5 Interaksi Termal

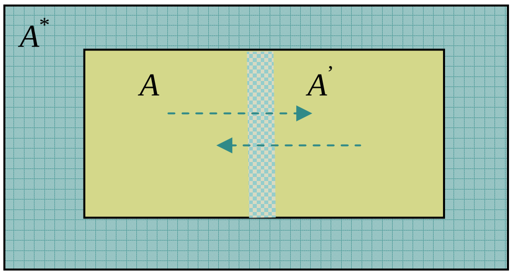
Semua proses yang mendasari pengamatan pada sistem fisika adalah proses interaksi. Apa yang terjadi pada sebuah proses interaksi? Bagaimana kita mendefinisikan variabel makroskopik berdasarkan proses interaksi yang terjadi? Sebagai contoh yang paling sederhana kita tinjau proses interaksi termal.

5.1 Distribusi Energi diantara Sistem Makroskopik

Pada gambar 5.1 di bawah ini kita memiliki sistem A^* yang terisolasi terhadap lingkungan. Sistem ini mempunyai dua sub sistem *A* dan *A'*, yang antar keduanya dibatasi oleh dinding diatermik sehingga keduanya masih dapat mengalami interaksi termal. Mengingat sitem A^* adalah sistem yang terisolasi, maka jumlah energi sistem adalah konstan (E^* = konstan).

$$E + E' = E^* = \text{konstan}$$

sehingga :
$$E' = E^* - E \tag{5.1}$$



Gambar 5.1
Ilustrasi dua sistem A dan A' yang mengalami interaksi.

Ketika *A* mengalami interaksi termal dengan *A'*, maka energi pada sistem *A* mengalami perubahan dari $E \rightarrow E + dE$, begitupun untuk sistem *A'* dari $E' \rightarrow E' + dE'$, namun jumlah kedua energi tetap sama yaitu E^*. Dalam keadaan ini dapat definisikan:

$\Omega(E)$: jumlah keadaan yang diizinkan pada sistem *A* ketika sistem *A* memiliki energi dari $E \rightarrow E + dE$.

Ω*(E): jumlah keadaan yang diizinkan pada sistem A* ketika sistem A memiliki energi dari $E \rightarrow E + dE$.

Ω'(E'): jumlah keadaan yang diizinkan pada sistem A' ketika sistem A' memiliki energi dari $E' \rightarrow E' + dE'$.

Sehingga pernyataan peluang untuk sistem A ketika sistem A memiliki energi dari $E \rightarrow E + dE$ dapat dinyatakan dengan:

$$P(E) = \frac{\Omega^*(E)}{\Omega^*_{Tot}} = \frac{1}{\Omega^*_{Tot}}\Omega^*(E) = C.\Omega^*(E) \tag{5.2}$$

Hal ini terjadi karena jumlah total keadaan yang diizinkan untuk semua perubahan energi yang dapat terjadi adalah konstan. Karena kita berbicara dengan peluang, maka untuk jumlah keadaan yang diizinkan untuk sistem gabungan dapat diuraikan:

$$\Omega^*(E) = \Omega(E).\Omega'(E') \quad \text{karena} \quad E' = E^* - E, \text{ maka}$$
$$\Omega^*(E) = \Omega(E).\Omega'(E^* - E), \text{ sehingga}$$
$$P(E) = C.\Omega(E).\Omega'(E^* - E) \tag{5.3}$$

Sebagai contoh tinjau kasus berikut:

Sistem A dan A' berada dalam sistem yang terisolir. Sistem A dan sistem A' dapat berinteraksi hingga mengalami kesetimbangan. Energi terukur sistem A^* adalah 13 satuan E. Sebuah pengamatan terhadap sistem tersebut memberikan data sebagai berikut:

Tabel 5.1

Ilustrasi data Ω(E) untuk dua sistem yang mengalami interaksi

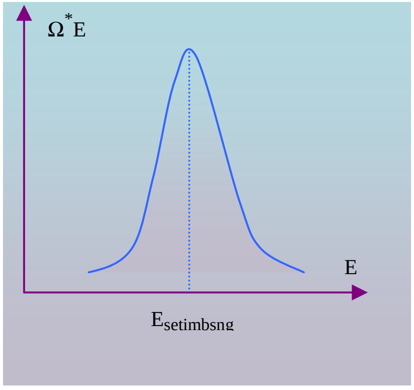
No	E_{Total}	E_A	$E_{A'}$	$\Omega(E)$	$\Omega'(E')$	$\Omega^*(E)$
1	13	3	10	2	40	80
2	13	4	9	5	26	130
3	13	5	8	10	16	160
4	13	6	7	17	8	136
5	13	7	6	25	3	75

