Bab 3

MODEL-MODEL UNTUK SISTEM DAN SINYAL

3.1 Tipe-tipe model

Model matematika dan model sinyal

Model matematika adalah deskripsi sistem dimana hubungan antara variael dan sinyal model dinyatakan dalam bentuk-bentuk matematika. Dalam contoh pada bab 2, kita lihat bahwa pembagunan model secara natural menghasilkan persamaan differensial dan perbedaan. Model matematika kita dai sistem dinamik ini secara prinsip terdiri dari koleksi beberapa persamaan differensial dan perbedaan. Dalam bab ini, kita akan mendiskusikan aspek formal matematis dari persamaa-persamaan terseut. Beberapa sinyal eksternal yang mempengaruhi sistem tersebut juga harus dimodelkan dalam rangka untuk mengerti dan mensimulasikan efek-efeknya pada sistem. Pada bab ini, kita akan diskusikan juga cara-cara yan khas untuk mendeskripsikan sifat-sifat sinyal.

Model diagram blok

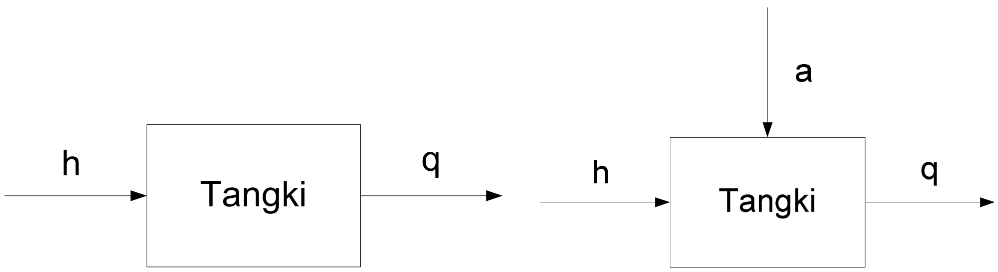
Diagram blok sebuah sistem adalah penguaraian logis dari fungsi-fungsi sistem dan memperlihatkan bagaimana bagian-bagian (blok-blok) yang berbeda mempengaruhi satu sama lain. Interaksi ini digambarkan denga anak panak antar blok-blok. Sebuah sistem yang dberikan biasanya direpresentasikan oleh beberapa model diagram blok yang berbeda tergantung seberapa detail kita ingin membuatnya.

Gambar 3.1. Diagram blok untuk tank dalam sub bab 2.3

Gambar 3.2 diagram blok yang mendeskripsikan bagaimana ketinggian dalam tang tergantung pada arus masuk dan arus keluar

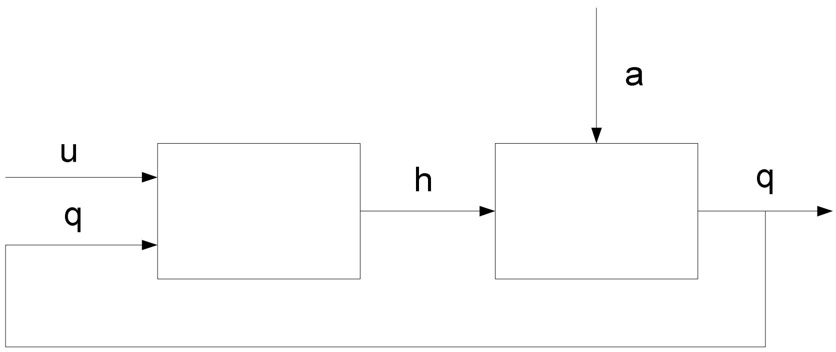
Contoh 3.1 Diaram blok untuk tangki air

Perhatikan tangki pada gambar 2.4. Arus keluar q tergantung pada arus masuk u, yang dapat kita gambarkan dengan diagram blok sederhana, seperti pada gambar 3.1. Kita dapat juga membuat deskripsi yang lebih detail yang mengandung ketinggian h dalam tangki. Ketinggian h tergantung pada arus masuk u dan arus keluar q (gambar 3.2). Arus keluar q tergantung pada ketinggian h (dan luas arus keluar a), berdasarkan hukum bernaulli (lihat gambar 3.3). Gambar sebelah kiri dalam gambar 3.3 lebih disukai jika luas arus keluara dalah tetap dan tidak dapat dipengaruhi. Jika luas arus keluar dapat divariasikan misalnya dengan menempatkan sebuah katup pada arus keluar gambar sebelah kanan lebih natural. Dari suh sistem dalam gambar 3.2 dan 3.3 kita sekarang memiliki blok diagram untuk tangki pada gambar 3.4.



