Bab 5

BEBERAPA HUBUNGAN DASAR DALAM FISIKA

5.1 Pendahuluan

Ketika memodelkan sistem fisis, kita tentu harus mulai dengan pengetahuan mengenai fisika. Dalam bab ini kita akan merangkum hubungan – hubungan paling umum dalam sejumlah bidang fisika. Bersama – sama persamaan – persamaan tersebut ditampilkan disini mencakup banyak situasi yang ditemui dalam pemodelan sistem fisis. Pada saat yang sama kita memperoleh keuntungan bahwa hubungan yang lebih general menjadi mudah dicapai. Mereka dapat membentuk dasar untuk metode-metode pemodelan yang lebih umum yang ditampilkan pada Bab 6. Untuk membuat perbandingan menjadi lebih mudah, kita akan menamai persamaan – persamaan dengan cara khusus dalam bab ini. Label persamaan ini akan berupa nomor subbab diikuti dengan sebuah huruf, yang mengindikasikan tipe persamaan. Label (5.2C), (5.3C), (5.4C) dan lain-lain menyatakan persamaan – persamaan sejenis.

5.2 Rangkaian Listrik

Perhatikan rangkaian listrik yang terdiri dari resistor, kapasitor, induktor dan transformer. Persamaan dasar yang digunakan untuk mendeskripsikan rangkaian seperti itu terdiri dari hubungan – hubungan antara besaran fundamental:

Tegangan u (volt) (5.2A)

Arus i (ampere) (5.2B)

Induktor ideal, misalnya, dideskripsikan oleh

$$u(t) = L.\frac{d}{dt}i(t)$$

Dimana u(t) dan i(t) adalah tegangan dan arus pada waktu t. Konstanta L adalah induktansi (henry) dan hubungan kadang – kadang disebut hukum induktansi. Kita dapat juga menuliskannya sebagai

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_0^t u(s)ds \qquad (5.2C)$$

Dengan cara yang sama kapasitor ideal digambarkan oleh

$$i(t) = C\frac{d}{dt}u(t)$$

Dimana C adalah kapasitansi (farad). Kita dapat juga menulis

$$u(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(s)ds \qquad (5.2D)$$

Untuk resistor linier dengan resistansi R (ohm) kita memiliki hukum Ohm:

$$u(t) = Ri(t) \qquad (5.2E)$$

Kita tentu dapat juga memperhatikan resistansi nonlinier, dengan deskripsi umum

$$u(t) = h_1(i(t)) \qquad (5.2F)$$

Atau

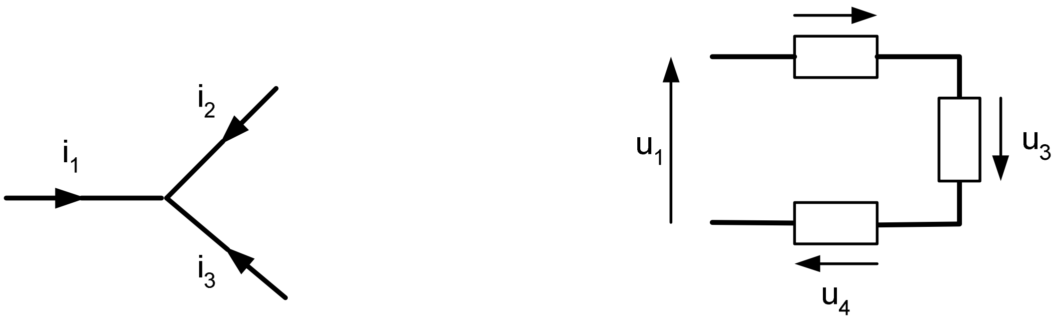
$$i(t) = h_2(u(t)) \qquad (5.2F')$$

Untuk beberapa fungsi h nonlinier. Rectifier ideal, misalnya, memiliki

$$h_2(x) = \begin{cases} x, x > 0 \\ 0, x \le 0 \end{cases}$$

Dalam resistor, energi hilang (sebagai panas). Dayanya adalah

$$P(t) = u(t).i(t) \qquad (5.2G)$$



(a) (b)

Gambar 5.1: Hukum Kirchhoff. (a) jumlah arus (dengan tanda) adalah nol. (b) jumlah tegangan (dengan tanda) seluruh rangkaian adalah nol.