Besarnya Ω^*_{Tot} = 80 + 130 + 160 + 136 + 75 = 681 sehingga besarnya peluang

$$P = \frac{\Omega^*(E)}{\Omega^*_{Tot}}$$

Maka: $P_1 = \frac{80}{681}$; $P_2 = \frac{130}{681}$; $P_3 = \frac{160}{681}$; $P_4 = \frac{136}{681}$; $P_5 = \frac{75}{681}$.

Ternyata peluang terbesar terjadi ketika pengukuran berada dalam keadaan ketiga, yakni ketika E_A = 5 satuan E dan $E_{A'}$ = 8 satuan E, hal ini memberikan indikasi bahwa dalam kondisi ini sistem A dan A' berada dalam kesetimbangan.



Gambar 5.2
Grafik hubungan $\Omega^*(E)$ fs E

Jika dibuat grafik distribusi antara $\Omega^*(E)$ terhadap E akan dapat dikenali polanya seperti grafik disamping dengan titik tengah adalah saat setimbang. Terlihat pada grafik, jumlah keadaan yang diizinkan terhadap energinya berdistribusi normal. Mengingat $P(E) = C\Omega^*(E)$, maka grafik $P(E)$ akan memiliki pola yang sama. Akan tetapi untuk perubahan E yang infinitesimal atau cukup kecil grafik $P(E)$ terhadap E akan terlihat lebih curam mengingat adanya perubahan yang cukup kecil sehingga peluang keadaan setimbang akan lebih sedikit. Hal ini dapat dilihat pada Gb. (5.3).

Model matematika dapat digunakan untuk menggambarkan $P(E)$ yaitu dapat dinyatakan dalam fungsi logaritma :

$$\ln P(E) = \ln \{ C.\Omega(E).\Omega'(E\text{-}E') \}$$

$$\ln P(E) = \ln C + \ln \Omega(E) + \ln \Omega'(E\text{-}E') \qquad (5.4)$$

Kapankah kesetimbangan ini akan tercapai?, dengan mengingat pada bab terdahulu, hal ini tentunya dicapai pada saat probabilitasnya mencapai harga terbesar atau mencapai harga maksimal. Dengan demikian untuk mencapai kesetimbangan maka:

$$\frac{\partial}{\partial E}\ln P(E) = 0$$

$$\frac{1}{P}.\frac{\partial P(E)}{\partial E} = 0$$

sehingga:

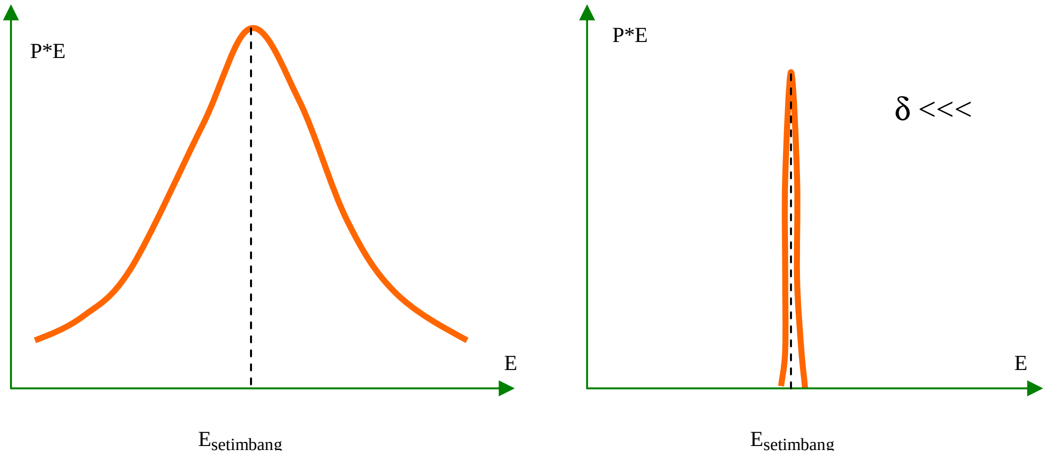
$$\frac{\partial}{\partial E}\{\ln C + \ln \Omega(E) + \ln \Omega(E^* - E)\} = 0 \qquad (5.5)$$