(a) (b)

Gambar 3.3 (a) aliran keluaran sebagai fungsi dari ketinggian, dan (b) sebagai fungsi dari ketinggian dan penampang keluaran



Gambar 3.4 Diagram blok sistem tangki

Perhatikan perbedaan antara gambar skematik pada gambar 2.4 dan diagram blok pada gambar 3.4. Gambar skematik sering digunakan untuk ilustrasi sederhana dari sebuah sistem. Ini bagaimanapun berdasarkan kostruksi secara fisik dari sistem dimana blok diagram berdasarkan deskripsi secara logis. Arus-arus pada gambar 3.4 adalah arus informasi dan bukan air pada gambar 2.4.

Diagram blok sangat berguna ketika menstrukturkan sebuah sistem, khususnya sistem yang sangat besar dan kompleks. Sebagai model untuk sistem meraka dapat dbandingkan dengan model verbal yang kita diskusikan dalam bab pendahuluan. Mereka juga membentuk sebuah titik awal yang sangat penting untuk pembangunan matematika. Ketika misalnya kita membangun model (2.7), (2.8) untuk sistem tank kita mulai dari persamaan dasar 2.6 dan 2.4-2.5, yang berkaitan dengan dua blok dalam gambar 3.4. dalam bab 4 kita akan mendiskusikan secara lebih detail pengguanaan diagram blok dalam pembangunan model.

Diagram blok juga digunakan sebagai model dalam ilmu pengetahuan dimana model kuantitatif tidak dapat dibentuk seperti misalnya ekologi, sosiologi (sosiogram) dan sebagianya.

Model simulasi

Model dapat dibentuk untuk tujuan yang berbeda-beda. Seperti kita nyatakan dalam pendahuluan simulasi sering dianggap sebagai tujuan utama. Untuk model yang besar dan kompleks, umum bahwa persamaan belum secara eksplisit dinyatakan dalam bentuk tertutup. Model mungkin hanya ada sebagi program komputer yang digunakan untuk simulasi. Model-model tersebut dapat disebut model simulasi.

3.2 masukan, keluaran dan sinyal gangguan

Model matematis sebuah sistem dinamis terdiri dari sebuah besaran berbagai tipe. Dalam sus bab ini kita akan mendiskusikan karakteristik besaran yang berbeda ini dan memberikan penamaan untuk mereka. Beberapa besaran dalam model tidak berubah terhadap waktu. Kita akan menyebutnya sebagai konstanta. Besaran yang bervariasi terhadap waktu disebut variabel atau sinyal.

Ketika pembelajaran model dan simulasi dibuat untuk tujuan disain, adalah praktis untuk memisahkan mereka kedalam dua tipe konstanta dalam model. Parameter sistem adalah konstanta yang dianggap diberikan oleh sistem dan tidak daat dipilih oleh orang yang medesainnya. Parameter disain adalah konstanta adalah konstanta yang dapat dipilih dalam rangka untuk memberikan sistem/model sifat-sifat yang diingikan. Tujuan studi simulasi sering untuk memutuskan nilai yang sesuai untuk parameter disain.

Contoh 3.2

Jika kita mensimulasikan model tangki dalam sub-bab 2.3 dalam rangka menguji bagaimana arus keluaran tergantung pada luas arus keluaran a dalam tanki tetap, area a adalah parameter disain, sementara g dan A adalam parameter sistem.

Sebuah model dan sistem dinamis selalu terdiri dari sejumlah variable atau sinyal, dimana kelakuannya adalah minat utama kita. Kita akan menyebut sinyal ini sebagai output dan menyatakannya sebagai y1(t), y2(t)...., yp(t).

Contoh 3.3

Dalam sub-bab 2.2 output adalah

$y_1(t) = N_1(t)$ (specimen dari spesies 1)

$y_2(t) = N_2(t)$ (specimen dari spesies 2)

Catat bahwa output tidak ditentukan oleh system itu sendiri. Pembuat model itu sendiri yang memutuskan apa yang akan dianggap sebagai output. Pembuat model yang lain mungkin memilih $y_2(t) = N_2(t)$ sebagai output model seperti pada Contoh 3.3.

