DERET FOURIER

PENDAHULUAN

Dalam bab ini akan dibahas pernyataan deret dari suatu fungsi periodik. Jenis fungsi ini menarik karena sering muncul dalam berbagai persoalan fisika, seperti getaran mekanik, arus listrik bolak-balik (AC), gelombang bunyi, gelombang Elektromagnet, hantaran panas, dsb.

Sama halnya seperti pada uraian deret Taylor, fungsi-fungsi periodik yang rumit dapat dianalisis secara sederhana dengan cara menguraikannya ke dalam suatu deret fungsi periodik sederhana yang dibangun oleh fungsi sin x dan cos x atau fungsi eksponensial eix. Uraian deret fungsi periodik ini disebut uraian deret Fourier. Penamaan ini untuk menghargai jasa matematikawan Perancis Joseph Fourier, yang pertama kali merumuskan deret ini dalam sebuah makalah mengenai hantaran panas, yang dilaporkannya kepada akademi ilmu pengetahuan Perancis pada tahun 1807.

FUNGSI PERIODIK

Definisi 1:

Sebuah fungsi f(x) dikatakan periodic dengan periode $T > 0$, jika berlaku:

$f(x \pm T) = f(x)$

untuk samua x.

catatan:

Jika T adalah periode terkecil, maka T disebut periode dasar, dan selang $a \leq x \leq a + T$, dimana a sebuah konstanta, disebut selang dasar fungsi periodik f(x). Untuk selanjutnya sebutan periode dimaksudkan bagi periode dasar ini.

Konstanta a pada selang dasar dapat dipilih sembarang, berharga nol atau negatif. Pilihan $a = - T/2$ sering digunakan untuk memberikan selang dasar yang simetris terhadap $x = 0$, yakni selang $-T/2 \leq x \leq T/2$.

Contoh fungsi periodik yang paling sederhana adalah fungsi sin x dan cos x, karena:

$$\sin(x \pm 2\pi) = \sin x \qquad \text{dan} \qquad \cos(x \pm 2\pi) = \cos x$$

Yang menunjukkan bahwa keduanya memiliki periode T = 2π. Dalam hal ini x adalah variabel sudut dengan satuan radian atau derajad. Bila x bukan merupakan variabel sudut, maka x harus dikalikan dengan suatu faktor alih p, sehingga berdimensi sudut. Jadi satuan p adalah:

$$[satuan\ p] = \frac{[radian]}{[Satuan\, x]}$$

Misalkan x berdimensi panjang, dengan satuan meter (m), maka satuan p = rad/m. Dengan demikian pernyataan fungsi Sin dan Cos yang bersangkutan menjadi:

sin x → sin px ; cos x → cos px

Jadi translasi sudut sebesar satu periode T = 2π dapat dialihkan ke translasi variabel x sejauh $\pm$ T, dengan syarat:

$$px \pm 2\pi = p(x \pm T)$$

Hubungan ini mengaitkan p dengan T melalui hubungan:

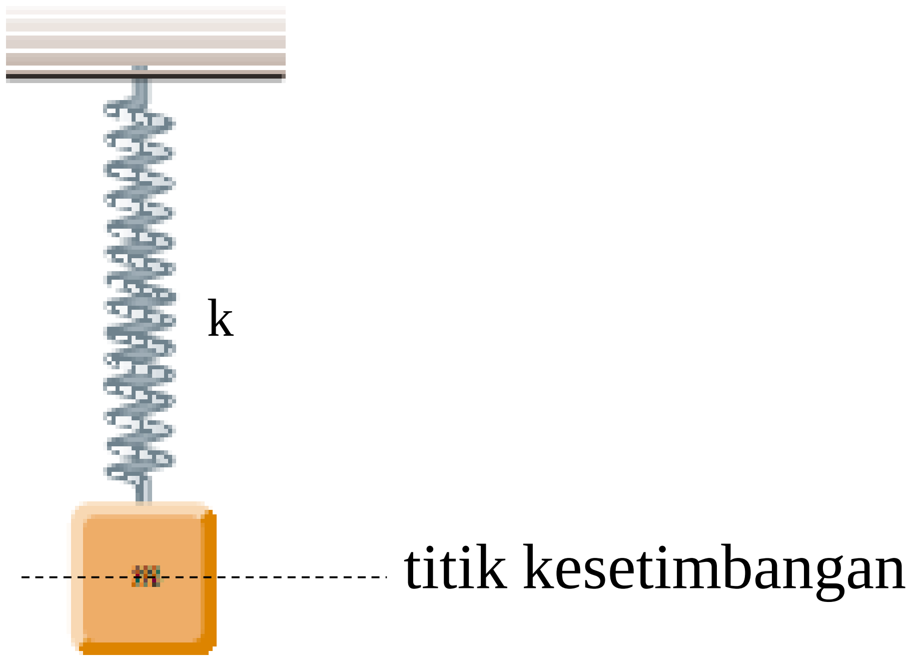
$$p = \frac{2\pi}{T}$$

Dengan pernyataan faktor alih ini, sifat periodik fungsi sin px dan cos px diberikan oleh hubungan:

$$\sin px = \sin p(x \pm T); \cos px = \cos p(x \pm T)$$

Yang memperlihatkan bahwa sin px dan cos px adalah periodik dengan periode T. Khusus dalam hal T = 2π, maka p = 1.

Salah satu contoh sederhana benda bermassa m yang digantungkan pada ujung sebuah pegas dengan tetapan pegas k.



Jika benda ditarik sejauh A dari kedudukan setimbangnya, kemudian dilepaskan, benda tersebut akan bergerak secara harmonik sederhana akibat adanya gaya pemulih yang arahnya selalu berlawanan dengan arah simpangan benda. Simpangan vertikal benda y(t) setiap saat t berubah-ubah dari kedudukan setimbangnya, menurut persamaan:

Besaran A dan ω berturut-turut adalah amplitudo dan frekuensi sudut getaran, sedangkan adalah fase getaran, dengan $\Phi 0$ sebagai fase awalnya, yang berdimensi sudut.

Jika T adalah periode atau waktu getar (waktu yang diperlukan benda untuk melakukan satu kali getaran) yang diukur dalam satuan detik, maka , bersatuan (rad/s). Dengan demikian ω merupakan faktor alih (p) yang membuat ωt berdimensi sudut.

DERET FOURIER

Andaikan f(x) adalah sebuah fungsi periodik dengan periode T yang terdefinisikan dalam selang dasar $a \leq x \leq a + T$, yakni $f(x) = f(x \pm T)$, maka fungsi f(x) dapat diuraikan dalam deret Fourier sebagai berikut:

Dengan koefisien-koefisien a_0, a_n, dan b_n yang disebut sebagai koefisien-koefisien Fourier, ditentukan oleh fungsi f(x) melalui hubungan integaral:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_a^{a+T} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_a^{a+T} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_a^{a+T} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

dengan T = periode dan

L = ½ T

Contoh 1.

Diketahui fungsi f(x) sebagai berikut:

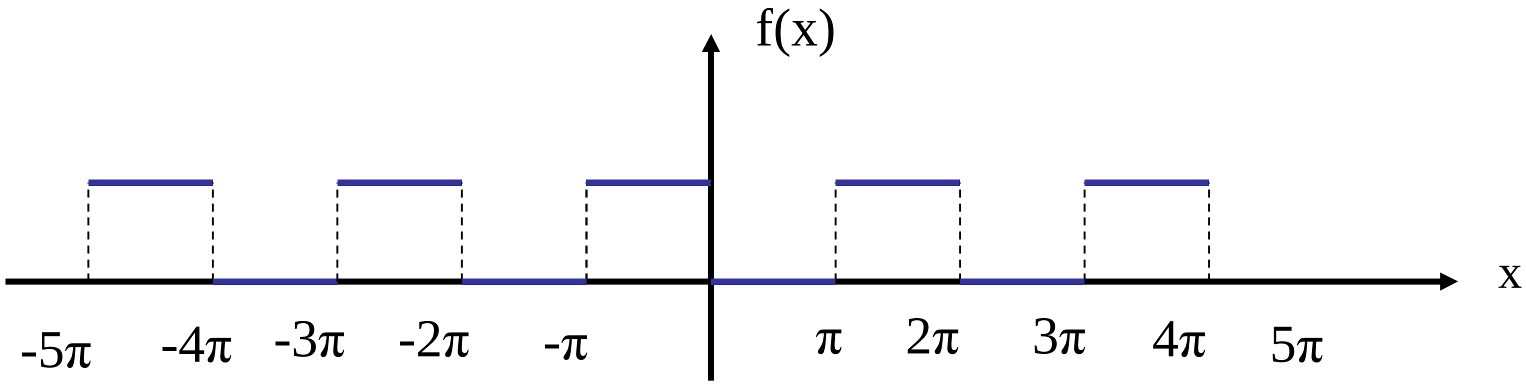
$$f(x) = \begin{cases} 1 & -\pi < x < 0 \\ 0 & 0 < x < \pi \end{cases}$$

Periodik dengan periode 2π sehingga $f(x \pm 2\pi) = f(x)$

Nyatakan fungsi ini dalam uraian deret Fourier !!!