$\dfrac{\partial \ln C}{\partial E} = 0$ karena C adalah konstanta sehingga:

$$\frac{\partial \ln \Omega(E)}{\partial E} + \frac{\partial \ln \Omega'(E^*)}{\partial E} = 0$$

$$\frac{1}{\Omega E}.\frac{\partial \Omega(E)}{\partial E} - \frac{1}{\Omega(E')}.\frac{\partial \Omega'(E^*)}{\partial E'} = 0$$

$$\frac{1}{\Omega E}\cdot\frac{\partial\Omega(E)}{\partial E}=\frac{1}{\Omega(E')}\cdot\frac{\partial\Omega'(E^*)}{\partial E} \qquad (5.6)$$



Gambar 5.3
Grafik P(E) terhadap E untuk perubahan E yang infinitesimal

Dengan demikian syarat kesetimbangan dicapai ketika kondisi persamaan (5.6) harus terpenuhi. Jika didefinisikan

$$\beta=\frac{1}{\Omega E}\cdot\frac{\partial\Omega(E)}{\partial E} \qquad (5.7)$$

maka bentuk syarat kesetimbangan di atas dapat menjadi:

$$\beta(E) = \beta'(E') \qquad (5.8)$$

5.2 Beberapa Definisi dalam Kontak Termal

Telah diketahui bagaimana suatu kontak termal dijelaskan secara persamaan maupun grafik, peluang terbesarnya menunjukan keadaan kesetimbangan yang dicapai. Untuk mencapai kesetimbangan itu harus dipenuhi syarat persamaan (5.8). Namun sebagaimana gas ideal yang menggunakan asumsi tertentu guna memudahkan dalam pembahasan lebih lanjut, maka dalam hal ini perlu adanya beberapa definisi dalam kontak termal, yaitu sebagai berikut:

a. Gambaran temperatur dalam fisika statistik dapat dinyatakan dengan harga β yang didefinisikan sebagai

$$\beta=\frac{1}{kT}=\frac{1}{\Omega E}\cdot\frac{\partial\Omega(E)}{\partial E} \qquad (5.9)$$

dengan k (konstanta Boltzman) = 1.3805 x 10^{-23} J/K dan T = temperatur absolut. Dengan demikian, untuk menyatakan syarat kesetimbangan termal dapat digambarkan dengan:

$$\beta = \beta' \quad \rightarrow \quad \frac{1}{kT} = \frac{1}{kT'} \quad \rightarrow \quad T = T' \tag{5.10}$$

Persamaa (5.10) tidak lain adalah pencapaian kesetimbangan dalam proses interaksi termal.

b. Definisi kedua adalah definisi temperatur absolut T yang dinyatakan oleh persamaan:

$$T \equiv \frac{\partial S}{\partial E} \tag{5.11}$$

Temperatur absolut menggambarkan perbandingan antara perubahan entropi terhadap perubahan energi.

c. Definisi ketiga menggambarkan entropi sistem yang dinyatakan dengan:

$$S = k \ln \Omega \tag{5.12}$$

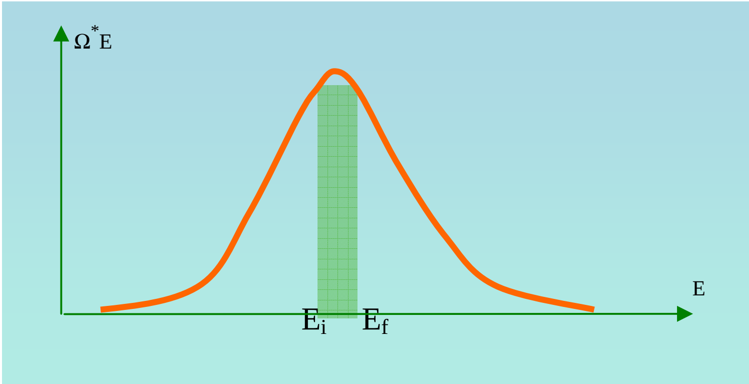
dengan harga Ω adalah harga jumlah keadaan yang diizinkan yang merupakan fungsi energi sistem. Karena jumlah keadaan selalu positif, dengan demikian harga *entropi selalu bernilai positip.*