Kita akan menulis semua output sebagai vektor kolom:

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

Dalam sistem/model, ada beberapa sinyal dan variable yang mempengaruhi variable lain dalam sistem, tetapi mereke sendiri tidak dipengaruhi oleh kelakuan sistem.

Arus masuk u dalam sistem tangki (sub bab 2.3) adalah contoh sinyal tersebut. Sinyal ini memperngaruhi ketinggian tangki dan arus keluaran, tetapi sinyal arus masuk u sendiri tidak tergantung pada kedua variabel tersebut. Kita akan sebut sinya seperti itu sebagai sinyal eksternal. Dalam sebuah diagram blok sangat mudah mengenali sinyal eksternal sebagai anak panah bebas yang menunjuk pada satu atau beberapa blok. Lihat misalnya pada Gambar 3.4, dimana u dan a adalah sinyal eksternal.

Sebuah sinyal eksernal dapat berupa satu dari dua tipe. Jika kita memiliki sinyal eksternal untuk mempengaruhi kelakuan sistem, kita membicarakan sebuah sinyal input atau sinyal kontrol. Kita akan menuliskan sinyal itu sebagai:

$u_1(t), u_2(t), ..., u_m(t)$

atau dengan formalisme vektor

$$u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

Sebuah sinyal eksternal dimana kita tidak dapat mempengaruhi atau memilih, disebut sinyal gangguan. Kita akan menggunakan notasi

$w_1(t), w_2(t), ..., w_r(t)$

Atau

$$w(t) = \begin{pmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \\ \vdots \\ w_r(t) \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

Untuk sinyal gangguan.

Contoh 3.4 Sinyal – sinyal untuk Tangki Air

Jika luas arus keluaran a dalam system tangki pada subbat 2.3 dapat divariasikan, system ini akan memiliki dua sinyal eksternal, u(t) dan a(t). Apakah keduanya merupakan sinyal gangguan atau input tergantung pada penggunaan. Arus u(t) dapat sebagai variable yang kita tidak dapat pengaruhi, sedangkan a(t) dapat diatur untuk mencapai tujuan tertentu. Pikirkan, sebagai contoh, tangki sebagai penampung air, u(t) sebagai *hujan dan a(t) sebagai gerbang banjir. Maka u(t) adalah sinyal gangguan dan a(t) adalah input. Dalam penggunaan berbeda kita dapat mengontrol arus u(t) dan dapat sebagai input.*

Contoh tersebut memperlihatkan bahwa keberadaan sinyal eksternal dan pembagian input dan sinyal gangguan tidak secara jelas ditentukan oleh sistem begitu saja. Hal itu ditentukan oleh opini kita tentang apa yang berubah atau dapat diubah dan apakah kita dapat mengontrol kondisi.

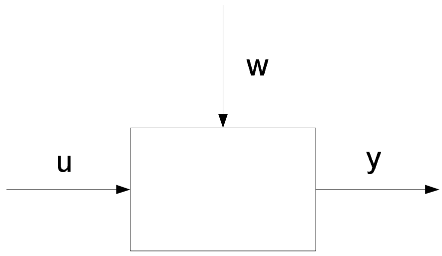
Untuk pemodelan dan simulasi, tidak perlu untuk memutuskan apakah sinyal tertentu adalah input atau sinyal gangguan. Sinyal memasuki model dan program simulasi dalam cara yang sama apapun interpretasinya. Pembedaan akan hanya menjadi penting ketika mendiskusikan sifat-sifat mana dapat diperoleh dari sistem dan bagaimana mencapainya. Dengan demikian, untuk kesederhanaan kita akan sering menggunakan notasi u untuk input dan sinyal gangguan dan bicara tentan ”input” ketika kita dapat mengatakan ”input dan/atau sinyal gangguan”.

Kita sekarang telah mendefinisikan output dan sinyal eksternal dalam model. Kita akan membahas variabel model lain yaitu variabel internal.