(P diukur dalam watt, 1 W = 1 J/s). Dengan cara yang sama inductor dan kapasitor mewakili penyimpanan energy (energi medan magnetic dan listrik). Untuk induktor kita memiliki

$$T(t) = \frac{1}{2} L i^2 (t) \qquad (5.2H)$$

(T diukur dalam joule), dan untuk kapasitor

$$T(t) = \frac{1}{2} C u^2 (t) \qquad (5.2I)$$

Ketika menyambungkan elemen – elemen rangkaian listrik, aturannya adalah

$$\sum_k i_k (t) \equiv 0 \qquad (5.2J)$$

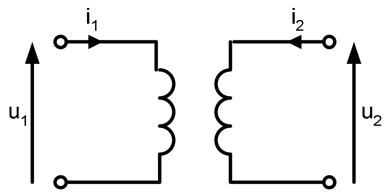
Untuk arus dan

$$\sum_k u_k (t) \equiv 0 \qquad (5.2k)$$

Untuk tegangan (hukum Kirchhoff). Lihat Gambar 5.1. Transformer ideal mengubah tegangan dan arus dalam suatu cara sehingga perkalian mereka adalah konstan:

$$u_1 . i_1 = u_2 . i_2$$
$$u_1 = \alpha u_2 \qquad (5.2L)$$
$$i_1 = \frac{1}{\alpha} i_2$$

Lihat Gambar 5.2.



Gambar 5.2: Sebuah transformer. α adalah rasio jumlah lilitan dalam tiap sisi.

5.3 Translasi Mekanis

Translasi mekanis diatur oleh hukum – hukum mekanika, yang berupa hubungan antara variabel

Gaya F (newton) (5.3A)

Kecepatan v (meter per detik) (5.3B)

Catat bahwa besaran – besaran ini vektor tiga dimensi dalam kasus umum. Sebagian besar dari hubungan berikut ini dapat diformulasikan sebagai persamaan vektor. Untuk kesederhanaan kita akan memperlakukan semua sebagai skalar disini.

Hukum gaya Newton memberikan

$$F(t) = m.\frac{d}{dt}v(t)$$

Dimana konstanta m (kg) adalam massa dari benda. Kita dapat juga menulis

$$v(t) = \frac{1}{m}\int_0^t F(s)ds \qquad (5.3C)$$

Untuk benda elastis (contohnya pegas linier), gaya proposional terhadap pemanjangan (atau pemendekkan). Ini kemudian proporsional terhadap integral dari perbedaan dalam kecepatan antara titik – titik ujung:

$$F(t) = k.\int_0^t v(s)ds \qquad (5.3D)$$

Disini k adalah konstanta pegas (N/m). Dalam banyak kasus ada hubungan lebih kompleks antara gaya dan pemanjangan (ini adalah bagian penting dari ilmu material). Secara umum kita dapat menulis

$$F(t) = \mathrm{H}\int_0^t v(s)ds \qquad (5.3D')$$

Untuk beberapa fungsi nonlinier H.

Sebuah masalah penting dalam sistem mekanis adalah deskripsi fenomena gesekan. Secara umum deskripsinya adalah hubungan langsung antara gaya (gesekan) dan kecepatan

$$F(t) = h(v(t)) \qquad (5.3F)$$

Kasus paling umum mungkin adalah gesekan kering

$$h(x) = \begin{cases} +\mu, x > 0 \\ F_o, x = 0 \\ -\mu, x < 0 \end{cases}$$

(disini F_0 adalah gaya gesek pada saat diam, dimana nilainya tergantung pada detail dari model gesekan).