Pemecahan:

Menurut definisi fungsi periodik, periode fungsi f(x) di atas adalah $T = 2\pi$, dengan demikian $L = ½\ T = \pi$, selang dasarnya $-\pi \leq x \leq \pi$, jadi $a = -\pi$. Di luar selang ini, f(x) didefinisikan sebagai perluasan selang dasar ke arah kiri dan kanan sumbu x, seperti terlihat pada Gambar 1.



Gambar 1

Koefisien-koefisien Fourier dapat dicari sebagai berikut:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_a^{a+T} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0}(1)dx + \int_0^{\pi}(0)dx\right\}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} dx = \frac{1}{\pi}(x)\Big|_{-\pi}^{0} = \frac{\pi}{\pi} = 1$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_a^{a+T} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0}(1).\cos nx.dx + \int_0^{\pi}(0)\cos nxdx\right\} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\cos nx.dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}\sin nx\right)\Bigg|_{-\pi}^{0} = \frac{1}{n\pi}\left(\sin 0 + \sin n\pi\right) = 0$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_a^{a+T} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0}(1).\sin nx.dx + \int_0^{\pi}(0)\sin nxdx\right\} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\sin nx.dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n}\cos nx\right)\Bigg|_{-\pi}^{0} = -\frac{1}{n\pi}\big(\cos 0 - \cos(-n\pi)\big) = -\frac{1}{n\pi}(1-(-1)^n)$$

$$b_n = \begin{cases} -2/n\pi, & n \text{ ganjil} \\ 0 & ,n \text{ genap}. \end{cases}$$

Dengan demikian, uraian Fourier untuk fungsi f(x) pada contoh ini adalah:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right), \quad a_n = 0$$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ ganjil}}^{\infty} -\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{\pi}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(-\sin x - \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{5}\sin 5x - \cdots\right)$$

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \cdots\right)$$

Contoh 2.

Diketahui fungsi f(x) sebagai berikut:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & 1 < x < 2 \end{cases}$$

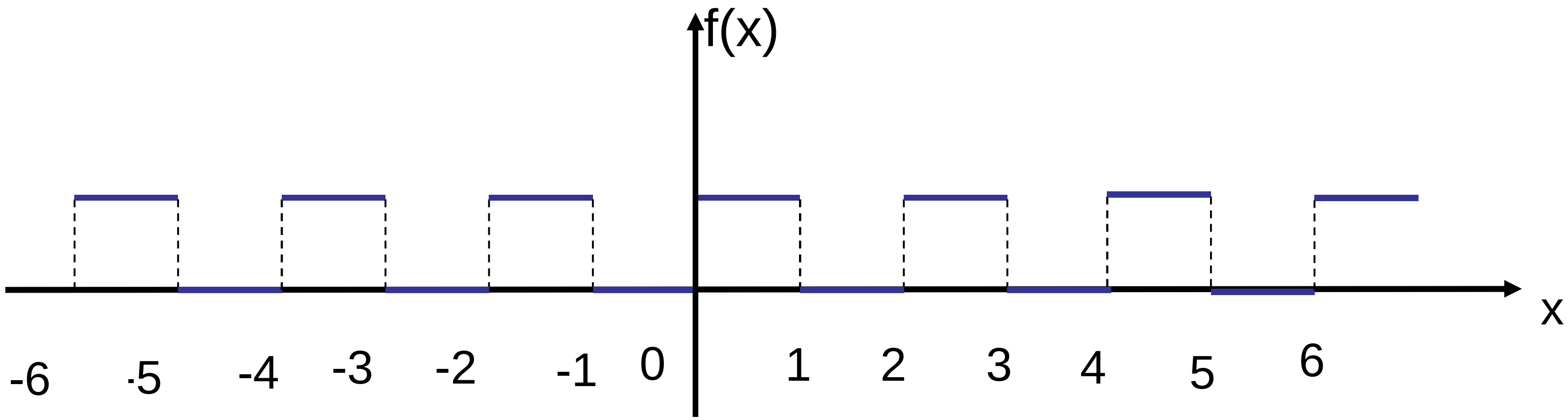
Periodik dengn periode 2 sehingga $f(x \pm 2) = f(x)$

Uraikan fungsi ini dalam uraian deret Fourier.