Notasi yang kita perkenalkan dalam sub bab ini dapat dirangkum sebagai berikut:

- Konstanta: besaran dalam odel yang tidak berubah terhadap waktu
- Parameter sistem: konstanta yang diberikan oleh sistem
- Parameter Desain: konstanta yang dapat kita variasikan dalam rangka memberikan sistem sifat-sifat berbeda.
- Variabel atau sinyal: besaran dalam model yang berubah terhadap waktu.
- Output: variable yang kelakuannya adalah minat utama kita, dinyatakan sebagai y.
- Sinyal eksternal: variabel yang mempengaruhi sistem tanpa dipengaruhi oleh variabel sistem yang lain.
- Input: sinyal eksternal dalam sistem dimana variasi waktunya dapat kita pilih, dinyatakan dengan u.
- Sinyal gangguan: sinyal eksternal dalam sistem yang tidak dapat kita pengaruhi, dinyatakan dengan w.

- Variabel internal: variabel dalam sistem yang bukan output maupun sinyal eksternal.



Gambar 3.5 Diagram blok dasar sebuah sistem

Dengan notasi u, w dan y kita dapat meggambarkan sistem sebagai diagram blok sederhana berdasarkan pada gambar 3.5

Dengan konsep ini, kita juga dapat secara lebih jelas mendefinisikan perbedaan antara sistem statik dan dinamik, yang telah kita bicarakan dalam subbab 1.6. Variasi dalam output pada sistem statik secara langsung dipasangkan pada nilai sesaat input. Untuk sistem dinamis, dilain pihak, nilai output suatu saat tergantung pada, secara prinsip, semua nilai input sebelumnya. Lihat gambar 3.6.

(a) (b)

Gambar 3.6 Contoh hubungan masukan dan keluaran untuk (a) sistem statik dan (b) sistem dinamik. Input berupa garis tebal, keluaran berupa garis putus-putus

3.3 Persamaan Diferensial

Dalam pemodelan matematika dalam Bab 2, kita temukan bahwa hubungan antara variabel model dideskripsikan dengan bantuan persamaan diferensial (dalam waktu diskrit, persamaan perbedaan).

Ada dua cara yang berbeda untuk mengambarkan persamaan – persamaan diferensial ini. Salah satunya adalah menghubungkan secara langsung input u pada output y dalam satu persamaan diferensial. Secara prinsip, ini terlihat sebagai berikut:

$$g\left(y^{(n)}(t), y^{(n-1)}(t), \ldots, y(t), u^{(m)}(t), u^{(m-1)}(t), \ldots, u(t)\right) = 0 \qquad (3.4)$$

Dimana

$$y^{(k)}(t) = \frac{d^k}{dt^k} y(t)$$

Dan g(-,-,....,-) adalah fungsi nonlinier bernilai vektor yang sembarang.

Cara lainnya adalah dengan menuliskan persamaan diferensial sebagai sebuah sistem persamaan persamaan diferensial orde pertama dengan memperkenalkan sejumlah variabel internal. Jika kita menyatakan variabel – variabel internal ini sebagai

$$x_1(t), \ldots, x_n(t)$$

Dan memperkenalkan notasi vektor

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \qquad (3.5)$$

Kita dapat, secara prinsip, menuliskan sebuat sistem persamaan diferensial orde pertama sebagai

$$\dot{x}(t) = f\left(x(t), u(t)\right) \qquad (3.6)$$

Titik diatas x menyatakan diferensiasi terhadap waktu t. Pada (3.6), f(x, u) adalah fungsi vektor dengan n komponen:

$$f(x,u) = \begin{pmatrix} f_1(x,u) \\ \vdots \\ f_n(x,u) \end{pmatrix} \qquad (3.7)$$

Fungsi – fungsi $f_i(x, u)$ adalah fungsi dari n + m variabel, komponen x dan vektor u. Tanpa notasi vektor, (3.6) menjadi

