

BAB 2

CONTOH - CONTOH MODEL

2.1 Pendahuluan

Dalam bab ini kita akan mempelajari sejumlah contoh-contoh sederhana model yang dibangun dari area yang berbeda. Tujuan utamanya adalah untuk mengilustrasikan cara berpikir ketika membangun model dan tipe model matematika yang dapat diperoleh. Ini akan membantu sebagai latar belakang ketika kita mendiskusikan aspek-aspek formal dari model dalam Bab 3. Di sana kita akan menggunakan contoh-contoh dari bab ini sebagai ilustrasi.

Dalam contoh ini kita akan menghadirkan model dalam sebuah cara yang terlihat seperti alami dalam aplikasi respektif.

2.2 Sistem ekologi

Sebagai contoh pertama kita akan mempelajari sistem ekologi ideal terdiri dari dua spesies binatang dimana masing-masing bersaing untuk makanan yang sama (kasus 1) atau dalam situasi pemangsa-mangsa (kasus 2). Kita tertarik pada variasi jumlah individu dari spesies ini. Nyatakan $N_1(t)$ dan $N_2(t)$ adalah jumlah individu dari masing-masing spesies pada waktu t . Laju kelahiran untuk spesies diasumsikan menjadi konstan masing-masing λ_1 dan λ_2 . Kemudian ada keturunan $\lambda_i N_i$ dari spesies i yang lahir persatuan waktu.

Laju kematian untuk spesies adalah μ_i dan ini tergantung pada tersedianya makanan seperti halnya resiko dimakan. Secara umum, kita dapat menulis $\mu_i = \mu_i(N_1, N_2)$. Kemudian $\mu_i(N_1, N_2) \cdot N_i$ individu dari spesies i yang mati persatuan waktu. Efek keseluruhan sekarang dideskripsikan oleh persamaan differensial

$$\frac{d}{dt} N_1(t) = (\lambda_1 - \mu_1(N_1, N_2)) N_1(t) \quad (2.1a)$$

$$\frac{d}{dt} N_2(t) = (\lambda_2 - \mu_2(N_1, N_2)) N_2(t) \quad (2.1b)$$

Kita akan menguji kasus keduanya.

Kasus1 : Spesies berkompetisi untuk makanan yang sama

Apabila spesies hidup pada makanan yang sama, jumlah total dari spesimen akan menentukan persediaan makanan dan dengan demikian laju kematian. Kita mengasumsikan sebagai sebuah model sederhana bahwa kematian sebanding dengan jumlah total ini dan memberikan

$$\mu_i(N_1, N_2) = \gamma_i + \delta_i(N_1 + N_2); \quad \delta_i > 0 \quad i = 1, 2$$

Dan diperoleh model

$$\frac{d}{dt} N_1(t) = (\lambda_1 - \gamma_1)N_1(t) - \delta_1(N_1(t) + N_2(t))N_1(t) \quad (2.2a)$$

$$\frac{d}{dt} N_2(t) = (\lambda_2 - \gamma_2)N_2(t) - \delta_2(N_1(t) + N_2(t))N_2(t) \quad (2.2b)$$

Dalam gambar 2.1, diperlihatkan bagaimana N_1 dan N_2 bervariasi ketika

$$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2, \gamma_1 = \gamma_2 = \delta_1 = \delta_2 = 1$$

Ini dapat diperlihatkan bahwa apabila $(\lambda_1 - \gamma_1)/\delta_1 > (\lambda_2 - \gamma_2)/\delta_2$ spesies kedua akan punah dan yang pertama akan mendekati jumlah $(\lambda_1 - \gamma_1)/\delta_1$, secara tidak bergantung dari jumlah awal individu.