Hambatan udara sering dideskripsikan sebagai

$$h(x) = cx^2 \operatorname{sgn}(x)$$

Sedangkan gesekan viskos (contohnya dalam peredam) berhubungan dengan

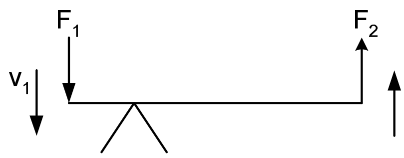
$$h(x) = \gamma x \qquad (5.3E)$$

Daya hilang sebagai panas melalui gesekan adalah

$$P(t) = F(t).v(t) \qquad (5.3G)$$

Dengan cara yang sama kecepatan benda dan pemendekkan pegas mewakili penyimpanan energi (energi kinetik dan elastik). Untuk energi kinetik kita memiliki

$$T(t) = \frac{1}{2} m v^2 (t) \qquad (5.3H)$$



Gambar 5.3 Sebuah lever. α adalah rasio jarak dari titik tumpu

Dan untuk energi elastik pegas linier

$$T(t) = \frac{1}{2k} F^2 (t) \qquad (5.3I)$$

Ketika sejumlah gaya bekerja pada sebuah benda yang diam, jumlahnya adalah nol:

$$\sum_k F_k t) \equiv 0 \qquad (5.3k)$$

Gaya – gaya dapat diperbesar dengan lever dan divais mekanis sejenis. Lihat gambar 5.3. Hubungannya adalah

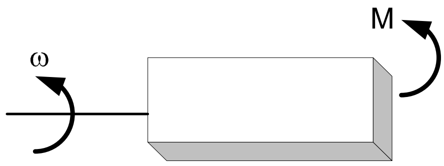
$$F_1.v_1 = F_2.v_2$$

$$F_1 = \alpha F_2 \qquad (5.3L)$$

$$v_1 = \frac{1}{\alpha} v_2$$

5.4 Rotasi Mekanis

Sistem mekanis dengan bagian – bagian berputar seperti motor dan gearbox, adalah sangat umum. Untuk sistem ini hukum mekanis menghubungkan variabel – variabel dasar:



Gambar 5.4 Mekanika Rotasi

Torsi M (newton – meter) (5.4A)

Kecepatan sudut ω (radian per detik) (5.4B)

Lihat Gambar 5.4. Kebalikan dari hukum gaya Newton mengatakan bahwa percepatan sudut sebanding dengan torsi pada sumbu:

$$M(t) = J.\frac{d}{dt}\omega(t)$$

Dimana konstanta kesebandingan J (Nm/s^2) adalah momen inersia. Kita menuliskan ini sebagai

$$\omega(t) = \frac{1}{J}\int_0^t M(s)ds \qquad (5.4C)$$

Puntiran pada sumbu menghasilkan torsi yang dideskripsikan dengan

$$M(t) = k.\int_0^t \omega(s)ds \qquad (5.4D)$$

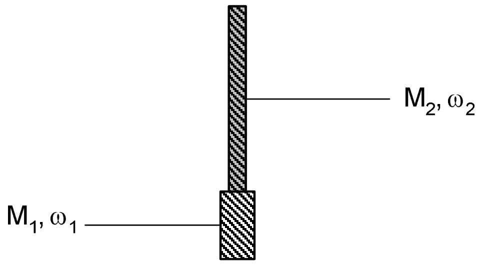
Integral tersebut berhubungan dengan perpindahan sudut antara ujung – ujung dimana k adalah kekakuan puntiran.

Gesekan rotasi adalah fungsi kecepatan sudut

$$M(t) = h(\omega(t)) \qquad (5.3F)$$

Dengan fungsi h yang berbeda mirip dengan gesekan translasi. Pelepasan daya pada rotasi adalah

$$P(t) = M(t).\omega(t) \qquad (5.3G)$$



Gambar 5.5: Sepasang roda gigi. α adalah rasio kelilingnya.