5.3 Gambaran Pendekatan Kesetimbangan

Suatu keadaaan setimbang secara matematis dapat digambarkan oleh diferensial,

$$\frac{\partial P(E)}{\partial E} = 0\,, \tag{5.13}$$

yang menyatakan peluang maksimal yang dapat terjadi dari semua kejadian yang ada. Jika sistem A dan sistem A' mengalami interaksi maka keduanya akan mengalami kesetimbangan (A dan A' memiliki energi yang berbeda). Misalkan pada saat kesetimbangan terjadi sistem A memiliki energi E dan sistem A' memiliki energi E', maka dalam hal ini dapat dinyatakan dengan gambaran nilai energi rata-rata kesetimbangan, misal $E = E$ dan $E' = E'$ untuk keadaan awal dan akhir kesetimbangan dapat dinyatakan dengan gambar (5.5) berikut.



Gambar 5.4

Keadaan awal dan akhir kesetimbangan.

Misalkan kesetimbangan awal dinyatakan dengan E_i dimana $\overline{E} = E_i$ dan $\overline{E}' = E'_i$ sedangkan kesetimbangan akhir dinyatakan dengan E_f dimana $\overline{E} = E_f$ dan $\overline{E}' = E_f'$. Ketika kesetimbangan belum tercapai gambaran entropi sistem adalah sebagai berikut:

$$(S_f) + (S_{f'}) > (S_i) + (S_{i'}) \qquad (5.14)$$

dengan $(S_f) + (S_{f'})$ adalah entropi akhir dan $(S_i) + (S_{i'})$ adalah entropi awal, sehingga:

$$(\Delta S) + (\Delta S') > 0 \qquad (5.15)$$

Ini menandakan entropi sistem mengalami penambahan ketika sistem belum mencapai kesetimbangan sekaligus merupakan bukti bahwa entropi selalu berharga positip.

Ada 2 keadaan yang dapat digunakan untuk menggambarkan pendekatan kesetimbangan:

1. **Jika $\beta = \beta'$,**

   dapat dikatakan bahwa sistem telah mengalami kesetimbangan, entropi sistem maksimal dan tidak ada lagi transfer energi antar keduanya.

2. **Jika $\beta \neq \beta'$,**

   dikatakan sistem tidak dalam kesetimbangan, entropi belum maksimal dan di dalam sistem masih terjadi transfer energi hingga mencapai $\beta = \beta'$.

5.4 Sistem Kontak dengan Reservoar (Kolam Kalor)

Lingkungan di luar sistem adalah sangat bermacam-macam dan hal ini tidak ditinjau secara mendetil, yang dijadikan tinjauan adalah pada lingkungan. Lingkungan dianggap sebagai suatu sistem yang lain yang dinamakan *lingkungan* saja. Lingkungan yang demikian dinamakan dengan *reservoar (kolam kalor)*. Sistem A memiliki energi E_r dan sistem A' memiliki energi E'. Karena resevoar jauh lebih besar dari sistem maka $E' << E_r$, dalam hal ini energi sistem gabungan dapat digunakan:

$$E' = E^* - E_r \qquad (5.16)$$

Harga probabilitas dapat dinyatakan dengan:

$$P \propto \Omega' (E^* - E_r) \qquad (5.17)$$

dimana harga P menunjukkan suatu fungsi yang berkaitan dengan harga $\Omega'(E') = \Omega' (E^* - E_r)$, dengan $E_r << E^*$, maka harga yang lebih mudah untuk menggambarkan energi resevoar dapat dinyatakan dengan $E' = E^*$.