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= f_1(x_1(t),\dots,x_n(t),u_1(t),\dots,u_m(t)) \\
\dot{x}_2(t) &= f_2(x_1(t),\dots,x_n(t),u_1(t),\dots,u_m(t)) \\
&\vdots \\
\dot{x}_n(t) &= f_n(x_1(t),\dots,x_n(t),u_1(t),\dots,u_m(t))
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Output dari model dapat dihitung dari variable – variable inernal $x_i(t)$ dan inpout $u_i(t)$:

$$y(t) = h(x(t),u(t)) \tag{3.9}$$

Yang dituliskan dalam bentuk dipanjangkan

$$\begin{aligned}
y_1(t) &= h_1(x_1(t),\dots,x_n(t),u_1(t),\dots,u_m(t)) \\
y_2(t) &= h_2(x_1(t),\dots,x_n(t),u_1(t),\dots,u_m(t)) \\
&\vdots \\
y_n(t) &= h_n(x_1(t),\dots,x_n(t),u_1(t),\dots,u_m(t))
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Semua model dalam bab 2 dapat dituliskan sebagai (3.6)-(3.9) atau sebagai persamaan waktu diskritnya

$$x(t+1) = f(x(t),u(t)) \tag{3.11a}$$

$$y(t) = h(x(t),u(t)) \tag{3.11b}$$

Contoh 3.5 Deskripsi Internal dari Tangki Air

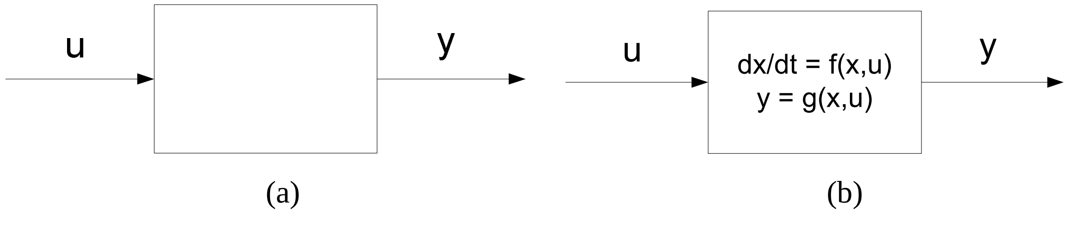
Model (2.7), (2.8) untuk tangki dalam sub bab 2.3 adalah dalam bentuk (3.6), (3.9) dengan

$$x(t) = h(t), u(t) = u(t)$$

$$y(t) = q(t), n-1, m=1, p=1$$

$$f(x,u) = -\frac{a\sqrt{2g}}{A}.\sqrt{x} + \frac{1}{A}u$$

$$h(x,u) = a\sqrt{2g}\sqrt{x}$$



Gambar 3.7 (a) model eksternal, dan (b) model internal

Deskripsi model dalam tipe (3.4) adalah dikatakan sebagai deskripsi eksternal, karena berkaitan secara langsung variabel eksternal terhadap output. Deskripsi (3.6), (3.9) dikatakan sebagai internal, karena menggambarkan kelakuan variabel – variabel internal, yaitu x. Lihat gambar 3.7.

Dalam buku ini kita akan lebih sering menggunakan deskripsi internal. Alasannya adalah bahwa vektor x(t) dalam (3.6) memiliki interpretasi penting sebagai vektor keadaan, yang akan kita diskusikan dalam sub bab berikutnya.

3.4 Konsep Keadaan dan Model Ruang-Keadaan

Pada akhir sub bab 3.2 kita menandai bahwa untuk sistem dinamis output tergantung pada semua nilai input sebelumnya. Ini membawa kita pada fakta bahwa tidak cukup untuk mengetahui u(t) untuk $t \geq t_0$ agar dapat menghitung output y(t) untuk $t \geq t_0$. Kita memerlukan informasi mengenai sistem. Dengan keadaan sistem pada waktu t_0 kita bermaksud bahwa sejumlah informasi dengan keadaan ini dan pengetahuan mengenai u(t), $t \geq t_0$, kita dapat menghitung y(t), $t \geq t_0$. Definisi ini sesuai dengan definisi sehari – hari dari kata ”keadaan”.

Jelas pula dari definisi keadaan bahwa konsep ini akan memainkan peran penting dalam simulasi model. Keadaan adalah secara tepat informasi yang harus disimpan dan diupdate dalam simulasi agar dapat menghitung output.

Perhatikan sistem umum persamaan diferensial orde pertama (3.7) dengan output yang diberikan oleh (3.9):

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \tag{3.12a}$$

$$y(t) = h(x(t), u(t)) \tag{3.12b}$$

Untuk sistem ini vektor $x(t_0)$ adalah keadaan pada waktu t_0. Ini mengikuti hasil umum persamaan diferensial:

Jika f(x, u) adalah berlaku baik (cukup misalnya jika f dapat diturunkan secara kontinyu dan u adalah kontinyu piecewise), persamaan diferensial (3.12 a) dengan $x(t_0)$ memiliki solusi unik untuk $t \geq t_0$.