Dan energi rotasi yang disimpan adalah

$$T(t) = \frac{1}{2} J\omega^2(t) \tag{5.4H}$$

Sedangkan perputaran sumbu puntiran ke M(t) berhubungan dengan energi puntiran yang tersimpan berdasarkan pada

$$T(t) = \frac{1}{2k} M^2(t) \tag{5.4I}$$

Untuk sebuah sistem mekanis berotasi pada saat diam, jumlah semua torsi harus sama dengan nol:

$$\sum_k M_k t) \equiv 0 \tag{5.4K}$$

Sepasang roda gigi mengubah torsi dan kecepatan sudut sebagai berikut:

$$\begin{aligned} M_1.\omega_1 &= M_2.\omega_2 \\ M_1 &= \alpha M_2 \\ \omega_1 &= \frac{1}{\alpha}\omega_2 \end{aligned} \tag{5.4L}$$

Lihat gambar 5.5.

5.5 Sistem Aliran

Dengan sistem aliran kita maksudkan hubungan dalam aliran fluida dalam tabung dan tangki. Penerapan khas adalah dalam sistem industri kimia dan sistem hidrolis. Kita hanya akan memperlakukan fluida incompressible, yaitu fluida yang volumenya tidak terpengaruh oleh tekanan. Perlakuan fluida compressible lebih rumit, sebagian karena ada perubahan temperatur ketika volume diubah.

Sistem aliran digambarkan dengan dua besaran dasar:

Tekanan p (newton per meter persegi) (5.5A)

Aliran Q (meter kubik per detik) (5.5B)

(Kita akan bekerja dengan aliran volume. Mengalikan dengan kerapatan akan menghasilkan aliran massa. Untuk aliran incompressible tidak ada perbedaan penting).

Perhatikan fluida yang mengalir melalui sebuah tabung.Lihat Gambar 5.6. Perbedaan tekanan p antara titik – titik ujung tabung menghasilkan sebuah gaya yang mempercepat fluida. Jika luas penampang adalah A, gaya adalah p . A. Massa yang dipercepat adalah ρ . ℓ . A, dimana ρ adalah kerapatan fluida dan ℓ panjang tabung. Hukum gaya Newton memberikan

$$pA = \rho.\ell.A.\frac{d}{dt}v(t)$$

Dimana v(t) adalah kecepatan fluida. Kecepatan berhubungan dengan aliran fluida Q(t) = v(t) . A (m^3/s). Kita peroleh

$$p(t) = \frac{\rho.\ell}{A}.\frac{d}{dt}Q(t)$$

Atau

$$Q(t) = \frac{1}{L_f}\int_0^t p(s)ds \qquad (5.5C)$$

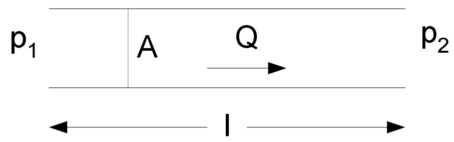
Dimana $L_f = \rho . \ell / A$ adalah kelembaman (kg/m^4) dari tabung.

Perhatikan fluida yang dikumpulkan dalam sebuah tangki seperti diperlihatkan pada gambar 5.7. volume tangki adalah integral dari aliran: V = ∫ Q dt. Tekanan pada dasar tangki sama dengan ketinggian (h = V/A) dikalikan dengan kerapatan ρ dan percepatan gravitasi g,

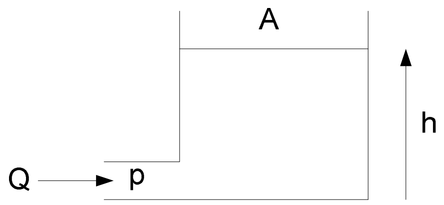
$$p(t) = \frac{\rho g}{A}\int_0^t Q(s)ds \qquad (5.5D)$$

Angka C_f = A/ ρg (m^4s^2/kg) disebut kapasitansi fluida. Jika luas tangki tergantung pada ketinggian, kita peroleh hubungan nonlinier

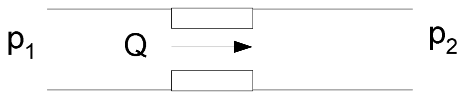
$$p(t) = \mathrm{H}\int_0^t Q(s)ds \qquad (5.5D')$$



Gambar 5.6. Aliran melalui tabung. P_1 dan p_2 adalah tekanan pada titik ujung tabung