Untuk menggambarkan keadaan ini maka gambaran jumlah keadaan untuk sistem Ω' dapat dinyatakan dalam bentuk logaritma dan pendekatan deret Taylor, yaitu mencari nilai ln $\Omega'(E^* - E_r)$. Dengan menggunakan deret Taylor:

$$\ln \Omega'(E^* - E_r) = \ln \Omega'(E^*) - \left(\frac{\partial \ln \Omega'}{\partial E}\right) E_r$$

dimana harga : $\left(\frac{\partial \ln \Omega'}{\partial E}\right) = \beta'$

maka
$$ln\, \Omega'(E^* - E_r) = ln\, \Omega'(E^*) - \beta E_r$$

$$\Omega'(E^* - E_r) = \Omega'(E^*) - e^{\beta' E_r} \qquad (5.18)$$

harga probabilitas untuk keadaan ini dapat dinyatakan dengan :

$$P \propto \Omega' (E^*) e^{-\beta' E_r} \qquad (5.19)$$

Jika $P = C.\ \Omega(E).\ \Omega' (E^* - E_r)$, maka akan didapatkan harga probabilitas untuk sistem ini adalah :

$$P = C.\ \Omega(E).\ \Omega' (E^*) e^{-\beta' E_r} \qquad (5.20)$$

Karena $E_r << E^*$ dan E^* itu sendiri adalah konstan maka persamaan ini dapat disederhanakan menjadi:

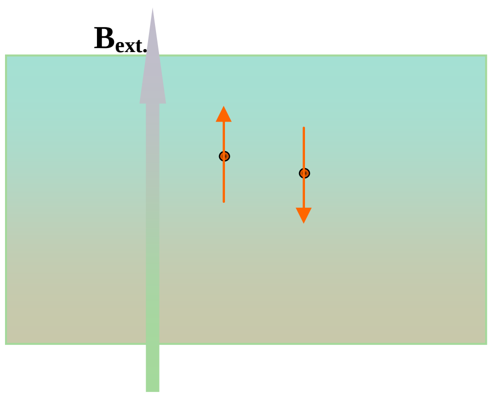
$$P = C.e^{-\beta' E_r} \qquad (5.21)$$

dengan C adalah konstanta yang sangat bergantung dari sistem yang kita definisikan, E_r adalah energi yang sangat kecil yang berasal dari sistem dan β' adalah parameter yang dimiliki reservoar.

5.5 Penerapan Reservoar Kalor

a. Menentukan harga suseptibilitas bahan

Suseptibilitas adalah suatu harga perbandingan antara momen magnetik bahan dengan medan eksternalnya. Perhatikan Gb. (5.5). Gambar tersebut menunjukkan suatu bahan yang memiliki sifat magnet dan diberi medan eksternal. Bagi bahan yang memiliki sifat magnet maka akan memiliki momen magnetik partikel pembentuk bahan. Keadaan partikel pada sistem di atas adalah sebagai berikut:



Gambar 5.5
Bahan magnet N partikel dengan spin ½
yang diberi medan magnet luar

1. Ada partikel yang memiliki momen magnetik yang searah dengan medan magnet luar;
2. Ada partikel yang memiliki momen magnetik yang berlawanan arah dengan medan magnet luar.

Melalui gambaran kolam kalor, keadaan 1 dan 2 dapat dimunculkan lewat harga peluang:

$$P_r = Ce^{-\beta E_r}, \text{ terdiri atas}$$

$$P_+ = Ce^{-\beta E_{r+}} \text{ dan } P_- = Ce^{-\beta E_{r-}} \qquad (5.22)$$

Jika keadaan energi partikel dalam sistem ini dapat dinyatakan dengan hanya karena orientasi medan magnet, maka:

$$E_{r+} = -(B)\,(+\mu_o) = -B\mu_o \qquad (5.23a)$$

$$E_{r-} = -(B)\,(-\mu_o) = B\mu_o \qquad (5.23b)$$

dengan B adalah medan magnet eksternal, maka peluang keadaan partikel dalam bahan dapat dinyatakan dengan:

$$P_+ = Ce^{\beta B\mu_o} \text{ dan } P_- = Ce^{-\beta B\mu_o} \qquad (5.24)$$

Karena hanya ada dua keadaan, maka :

$$P_- + P_+ = 1$$

$$Ce^{-\beta B\mu_o} + Ce^{\beta B\mu_o} = 1, \text{ sehingga}$$

$$C = \frac{1}{e^{\beta B\mu_o} + e^{-\beta B\mu_o}} \qquad (5.25)$$

dengan C adalah harga konstanta khusus yang diamati dan B adalah medan magnet eksternal.