Pemecahan:

Periode T = 2, sehingga L = ½ T = 1. selang dasarnya $0 \leq x \leq 2$, jadi a = 0.

Perluasan f(x) dalam daerah kiri dan kanan sumbu x dapat dilihat dalam Gambar 2.



Gambar 2

Koefisien-koefisien Fouriernya dapat dicari sebagai berikut:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_a^{a+T} f(x)dx = \frac{1}{1}\int_0^2 f(x)dx = 1\left\{\int_0^1 (1)dx + \int_1^2 (0)dx\right\}$$

$$a_0 = \int_0^1 dx = (x)\Big|_0^1 = 1$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_a^{a+T} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{1}{1}\int_0^2 f(x)\cos\frac{n\pi x}{1}dx$$

$$a_n = \left\{\int_0^1 (1).\cos n\pi x.dx + \int_1^2 (0)\cos n\pi x dx\right\} = \int_0^1 \cos n\pi x.dx$$

$$a_n = \frac{1}{n\pi}(\sin nx)\Big|_0^1 = \frac{1}{n\pi}(\sin n\pi - \sin 0) = 0$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_a^{a+T} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{1}{1}\int_0^2 f(x)\sin\frac{n\pi x}{1}dx$$

$$b_n = \left\{\int_0^1 (1).\sin nx.dx + \int_1^2 (0)\sin nxdx\right\} = \int_0^1 \sin n\pi x.dx$$

$$b_n = -\frac{1}{n\pi}(\cos n\pi x)\Big|_0^1 = -\frac{1}{n\pi}(\cos n\pi - \cos 0) = -\frac{1}{n\pi}((-1)^n - 1)$$

$$b_n = \begin{cases} \frac{2}{n\pi} & , n \ ganjil \\ 0 & , n \ genap. \end{cases}$$

Dengan demikian, uraian Fourier untuk fungsi f(x) pada contoh ini adalah:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ ganjil}}^{\infty} \frac{2}{n\pi}\sin n\pi x$$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \left(\frac{2}{\pi}\sin \pi x + \frac{2}{3\pi}\sin 3\pi x + \frac{2}{5\pi}\sin 5\pi x + \cdots\right)$$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\sin \pi x + \frac{1}{3}\sin 3\pi x + \frac{1}{5}\sin 5\pi x + \cdots\right)$$

SYARAT DIRICHLET

- Persyaratan sebuah fungsi f(x) agar dapat diuraikan dalam deret Forier ditentukan oleh syarat Dirichlet berikut:

Jika:

1. f(x) periodik dengan periode T
2. Bernilai tunggal serta kontinu bagian demi bagian dalam selang dasarnya; $a \leq x \leq a + T$, dan
3. $\int_a^{a+T} |f(x)|\,dx$ nilainya berhingga.

Maka deret Fourier di ruas kanan konvergen ke nilai,

a. f(x) di semua titik kekontinuan f(x) dan
b. $\frac{1}{2}\left\{\lim f(x_{0-}) + \lim f(x_{0+})\right\}$ di setiap titik ketakkontinuan x_0 (pada daerah lompatan).

Soal

Pada contoh 2 di atas (Perhatikan Gambar 2!); Tentukanlah konvergen ke nilai berapa deret Fourier di titik-titik kekontinuan

$$x = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{-5}{2}$$

dan di titik-titik ketakkontinuan x = 0, 1, 2, 3.

FUNGSI GANJIL DAN FUNGSI GENAP

Perhitungan koefisien-koefisien Fourier sering kali dipermudah, jika fungsi f(x) yang diuraikan memiliki sifat istimewa tertentu, yakni genap atau ganjil terhadap sumbu x = 0 (sumbu f(x)). Keduanya didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.

Sebuah fungsi f(x) adalah:

genap, jika berlaku $f(-x) = f(x)$

ganjil, jika berlaku $f(-x) = - f(x)$

untuk semua x dalam daerah definisi f(x).