Gambar 5.7. Tangki sebagai penyimpan fluida



$p = p_1 - p_2$

Gambar 5.8. Aliran melalui orifis

Ketika fluida mengalir melalui tabung secara normal ada kehilangan daya melalui gesekan dengan dinding dan gesekan internal dalam fluida. Ini menyebabkan penurunan tekanan sepanjang tabung. Sebaliknya, kita dapat mengatakan bahwa penurunan tekanan diperlukan untuk menjaga aliran tertentu. [Catat bahwa kita tidak menganggap efek ini dalam (5.5C)]. Penurunan tekanan tergantung pada aliran. Secara umum kita dapat menulis

$$p(t) = h_1(Q(t)) \tag{5.5F}$$

Sifat – sifat fungsi h_1 tergantung pada sifat – sifat tabung. Jika tabung adalah tipis atau diisi dengan media porous, hukum d'Arcy berlaku:

$$p(t) = R_f Q(t) \tag{5.5E}$$

Dimana R_f disebut resistansi aliran. Jika tabung mengandung perubahan tiba-tiba dalam luas (sebuah orifis atau katup), kita memiliki hubungan pendekatan

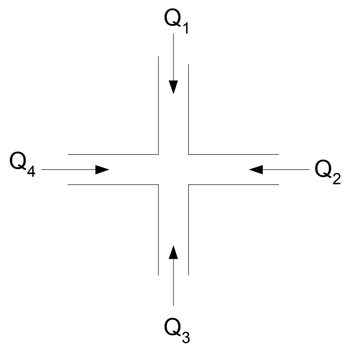
$$p(t) = \mathrm{H}.Q^2(t).\mathrm{sgn}(Q(t)) \tag{5.5F'}$$

Untuk beberapa konstanta H. Lihat gambar 5.8. Energi hilang melalui fenomena ini adalah

$$P(t) = p(t).Q(t) \qquad (5.5G)$$

Aliran tanpa gesekan melalui tabung (Gambar 5.6) berhubungan dengan cara yang sama dengan akumulasi energi

$$T(t) = \frac{1}{2} L_f Q^2(t) \qquad (5.5H)$$



Gambar 5.9. Aliran pada sambungan

Sedangkan tangki pada Gambar 5.7 berhubungan dengan energi potensial:

$$T(t) = \frac{1}{2} C_f p^2(t) \qquad (5.5I)$$

Ketika aliran terhubungkan pada sebuah sambungan (lihat gambar 5.9) jumlahnya harus sama dengan nol:

$$\sum_k Q_k t) \equiv 0 \qquad (5.5J)$$

Sama seperti itu, tekanan total sepanjang hubungan serial seperti pada gambar 5.10 harus merupakan penjumlahan semua penurunan tekanan

$$p_{r+1} = \sum_{k=1}^{r} p_k$$

Atau, menjumlahkan searah loop dan memperhatikan tanda

$$\sum_{k=1}^{r+1} p_k = 0 \qquad (5.5K)$$

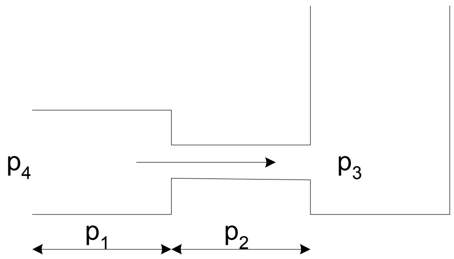
Akhirnya, aliran dan tekanan dapat diubah seperti pada gambar 5.11. Terlihat mudah bahwa kita peroleh

$$p_1.Q_1 = p_2.Q_2$$

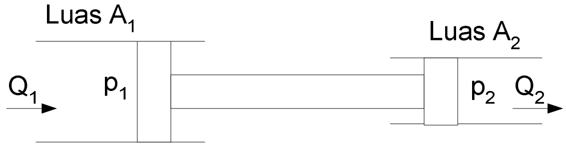
$$p_1 = \alpha p_2 \quad (5.5L)$$

$$Q_1 = \frac{1}{\alpha} Q_2$$

Dimana α = A_2/A_1.