Kasus 2 : Pemangsa dan Mangsa

Asumsikan sekarang bahwa spesies pertama memangsa spesies kedua. Kemudian persediaan makanan untuk spesies pertama sebanding dengan N_2 , dan laju kematiannya dengan demikian berkurang ketika N_2 meningkat. Kita menetapkan hubungan yang sederhana

$$\mu_1(N_1, N_2) = \gamma_1 - \alpha_1 N_2, \quad \alpha_1 > 0$$

Laju kematian untuk spesies 2 meningkat dalam cara yang sama ketika N_1 meningkat

$$\mu_2(N_1, N_2) = \gamma_2 + \alpha_2 N_1, \quad \alpha_2 > 0$$

Kemudian kita memperoleh model

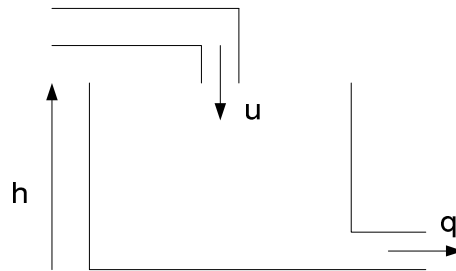
$$\frac{d}{dt} N_1(t) = (\lambda_1 - \gamma_1)N_1(t) + \alpha_1 N_1(t)N_2(t) \quad (2.3a)$$

$$\frac{d}{dt} N_2(t) = (\lambda_2 - \gamma_2)N_2(t) - \alpha_2 N_1(t)N_2(t) \quad (2.3b)$$

Hal yang alami untuk mengasumsikan bahwa pemangsa akan punah apabila tidak ada mangsa, yaitu $\lambda_1 - \gamma_1 < 0$, dan bahwa mangsa akan berlipat-lipat apabila tidak ada pemangsa, yaitu $\lambda_2 - \gamma_2 > 0$. Dalam gambar 2.2, kita melihat bagaimana N_1 dan N_2

bervariasi dalam kasus yang khas ($\lambda_1 = 1$, $\gamma_1 = 2$, $\lambda_2 = 2$, $\gamma_2 = 1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$). Kita melihat bahwa jumlah osilasi disekitar nilai tertentu. Ini bersesuaian dengan observasi dari sistem seperti ini di alam. Dalam gambar 2.3, kita melihat berapa banyak kulit bulu kelinci (sepatu salju kelinci) dan kulit bulu binatang buas mirip harimau yang dibeli dari pemburu oleh perusahaan Hudson Bay di Canada selama tahun 1846 – 1936. Ini dapat diasumsikan bahwa jumlah ini secara aproksimasi sebanding dengan kejadian dari spesies masing-masing.

Komentar : Contoh ini berdasarkan pada artikel klasik oleh V. Volterra, "Variations and Fluctuations of the Number of Individuals in Aimal Species Living Together," J. du Conseil, Vol. III, 1928.



Gambar 2.4. Tangki dengan aliran bebas

2.3 Sistem Aliran

Perhatikan sebuah tank dengan aliran keluaran bebas seperti dalam gambar 2.4. Tangki mempunyai penampang $A(\text{m}^2)$ dan lubang aliran keluaran mempunyai luas $a(\text{m}^2)$. Ketinggian cairan dalam tangki adalah $h(\text{m})$ dengan aliran masuk $u(\text{m}^3/\text{s})$ dan aliran keluaran $q(\text{m}^3/\text{s})$. Kita ingin membentuk sebuah model bagaimana aliran keluaran tergantung pada aliran masuk.

Hukum Bernaulli menggambarkan hubungan antara kecepatan aliran keluar $v(\text{m/s})$ dan ketinggian cairan dalam tangki

$$v(t) = \sqrt{2gh(t)} \quad (2-4)$$

Disini g adalah percepatan gravitasi. Hubungan antara aliran keluaran q dan kecepatan aliran keluaran v didefinisikan oleh

$$q(t) = av(t) \quad (2-5)$$

Volume cairan dalam tangki pada waktu t adalah $A \cdot h(t)$ (m^3) dan berubah sesuai dengan perbedaan antara aliran masuk dan aliran keluaran (ini disebut keseimbangan masa jika kerapatan konstan) :

$$\frac{d}{dt} A \cdot h(t) = u(t) - q(t) \quad (2-6)$$

Persamaan (2-4) sampai (2-6) sekarang membentuk sebuah model untuk sistem tangki pada gambar 2.4. Dengan mensubstitusikan (2.5) dan (2.4) ke dalam (2.6) kita memperoleh persamaan differensial non linier eksplisit untuk ketinggian cairan :

$$\frac{d}{dt} h(t) = -\frac{a\sqrt{2g}}{A} \sqrt{h(t)} + \frac{1}{A} u(t) \quad (2-7)$$