Contoh

Fungsi x^2 dan cos x adalah fungsi genap, karena $(-x)^2 = x^2$ dan cos (-x) = cos x. Sedangkan fungsi x dan sin x adalah fungsi ganjil, karena (-x) = -(x) dan sin (-x) = - sin (x). Pada umumnya fungsi pangkat genap dari x (x^2, x^4, x^6 , . . .) merupakan fungsi genap dan fungsi pangkat ganjil dari x (x, x^3, x^5, . . .) merupakan fungsi ganjil. Dengan definisi di atas dapat dicari contoh-contoh lain dari kedua fungsi ini.

Untuk menentukan koefisien-koefisien Fourier a_0, a_n, dan b_n dari fungsi periodik genap dan ganjil ini dipergunakan perumusan berikut:

$$Jika \quad f(x) \quad genap : \begin{cases} a_0 = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L f(x)\,dx \\ \\ a_n = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L f(x)\cos\dfrac{n\pi x}{L}\,dx \\ \\ b_n = 0 \end{cases}$$

Dalam hal ini dikatakan f(x) teruraikan dalam deret kosinus (karena $b_n = 0$).

$$Jika \quad f(x) \quad ganjil \quad : \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_n = 0 \\ b_n = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \end{cases}$$

Dalam hal ini, f(x) dikatakan teruraikan dalam deret sinus (karena an = 0).

Seperti sebelumnya
L = ½ T = ½ periode

Contoh 3.

Diketahi fungsi:

$$f(x) = x^2, \quad -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$$

Periodik dengan periode 1, sehingga $f(x \pm 1) = f(x)$.
Nyatakan fungsi tersebut dalam deret Fourier.

Pemecahan

Fungsi f(x) = x^2 adalah suatu fungsi genap
T = 1, sehingga L = ½ T = ½ , akan teruraikan dalam deret kosinus.
b_n = 0, a_0 dan a_n dapat ditentukan sebagai berikut:

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)dx = \frac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^{1/2} x^2 dx = 4\left(\frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_0^{1/2} = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{6}$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^{1/2} x^2\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

$$a_n = 4\int_0^{1/2} x^2\cos 2n\pi x\,dx$$

$$a_n = 4\left\{x^2\frac{1}{2n\pi}\cos 2n\pi x + 2x\frac{1}{(2n\pi)^2}\cos 2n\pi x - \frac{2}{(2n\pi)^2}\sin 2n\pi x\right\}\Bigg|_0^{1/2}$$

$$a_n = 4\left\{\frac{1}{(2n\pi)^2}\cos n\pi\right\}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi^2}\left\{\frac{(-1)^n}{n^2}\right\}$$

Dengan demikian pernyataan deret Fourier untuk fungsi f(x) = x^2 dengan selang dasar -½ < x < ½ adalah:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{1/2}, \qquad b_n = 0$$

$$f(x) = \frac{1}{12} + \frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos 2n\pi x$$

$$f(x) = \frac{1}{12} + \frac{1}{\pi^2}\left\{-\cos\frac{2\pi x}{1^2} - \cos\frac{4\pi x}{2^2} - \cos\frac{6\pi x}{3^2} - \cdots\right\}$$

$$f(x) = \frac{1}{12} - \frac{1}{\pi^2}\left\{\cos\frac{2\pi x}{1^2} + \cos\frac{4\pi x}{2^2} + \cos\frac{6\pi x}{3^2} + \cdots\right\}$$

Latihan

Diketahui fungsi:

$$f(x) = x \qquad ; \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

Periodik dengan periode π, sehingga f (x $\pm$ π) = f(x).

Nyatakan fungsi tersebut dalam deret Fourier.

DERET FOURIER JANGKAUAN SETENGAH

- Dalam suatu persoalan fisika, fungsi f(x) mungkin hanya terdefinisikan dalam suatu selang positif; $0 < x < l$. Oleh karena itu seringkali perlu untuk memperluasnya ke seluruh sunbu x, baik ke arah sumbu x positif maupun ke arah sumbu x negatif. Dalam hal ini ada 3 pilihan yang dapat dilakukan sebagai berikut:

1) Fungsi f(x) diperluas menjadi fungsi periodik tidak ganjil – tidak genap (seperti pada contoh 1) dengan periode $T = l$; dan selang dasarnya $0 < x < l$, dengan l sembarang positif.
2) Selang dasar $0 < x < l$ diperluas ke selang negatif secara simetris terhadap sumbu x = 0 menjadi $-l < x < l$, dan fungsi f(x) diperluas menjadi fungsi periodik dengan periode $T = 2l$.