Pernyataan momen magnetik partikel rata-rata dinyatakan oleh:

$$\overline{\mu} = \sum P_r \mu_r \qquad = \frac{(+\mu_o)e^{\beta B\mu_o} + (-\mu_o)e^{-\beta B\mu_o}}{e^{\beta B\mu_o} + e^{-\beta B\mu_o}} \qquad (5.26)$$

Penyederhanaan matematis dapat dilakukan:

$$\overline{\mu} = \mu_o \left(\frac{e^{\beta B\mu_o} - e^{-\beta B\mu_o}}{e^{\beta B\mu_o} + e^{-\beta B\mu_o}} \right) \qquad (5.27)$$

dimana secara umum harga : $\left(\frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{e^{\theta} + e^{-\theta}} \right) = \tanh\theta$, sehingga

$$\overline{\mu} = \mu_o \tanh(\mu_o\, \beta B) \qquad (5.28)$$

Jika digunakan definisi $\beta = \frac{1}{kT}$, dimana $\overline{\mu}$ merupakan momen magnetik rata-rata partikel, maka harga momen magnetik bahan tentunya merupakan harga rata-rata dari momen magnetik total yang dapat dinyatakan dengan:

$$\overline{M} = N.\overline{\mu} \rightarrow \quad \overline{M} = N.\mu_o \tanh\frac{\mu_o B}{kT} \qquad (5.29)$$

Perilaku fisis yang dapat dimunculkan adalah untuk menggambarkan $\tanh\frac{\mu_o B}{kT}$, jika harga $\mu_o B$ >> kT maka nilai $\frac{\mu_o B}{kT} >> 1$. Dari sini dapat dilihat gambaran umum harga rata-ratanya:

$$\tanh\frac{\mu_o B}{kT}=\frac{e^{\frac{B\mu_o}{kT}}-e^{-\frac{B\mu_o}{kT}}}{e^{\frac{B\mu_o}{kT}}+e^{-\frac{B\mu_o}{kT}}} \qquad (5.30)$$

sehingga dari persamaan (5.29), persamaan (5.30) menjadi

$$\tanh\frac{\mu_o B}{kT}=\frac{e^{\frac{B\mu_o}{kT}}}{e^{\frac{B\mu_o}{kT}}}\approx 1 \qquad (5.31)$$

Akibatnya $\qquad \overline{\mu}=\mu_0$ dan $\overline{M}=N.\mu_0 \qquad$ (5.32)

Sekarang tinjau harga $\chi=\frac{B\mu_o}{kT}$, maka dengan konsep deret Mc. Laurin besarnya tanh *x* adalah :

$$\tanh x=\frac{\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...\right)-\left(1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-...\right)}{\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...\right)+\left(1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-...\right)}\;;\quad tanh\ x=\frac{1-1+2x+2\frac{x^3}{3!}}{2+\frac{2x^2}{2!}}.$$

Harga *x* <<, sehingga tanh *x* = 2*x*/2 = *x*

sehingga untuk $\frac{\mu_o B}{kT}<<1$, maka $\overline{M}=N\mu_o\left(\frac{\mu_o B}{kT}\right)$

$$\overline{M}=\left(\frac{N\mu_o^2 B}{kT}\right). \qquad (5.32)$$

Ternyata untuk harga $\mu_o B$ << *kT*, kondisi ini dapat menggambarkan keadaan momen magnetik total bahan yaitu:

$$\overline{M}=\left(\frac{N\mu_o^2}{kT}\right)B \text{ dengan harga } \chi=\left(\frac{N\mu_o^2}{kT}\right), \qquad (5.33)$$

dimana χ adalah harga suseptibilitas bahan.

b. Menentukan energi rata-rata gas ideal

Sekarang kita kembali pada sifat-sifat gas ideal guna mencari energi rata-rata gas ideal. Tinjau sebuah sistem dalam kotak berikut yang di dalamnya mengandung gas ideal dan memiliki sifat-sifat gas ideal:

a. Gaya tarik menarik antar partikel diabaikan kecuali pada saat tumbukan;
b. Hanya berlaku energi translasi partikel.