Secara intuitif kita dapat berpikir sebagai berikut: asumsikan bahwa kita mengetahui x(t) dan u(t) pada waktu t_0. Kemudian kita dapat menghitung x(t) berdasarkan (3.12 a). Kemudian kita dapat juga menghitung $x(t_0 + \delta t)$ untuk δt kecil tak hingga berdasarkan pada

$$x(t_o + \delta t) = x(t_o) + \delta t . f\left(x(t_o), u(t_o)\right) \tag{3.13}$$

Dari nilai ini kita dapat melanjutkan dan menghitung x(t) untuk $t \geq t_0$. Output y(t), $t \geq t_0$, dapat kemudian dihitung berdasarkan (3.12b). Faktanya, persamaan (3.13) adalah metoda Euler untuk solusi numerik dari (3.12 a) jika δt angka yang kecil dan terhingga.

Kita telah menetapkan bahwa variabel $x_1(t), \ldots , x_n(t)$ atau, dengan kata lain, vektor

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

Dalam deskripsi model internal (3.12) adalah suatu keadaan untuk model. Disini terletak pentingnya deskripsi model ini untuk simulasi. Model (3.12) disebut model ruang-keadaan, vektor x(t) adalah vektor keadaan, dan kompenen $x_i(t)$ adalah variabel keadaan. Dimensi x(t) yaitu n, disebut orde model.

Untuk model waktu diskrit (3.11a) sangat jelas bahwa $x(t_0)$ adalah keadaan pada waktu t_0. Jika kita mengetahui $x(t_0)$ dan u(t) untuk $t \geq t_0$ kita dapat secara jelas menghitung x(t) dan kemudian y(t) untuk $t = t_0 + 1, t_0 + 2, t_0 + 3$, ... Persamaan (3.11a) adalah algoritma solusi dirinya sendiri.

Model – model ruang-keadaan akan menjadi model standar kita untuk sistem dinamis. Sebagai kesimpulan, kita memiliki model berikut ini:

Model – model Ruang-Keadaan (waktu kontinyu)

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad (3.14a)$$

$$y(t) = h(x(t), u(t)) \quad (3.14b)$$

U(t): input, sebuah vektor kolom berdimensi m

Y(t): output, sebuah vektor kolom berdimensi p

X(t): keadaan, sebuah vektor kolom berdimensi n

Model dikatakan berorde n. Jika fungsi f(x, u) adalah dapat diturunkan secara kontinyu dan jika u(t) adalah fungsi kontinyu piecewise, maka solusi unik untuk (3.14) untuk $x(t_0) = x_0$ ada.

Untuk sistem waktu diskrit kita memiliki model:

Model-model Ruang-Keadaan (waktu diskrit)

$$X(t_{k+1}) = f(x(t_k), u(t_k)) \qquad k = 0, 1, 2, ... \quad (3.15a)$$

$$Y(t_k) = h(x(t_k), u(t_k)) \quad (3.15b)$$

$U(t_k)$: input pada waktu t_k, sebuah vektor kolom berdimensi m

$Y(t_k)$: output pada waktu t_k, sebuah vektor kolom berdimensi p

$X(t_k)$: keadaan pada waktu t_k, sebuah vektor kolom berdimensi n

Model dikatakan berorde n. Untuk nilai awal $x(t_o) = x_0$, (3.15) selalu memiliki sebuah solusi unik.

Model – Model Linier

Model (3.14) atau (3.15) dikatakan linier jika f(x, u) dan h(x, u) adalah fungsi – fungsi linier dari x dan u:

$$f(x,u) = Ax + Bu \quad (3.16a)$$

$$h(x,u) = Cx + Du \quad (3.16b)$$

Disini matriks memiliki dimensi berikut

A: n x n B: n x m

C: p x n D: p x m

Jika matriks – matriks ini independent terhadap waktu model (3.16) dikatakan linier dan invarian terhadap waktu. Beberapa fakta tentang model – model linier dan invarian terhadap waktu dirangkum dalam Appendix A.