Gambar 5.10. Tekanan diseluruh subsistem [r = 3 in (5.5K)]



Gambar 5.11. Aliran transformer

5.6 Sistem Thermal

Sistem thermal melibatkan pemanasan obyek dan pemindahan energi thermal. Hukum – hukum yang mengatur fenomena ini biasanya dinyatakan sebagai hubungan antara besaran – besaran:

Temperatur T (kelvin) (5.6A)

Laju aliran panas q (watt) (5.6B)

Pemanasan sebuah benda berarti bahwa temperatur meningkat selama panas mengalir kedalamnya.

$$q(t) = C\frac{d}{dt}T(t)$$

Disini C adalah kapasitas thermal (J/(K . s)). Kita menuliskan hubungan ini sebagai

$$T(t) = \frac{1}{C}\int_0^t q(s)ds \tag{5.6D}$$

Jika kapasitas thermal tergantung pada temperature, maka (5.6D) diganti dengan ekspresi nonlinier. Secara normal, T(t) mewakili penyimpangan dari temperatur acuan (berbeda dengan nol absolut) dan kemudian (5.6D) dapat merupakan pendekatan yang baik.

Pemindahan panas antara dua benda dengan temperatur berbeda sefing dianggap sebanding dengan perbedaan temperatur T(t):

$$q(t) = WT(t) \tag{5.6E}$$

Koefisien W disebut koefisien perpindahan panas [J/(K . s)].

Lebih jauh, jumlah semua laju aliran panas pada satu titik harus sama dengan nol:

$$\sum_k q_k t) \equiv 0 \tag{5.6J}$$

5.7 Beberapa Observasi

Ada kesamaan yang jelas diantara persamaan – persamaan dasar untuk sistem fisis yang berbeda. (Periksa semua persamaan yang berakhiran huruf yang sama !). Kita telah melihat bahwa hampir semua persamaan adalah hubungan antara dua variabel:

A: variabel usaha e

B: variabel aliran f

Hubungan itu memiliki karakteristik berikut ini:

C: Penyimpan usaha: $f = \alpha^{-1} . \int e$

D: Penyimpan aliran: $e = \beta^{-1} \int f$

F: Hubungan statis: e = h(f)

G: Disipasi daya P = e . f

H: Penyimpan energi melalui C: $T = \frac{1}{2\alpha} f^2$

I: Penyimpan energi melalui D: $T = \frac{1}{2\beta} e^2$

J: Jumlah aliran sama dengan nol: $\sum f_i = 0$

K: Jumlah usaha (dengan tanda) sama dengan nol: $\sum e_i = 0$

L: Transformasi variabel: $e_1 f_1 = e_2 f_2$

Tabel 5.1: Beberapa analogi fisis

System	Usaha	Aliran	C	D	F
Elektris	Tegangan	Arus	Induktor	Kapasitor	Resistor
Mekanis:					
Translasi	Gaya	Kecepatan	Benda	Pegas	Gesekan
Rotasi	Torsi	Kecepatan Sudut	Sumbu	Pegas Puntir	Gesekan
Hidrolik	Tekanan	Aliran	Tabung	Tangki	Orifis
Thermal	Temperatur	Laju aliran panas	-	Pemanasan	Aliran panas

Dengan cara ini kita peroleh banya analogi. Pada kasus – kasus tertentu analogi tersebut tidak lengkap. Hubungan G, contohnya, tidak valid untuk sistem thermal. Kita harus menggunakan laju aliran entropi daripada laju aliran panas untuk memperoleh hasil yang paralel. Analogi tersebut dirangkum dalam tabel 5.1

5.8 Kesimpulan

Kita telah melihat ada analogi antara sistem fisis yang berbeda tipe. Aspek penting adalah bahwa memungkinkan untuk membuat metode pemodelan sistematis dan independen terhadap aplikasinya yang dimulai dari analogi ini. Dalam Bab 6 kita akan menggunakan analogi tersebut dalam penyelesaian sistematis dari masalah pemodelan.