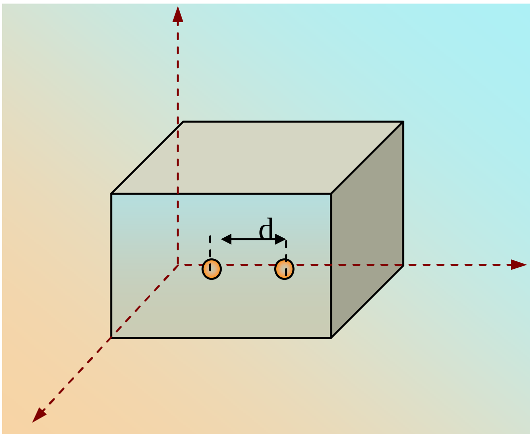
Tinjauan kita adalah menentukan harga energi partikel gas ideal, yaitu pertama:

$$\bar{e} = \sum P_r e_r \ , \tag{5.34}$$

dimana P_r adalah peluang keadaan untuk sebuah partikel memiliki energi dalam tingkat inersia r (tingkat energi kuantum yang dapat terjadi dalam sistem teramati) yang besarnya:

$$P_r = \frac{ce^{-\beta Er}}{\sum ce^{-\beta Er}} = \frac{ce^{-\beta Er}}{c\sum e^{-\beta Er}} = \frac{e^{-\beta Er}}{\sum e^{-\beta Er}},$$

maka harga energi rata-rata partikel dapat dinyatakan dengan:



Gambar 5.7
Ilustrasi partikel gas ideal d >> r, sehingga gaya tarik antar partikelnya dibaikan, energi yang ada hanya energi translasi.

$$\bar{e} = \frac{e^{-\beta Er}.E_r}{\sum e^{-\beta Er}} \ , \tag{5.35}$$

dengan E_r adalah energi yang dimiliki partikel dalam kotak yaitu:

$$E_r = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m}\left\{\frac{n_x{}^2}{L_x^2} + \frac{n_y{}^2}{L_y^2} + \frac{n_z{}^2}{L_y^2}\right\}. \tag{5.36}$$

Sekarang tinjau harga $\sum e^{-\beta Er}.E_r = \dfrac{-\sum \partial e^{-\beta Er}}{\partial \beta}$, maka harga rata-rata energi dapat dinyatakan dengan:

$$\bar{e} = \frac{-\sum \frac{\partial}{\partial \beta} e^{-\beta Er}}{\sum e^{-\beta Er}} \tag{5.37}$$

Karena $\dfrac{\partial}{\partial \beta}$ adalah operator maka dapat dikeluarkan dan harga persamaan (5.37) menjadi:

$$\bar{e} = \frac{-\frac{\partial}{\partial \beta}\sum e^{-\beta Er}}{e^{-\beta Er}} \tag{5.38}$$

Misal didefinisikan suatu fungsi $\psi = \sum e^{-\beta Er}$, maka

$$\bar{e} = -\frac{1}{\varphi}\frac{\partial}{\partial \beta}\psi \text{, sehingga } \bar{e} = -\frac{\partial \ln \psi}{\partial \beta} \tag{5.39}$$

maka nilai dari ψ adalah $\psi = \sum \exp\left\{-\frac{\beta\pi^2\hbar^2}{2m}\left\{\frac{n_x{}^2}{L_x^2}+\frac{n_y{}^2}{L_y^2}+\frac{n_z{}^2}{L_y^2}\right\}\right\}$

$$\psi = \sum\left\{\exp\left(-\frac{\beta\pi^2\hbar^2}{2m}\left(\frac{n_x{}^2}{L_x^2}\right)\right)\exp\left(-\frac{\beta\pi^2\hbar^2}{2m}\left(\frac{n_y{}^2}{L_y^2}\right)\right)\exp\left(-\frac{\beta\pi^2\hbar^2}{2m}\left(\frac{n_z{}^2}{L_z^2}\right)\right)\right\}$$

$$\psi = \psi_x . \psi_y . \psi_z \tag{5.40}$$

Sekarang tinjau satu harga dimana $\psi = \psi_x$, maka:

$\psi_x = \sum\left\{\exp\left(-\frac{\beta\pi^2\hbar^2}{2m}\left(\frac{n_x{}^2}{L_x^2}\right)\right)\right\}$. Untuk perubahan kontinu

$$\psi_x = \int \exp\left(-\frac{\beta\pi^2\hbar^2}{2m}\left(\frac{n_x{}^2}{L_x^2}\right)\right)dn_x \tag{5.41}$$

yang menyatakan perubahan energi untuk setiap tingkat energi. Misalkan suatu bentuk yang sederhana yaitu:

$$U = \left(\frac{\beta}{2m}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\pi\hbar}{L_x}\right)n_x, \tag{5.42}$$

maka $n_x = \left(\frac{2m}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{L_x}{\pi\hbar}\right)U$ dengan $dn_x = \left(\frac{2m}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{L_x}{\pi\hbar}\right)dU$ sehingga bentuknya menjadi:

$$\psi_x = \int_0^n \exp(-U^2)\left(\frac{2m}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{L_x}{\pi\hbar}\right)dU \tag{5.43}$$

dengan $\left(\frac{2m}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{L_x}{\pi\hbar}\right)$ adalah suatu konstanta, sehingga:

$$\psi_x = \left(\frac{2m}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{L_x}{\pi\hbar}\right)\int_0^n \exp(-U^2)dU \qquad (5.44)$$

Ingat bentuk integrasi umum fungsi gamma: $\int_0^\infty \exp(-ax^2) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$ diubah menjadi $\int_0^\infty \exp(-U^2) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, sehingga:

$$\psi_x = \left(\frac{2m}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{L_x}{\pi\hbar}\right)\frac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}} \longrightarrow \psi_x = \left(\frac{m}{2\pi^2\hbar^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{L_x}{\beta^{\frac{1}{2}}}\right).$$

Variabel $\left(\frac{m}{2\pi^2\hbar^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ adalah konstanta pembanding, maka harga $\psi = \psi_x.\psi_y.\psi_z$ menjadi:

$$\left(C_x\frac{L_x}{\beta^{\frac{1}{2}}}\right)\left(C_y\frac{L_y}{\beta^{\frac{1}{2}}}\right)\left(C_z\frac{L_z}{\beta^{\frac{1}{2}}}\right) = C_g\frac{L_xL_yL_z}{\beta^{\frac{3}{2}}} = C_g\frac{V}{\beta^{\frac{3}{2}}} \qquad (5.45)$$

sehingga harga $\bar{e}$ menjadi $\bar{e} = -\frac{\partial \ln\psi}{\partial\beta}$:

$$\bar{e} = -\frac{\partial\left(ln\,Cg + ln\,V - ln\,\beta^{\frac{3}{2}}\right)}{\partial\beta} = \frac{T^{\frac{3}{2}}\ln\beta}{\partial\beta} = \frac{3}{2}\frac{1}{\beta}$$

Sehingga diperoleh hasil yang sangat penting, yaitu energi rata-rata gas ideal untuk sebuah molekul monoatomik:

$$\bar{e} = \frac{3}{2}kT \qquad (5.46)$$

Soal Latihan

1. Tinjau dua buah sistem A dan A’ yang keduanya dapat berinteraksi sehingga terjadi pertukaran energi satu dengan lainnya. Sistem A mengandung 5 partikel dengan spin ½ yang harga momen magnetik setiap partikelnya μ_o. Sistem A’ mengandung 3 partikel dengan spin ½ yang harga momen magnetik setiap partikelnya $2\mu_o$. Kedua sistem mengalami interaksi sehingga mencapai

kesetimbangan dengan energi total $5\mu_o B$ dan B adalah medan magnet yang diberikan pada sistem tersebut.

a. Buatlah sistematika di semua keadaan yang memenuhi!

b. Hitung $P(M)$ di A dan A'!

c. Tentukan $\overline{M}$ pada sistem A!

2. Sebuah sistem dengan n partikel dan spin ½ berhubungan dengan reservoar yang bertemperatur T. Besarnya momen magnetik partikel μ_o dengan medan magnet eksternal B.

   a. Tentukan fungsi energi partisinya!

   b. Nyatakanlah $\overline{E} = f(T, B)$!

3. a. Tentukan harga suseptibilitas bahan paramagnetik yang setiap partikelnya memiliki spin 1!

   b. Berikan argumentasi fisis untuk menentukan harga tersebut!

4. Suatu sistem mempunyai N partikel dengan spin ½ dan sistem tersebut berada dalam medan magnet luar B dan behubungan dengan reservoar.

   a. Tentukan energi rata-ratanya!

   b. Tentukan moment magnetik total!

   c. Tentukan suseptibilitas bahan!