Dengan menggunakan 2.7 kita dapat menentukan ketinggian $h(t)$ ketika aliran masuk $u(t)$ diketahui. Setelah itu aliran keluaran $q(t)$ ditentukan sebagai

$$q(t) = a\sqrt{2g} \sqrt{h(t)} \quad (2-8)$$

Dalam gambar 2.5, diperlihatkan bahwa $h(t)$ bervariasi ketika $u(t) = 1$, $t \geq 0$ untuk $h(0) = 0$ dan $h(0) = 2$ ($A = 1$, $a\sqrt{2g} = 1$).

2.4 Sistem ekonomi

Model ekonomi nasional sederhana adalah berdasarkan variabel-variabel fundamental berikut :

$Y(t)$: pendapatan kotor nasional (GNP), tahun t

$C(t)$: Konsumsi total, tahun t

$I(t)$: investasi total, tahun t

$G(t)$: pengeluaran pemerintah, tahun t

Secara definisi

$$y(t) = c(t) + i(t) + g(t) \quad (2.9)$$

Ada beberapa hubungan lain diantara keempat variabel tersebut. Dalam kenyataannya, ini adalah rumit dan beberapa hubungan eksak dari hukum alam hilang.

Sekolah ekonomi yang berbeda telah menentukan hubungan yang disederhanakan yang berbeda. Dalam contoh ini kita akan mempelajari model Keynesian yang sederhana, model multiplier akselerator berdasarkan P. Samuelsson. Asumsi-asumsi berikut ini digunakan berkaitan dengan mekanisme ekonomi :

1. Konsumsi untuk tahun berjalan diasumsikan proporsional terhadap GNP tahun lalu :

$$c(t) = ay(t-1) \quad a > 0 \quad (2.10)$$

2. investasi diasumsikan proporsional terhadap peningkatan dalam konsumsi

$$i(t) = b(c(t) - c(t-1)) \quad b > 0 \quad (2.11)$$

Kedua alasan tersebut beralasan dan harus menggambarkan karakter utama dalam hubungan yang nyata.

Persamaan (2-9) sampai (2-11) sekarang membentuk model sederhana untuk sistem ekonomi nasional. Tujuan kita dengan model ini adalah untuk menginvestigasi bagaimana pemerintah dapat mempengaruhi ekonomi dengan intervensi yang berbeda-beda. Secara jelas kita dapat melihat bahwa GNP $y(t)$ adalah variabel hasil. Pemerintah dapat mengontrol $y(t)$ dengan beberapa cara, dengan mempengaruhi $c(t)$ dengan pajak-pajak (peningkatan dalam pajak penjualan adalah biasa untuk menurunkan konsumsi) atau dengan mempengaruhi $i(t)$ dengan bunga bank (bunga bank rendah mempermudah peminjaman uang sehingga meningkatkan investasi).

Akan tetapi dalam contoh ini kita akan memperhatikan pengeluaran $g(t)$ sebagai instrumen utama pemerintah untuk mempengaruhi ekonomi. Untuk memeriksa bagaimana $g(t)$ mempengaruhi $y(t)$ sangat perlu untuk menyusun ulang model yang diberikan oleh persamaan (2-9) sampai (2-11).

Variabel $c(t)$ dan $i(t)$ dalam persamaan (2-9) dapat dieleminasi dengan bantuan persamaan (2.10) dan (2.11) yang akan memberikan:

$$y(t) = ay(t-1) + b(ay(t-1) - ay(t-2)) + g(t) \quad (2.12)$$

Hubungan antara $y(t)$ dan $g(t)$ diberikan oleh persamaan perbedaan

$$y(t) - (a+ab)y(t-1) + aby(t-2) = g(t) \quad (2.13)$$

Kita dapat menyusun model dengan mengekspresikan bagaimana variabel $y(t)$ dan $c(t)$ berubah dari tahun ke tahun. Berdasarkan persamaan (2.10) kita memperoleh

$$c(t+1) = ay(t)$$

Lebih lanjut :

$$\begin{aligned} y(t+1) &= c(t+1) + i(t+1) + g(t+1) \\ &= c(t+1) + b(c(t+1) - c(t)) + g(t+1) \\ &= (1+b)ay(t) - bc(t) + g(t+1) \end{aligned}$$