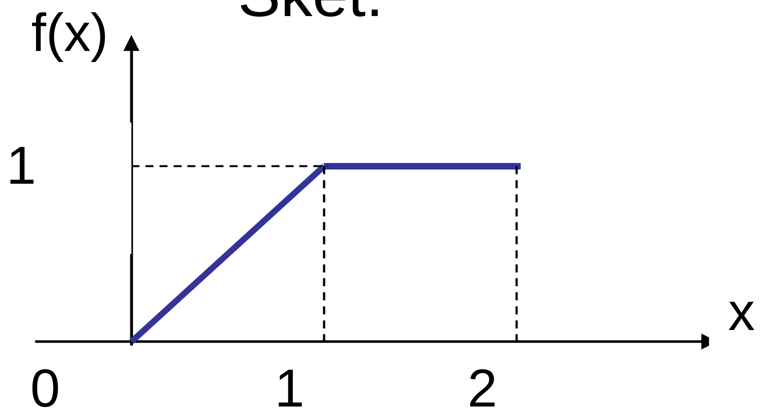
- Dalam hal ini kita mempunyai dua pilihan yakni memperluas fungsi f(x) sebagai fungsi genap fc(x) atau fungsi ganjil fs(x).

Contoh

Diketahui sebuah fungsi yang terdefinisi pada setengah daerah:

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < 1 \\ 1 & 1 < x < 2 \end{cases}$$

Sket:



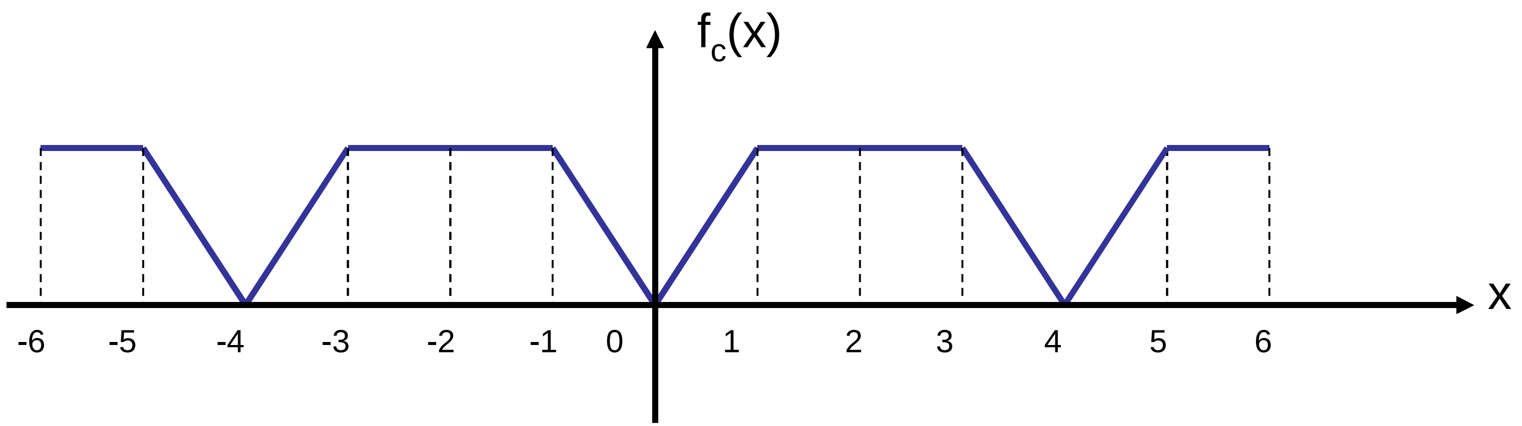
Nyatakan fungsi ini dalam:

a. deret Fourier fungsi kosinus (fungsi genap)
b. deret Fourier fungsi sinus (fungsi ganjil)
c. deret Fourier fungsi kosinus – sinus (fungsi tidak genap–tidak ganjil).

