aligned}
\overline{\bigcap_{k=1}^{n+1} A_k} &= \overline{\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) \cap A_{n+1}} \\
&= \left(\overline{\bigcap_{k=1}^{n} A_k}\right) \cup \overline{A_{n+1}} && \text{(dengan hukum De Morgan)} \\
&= \left(\bigcup_{k=1}^{n} \overline{A_k}\right) \cup \overline{A_{n+1}} && \text{(dengan hipotesis induktif)} \\
&= \bigcup_{k=1}^{n+1} \overline{A_k}\ .
\end{aligned}
$$

Ini melengkapi bukti dengan induksi. ■

Contoh berikut mengilustrasikan bagaimana induksi matematis dapat digunakan untuk membuktikan suatu hasil tentang menutup papan catur dengan sepotong gambar seperti huruf L.

CONTOH 12 Misalkan n adalah suatu bilangan bulat positif. Tunjukkan bahwa setiap 2^n x 2^n papan catur dengan satu persegi digeser dapat diubin menggunakan sepotong gambar L, di mana potongan ini menutup tiga persegi pada suatu saat, seperti ditunjukkan dalam Gambar 4.

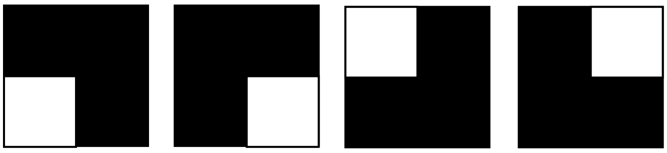


Gambar 4 Sepotong kertas berbentuk-L

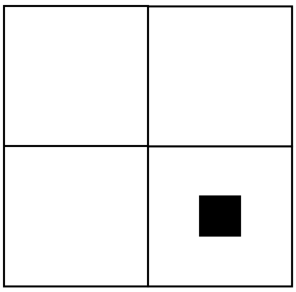
Solusi: Misalkan P(n) adalah proposisi bahwa setiap 2^n x 2^n papan catur dengan satu persegi digeser dapat diubin menggunakan sepotong gambar L. Kita dapat menggunakan induksi matematis untuk membuktikan bahwa P(n) benar untuk semua bilangan bulat positif n.

Langkah Dasar: P(1) benar, karena setiap dari empat papan catur 2 x 2 dengan satu persegi digeser dapat diubin satu dari potongan gambar L, seperti ditunjukkan dalam Gambar 5.

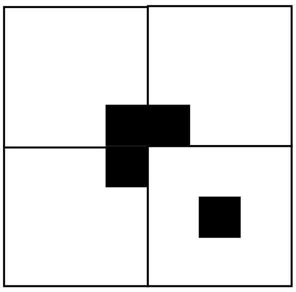
Langkah Induktif: Asumsikan bahwa P(n) benar; yaitu, asumsikan bahwa setiap 2^n x 2^n papan catur dengan satu persegi digeser dapat diubin menggunakan potongan gambar L. Ini harus ditunjukkan bahwa di bawah asumsi ini P(n + 1) juga harus benar; yaitu, setiap 2^{n+1} x 2^{n+1} papan catur dengan satu persegi digeser dapat di ubin menggunakan potongan gambar L. Untuk melihat ini, perhatikan suatu papan catur 2^{n+1} x 2^{n+1} dengan satu persegi yang digeser. Membagi papan catur ini ke dalam empat papan catur berukuran 2^n x 2^n, dengan membaginya dalam separuh dalam kedua arah. Ini diilustrasikan dalam Gambar 6. Bukan persegi digeser tiga dari empat papan catur ini. Papan catur 2^n x 2^n keempat yang memiliki pusat asli, papan catur terbesar sebagai salah satu pojoknya, seperti ditunjukkan dalam Gambar 7. Dengan hipotesis induktif, masing-masing dari tiga papan catur 2^n x 2^n ini dengan satu persegi digeser dapat diubin dengan potongan Gambar L. Selanjutnya, tiga persegi yang untuk sementara waktu dapat digeser menutup dengan potongan gambar L. Karena, papan catur 2^{n+1} x 2^{n+1} seluruhnya dapat diubin dengan potongan gambar L. Ini melengkapi bukti. ■



Gambar 5   Ubin papancatur 2 x 2 digeser dengan satu persegi



Gambar 6
Membagi papancatur 2^{n+1} x 2^{n+1} ke dalam Empat papancatur 2^n x 2^n



Gambar 7
Ubin papancatur 2^{n+1} x 2^{n+1} dengan menggeser satu persegi

3.5 Prinsip Kedua dari Induksi Matematis

Ada bentuk induksi matematis lain yang sering berguna dalam bukti. Dengan bentuk ini kita menggunakan langkah dasar yang sama seperti sebelumnya, tetapi kita menggunakan satu langkah induktif berbeda. Kita asumsikan bahwa P(k) benar untuk k = 1, …, n dan menunjukkan bahwa P(n + 1) juga harus benar didasarkan pada asumsi ini. Ini disebut **"prinsip kedua dari induksi matematis."** Kita meragkum dua langkah yang digunakan untuk menunjukkan bahwa P(n) benar untuk semua bilangan bulat positif n:

1. **Langkah Dasar:** Proposisi P(1) ditunjukkan benar.
2. **Langkah Induktif:** Ini menunjukkan bahwa $[P(1) \wedge P(2) \wedge \ldots \wedge P(n)] \rightarrow P(n+1)$ benar untuk setiap bilangan bulat positif n.