Disini kita menggunakan (2.9) dalam persamaan pertama, (2.11) dalam persamaan kedua dan (2.10) dalam persamaan ketiga. Dengan menggunakan notasi vector dan matrik kita dapat menulis hasilnya sebagai :

$$\begin{pmatrix} c(t+1) \\ y(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -b & (b+1)a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} g(t+1) \quad (2.14)$$

Deskripsi (2.13) dan (2.14) adalah ekivalen akan tetapi ekspresi matriks (2.14) memiliki beberapa keuntungan dalam simulasi yang akan kita lihat nanti. Dalam gambar 2.6 diperlihatkan bagaimana GNP berubah sesuai dengan model (2.13) atau (2.14) ketika pengeluaran negara meningkat sebesar satu unit pada tahun $t = 2$ ($a = b = 0.5$). Kita lihat bahwa peningkatan dalam pengeluaran negara menurut model ini, memiliki dua konsekuensi pada GNP. Suatu peningkatan tiba-tiba yang mengikuti secara langsung dari (2.9). Ini mengakibatkan peningkatan dalam konsumsi menurut (2.10) dan berdasarkan (2.11) peningkatan dalam investasi. Dengan demikian, tindakan pemerintah memiliki efek ganda terhadap ekonomi.

Model (2.14) adalah model yang sangat disederhanakan. Model ini dapat dibuat lebih detail dan lebih eksak dengan meningkatkan jumlah variabel, membagi investasi kedalam area yang berbeda-beda dan sebagainya. Model seperti itu, sangat berguna pada saat ini, untuk mempelajari dan memprediksi variabel-variabel ekonomi.

Kesimpulan

Contoh-contoh dalam bab ini telah mengumpulkan dari area masalah yang berbeda-beda dengan karakteristik yang berbeda-beda pula, bagaimanapun model yang dihasilkan memperlihatkan sejumlah ciri-ciri yang sama. Model memiliki persamaan differensial atau sistem persamaan differensial yang menggambarkan beberapa variabel sistem berkaitan satu sama lain. Ini memungkinkan untuk menentukan variabel-variabel lain dari solusi persamaan differensial. Ketika kita bekerja dalam waktu diskrit (bagian 2.4) kita memperoleh persamaan perbedaan daripada persamaan differensial. Akan tetapi, terpisah dengan itu model memiliki struktur yang sama.

Persamaan differensial muncul secara alami dalam proses pembuatan model. Kita telah memulai dari masalah dengan tipe ini : bagaimana variabel ini (jumlah hewan, ketinggian cairan, GNP) berubah terhadap waktu ? Karakter dinamik dari sistem (lihat

bagian 1.6) dengan demikian secara alami menghasilkan persamaan differensial dan perbedaan.

Kita juga mencatat bahwa pembangunan model berisi derajat pengidealan yang berbeda. Persamaan untuk rangkaian listrik adalah eksak, persamaan untuk pergerakan benda telah berisi pengidealan dari tipe masa titik, mengabaikan hambatan udara dan sebagainya. Hukum Bernoulli hanya valid dalam kondisi yang diidealisasi seperti tidak adanya turbulensi pada aliran keluaran dan sebagainya. Meskipun disini pendekatannya telah baik.

Untuk contoh biologis dan ekonomi bagaimanapun, terlihat jelas bahwa asumsi laju kelahiran dan hubungan ekonomi tidak dapat valid. Variabel-variabel tersebut, di lain pihak, secara kualitatif berkarakter sama dengan kondisi bahwa, dalam semua kemungkinan, seharusnya dapat diaplikasikan pada kenyataan. Kemudian kita harapkan bahwa kelakuan model memperlihatkan sejumlah sifat-sifat esensial dari sistem. Pemodelan adalah sangat berharga meskipun dalam kasus ini, karena pernyataan model adalah bukan konsekuensi remeh dari asumsi.