Dua bentuk induksi matematis itu ekuivalen; yaitu, masing-masing dapat ditunjukkan menjadi suatu teknik bukti valid dengan mengasumsikan lain. Diserahkan kepada pembaca sebagai latihan untuk menunjukkan ini. Kini kita memberikan suatu contoh yang menunjukkan bagaimana prinsip kedua dari induksi matematis digunakan.

CONTOH 13 Tunjukkan bahwa jika n adalah suatu bilangan bulat lebih dari 1, maka n dapat ditulis sebagai hasilkali prima.

Solusi: Misalkan P(n) adalah proposisi bahwa n dapat ditulis sebagai hasilkali prima.

Langkah Dasar: P(2) benar, karena 2 dapat ditulis sebagai hasilkali satu prima, dirinya sendiri.

Langkah Induktif: Asumsikan bahwa P(k) benar untuk semua bilangan bulat positif k dengan k ≤ n. Untuk melegkapi langkah induktif, harus ditunjukkan bahwa P(n + 1) benar di bawah asumsi ini.

Ada dua kasus untuk diperhatikan; yaitu, apabila n + 1 adalah prima dan apabila n + 1 adalah komposit. Jika n + 1 adalah prima, kita biasanya melihat bahwa P(n + 1) benar. Sebaliknya, jika n + 1 adalah komposit dan dapat ditulis sebagai hasilkali dua bilangan bulat positif a dan b dengan $2 \leq a \leq b < n + 1$. Dengan hipotesis induksi, a dan b kedua-duanya dapat ditulis sebagai hasilkali prima. Sehingga, jika n + 1 adalah komposit, dapat ditulis sebagai hasilkali prima; yaitu, prima-prima ini dalam faktorisasi a dan dalam faktorisasi b. ■

Perhatian: Karena 1 adalah hasilkali prima; yaitu, hasilkali kosong dari bukan prima**,** kita dapat memulai bukti dalam Contoh 13 dengan P(1) sebagai langkah dasar kita tidak memilih karena kebanyakan orang menentukannya selalu bingung.

Ingat bahwa Contoh 13 melengkapi bukti dari **Teorema Fundamental Aritmetika,** yang menegaskan bahwa setiap bilangan bulat nonnegatif dapat ditulis secara unik sebagai hasilkali prima dalam urutan tidak turun. Contoh 13 menunjukkan ada paling sedikit satu faktorisasi.

Menggunakan prinsip induksi matematis, malahan prinsip kedua dari induksi matematis, untuk membuktikan hasil dalam Contoh 13 adalah sulit. Bagaimanapun, seperti Contoh 14 menunjukkan, suatu hasil yang dengan mudah dibuktikan menggunakan prinsip induksi matematis atau prinsip kedua dari induksi matematis.

LATIHAN

1. Tentukan suatu formula untuk jumlah dari n bilangan bulat genap pertama.

2. Gunakan induksi matematis untuk membuktikan bahwa $3+3.5+3.5^2+...+3.5^n=3(5^{n+1}-1)/4$ jika n adalah suatu bilangan bulat nonnegatif.

3. Tunjukkan bahwa $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$ jika n adalah suatu bilangan bulat positif.

4. Buktikan bahwa $1^2 + 3^2 + 5^2 + ... + (2n+1)^2 = (n+1)(2n+1)(2n+3)/3$ jika n adalah suatu bilangan bulat nonnegatif.

5. Tunjukkan dengan induksi matematis bahwa jika h > - 1, maka $1 + nh \leq (1+h)^n$ untuk semua bilangan bulat nonnegatif n. Ini disebut **pertidaksamaan Bernoulli.**

6. Tunjukkan bahwa bentuk kedua dari induksi matematis merupakan suatu metode bukti yang valid dengan menunjukkan bahwa hal ini diikuti dari the well-orderring property.

7. Misalkan $a_1, a_2, ..., a_n$ adalah bilangan real positif. **The arithmetic mean** dari bilangan-bilangan ini dinyatakan dengan

$$A=(a_1+a_2+...+a_n)/n$$

dan **geometric mean** dari bilangan-bilangan ini dinyatakan dengan

$$G=(a_1a_2..a_n)^{1/n}$$

Gunakan induksi matematis untuk membuktikan bahwa A ≥ G.