Pemecahan:

(a) Pernyataan fungsi dalam deret Fourier kosinus (fungsi genap)

Untuk membentuk fungsi genap, maka selang dasar ($0 < x < 2$) di atas diperluas ke selang negatif menjadi ($-2 < x < 2$), dan fungsi $f(x)$ diperluas menjadi fungsi periodik genap $\{f(-x) = f(x)\}$ dengan periode $T = 4$ ($L = 2$) seperti ditunjukkan pada gambar berikut:



Untuk fungsi genap ini $b_n = 0$, $a_0 =$ dan a_n ditentukan sebagai berikut:

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)dx = \frac{2}{2}\left\{\int_0^1 x dx + \int_1^2 (1)dx\right\} = \left\{\frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 + x\Big|_1^2\right\} = \frac{3}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{2}{2}\left\{\int_0^1 x\cos\frac{n\pi x}{2}dx + \int_1^2 (1)\cos\frac{n\pi x}{2}dx + \int_1^2 (1)\cos\frac{n\pi x}{2}dx\right\}$$

$$a_n = \left\{x\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2} + \frac{4}{(n\pi)^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\right\}\Bigg|_0^1 + \left\{\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\right\}\Bigg|_1^2$$

$$a_n = \frac{4}{(n\pi)^2}\left(\cos\frac{n\pi x}{2} - 1\right)$$

$$a_1 = -\frac{4}{\pi^2},\ a_2 = -\frac{2}{\pi^2},\ a_3 = -\frac{4}{9\pi^2},\ a_1 = 0, \quad dst$$

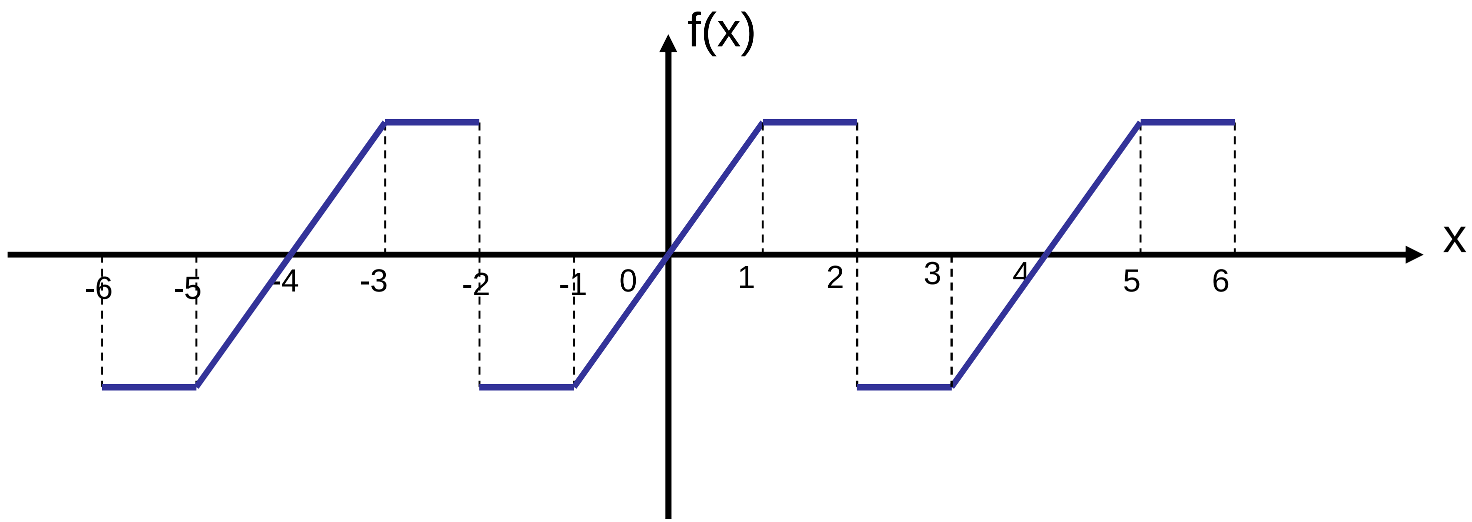
Maka diperoleh uraian deret Forier kosinus untuk f(x), sebagai berikut:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}, \quad b_n = 0$$

$$f(x) = \frac{3}{4} - \frac{4}{\pi^2}\left\{\frac{1}{1}\cos\frac{\pi x}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{2\pi x}{2} + \frac{1}{9}\cos\frac{3\pi x}{2} + \cdots\right\}$$

(b) Pernyataan fungsi dalam deret Fourier sinus (fungsi ganjil)

Untuk membentuk fungsi ganjil, maka selang dasar $(0 < x < 2)$ di atas diperluas ke selang negatif menjadi $(-2 < x < 2)$, dan fungsi f(x) diperluas menjadi fungsi periodik ganjil $\{f(-x) = -f(x)\}$ dengan periode T = 4 (L = 2) seperti ditunjukkan pada gambar berikut:



Untuk fungsi ganjil ini a_0 = 0, a_n = 0, dan b_n ditentukan sebagai berikut:

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{2}{2}\left\{\int_0^1 x\sin\frac{n\pi x}{2}dx + \int_1^2 (1)\sin\frac{n\pi x}{2}dx\right\}$$

$$b_n = \left\{-x\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2} + \frac{4}{(n\pi)^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\right\}\Bigg|_0^1 + \left\{-\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\right\}\Bigg|_1^2$$

$$b_n = \left\{\frac{4}{(n\pi)^2}\sin\frac{n\pi x}{2} - \frac{2}{n\pi}\cos n\pi\right\}$$

$$b_1 = \left(\frac{4+2\pi}{\pi^2}\right),\ b_2 = -\frac{1}{\pi},\ b_3 = -\left(\frac{4+6\pi}{9\pi^2}\right),\ b_2 = -\frac{1}{2\pi},\ dst$$

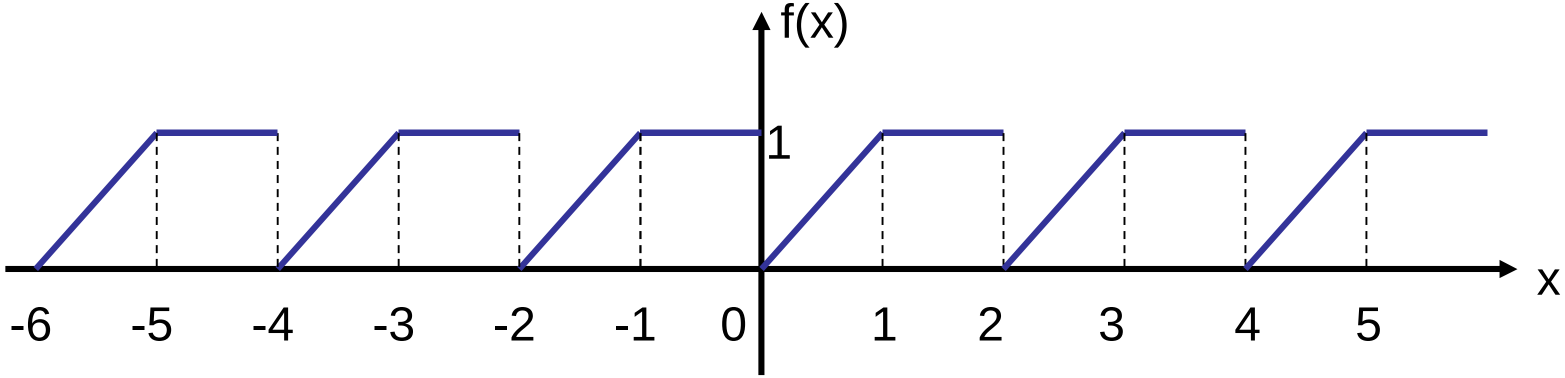
Maka diperoleh uraian deret Fourier sinus untuk f(x), sebagai berikut:

$$f(x) = \sum_{n-1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}, \quad a_0 = 0, a_n = 0$$

$$f(x) = \left\{\left(\frac{4+2\pi}{\pi^2}\right)\sin\frac{\pi x}{2} - \frac{1}{\pi}\sin\frac{2\pi x}{2} - \left(\frac{4+6\pi}{9\pi^2}\right)\sin\frac{3\pi x}{2} + \cdots\right\}$$

(c) Pernyataan fungsi dalam deret Fourier sinus-cosinus (fungsi tidak ganjil-tidak genap)

untuk membentuk fungsi periodik ini, tinggal memperluas *f(x)* ke kiri dan ke kanan sumbu *x* dengan periode T=2 (L=1) seperti pada gambar berikut :



Koefisien-koefisien Fourier a_o, a_n, dan b_n dapat ditentukan sebagai berikut :

$$a_o = \frac{1}{L}\int_0^T f(x)dx = \frac{1}{1}\left\{\int_0^1 x\,dx + \int_1^2 (1)\,dx\right\} = \frac{1}{2}x^2 \Big|_0^1 + x \Big|_1^2 = \frac{3}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_0^T f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{1}{1}\left\{\int_0^1 x \cos n\pi x\,dx + \int_1^2 (1)\cos n\pi x dx\right\}$$

$$= \left\{x\frac{1}{n\pi}\sin n\pi x + \frac{1}{(n\pi)^2}\cos n\pi x\right\} \Big|_0^1 + \left\{\frac{1}{n\pi}\sin n\pi x\right\} \Big|_1^2$$

$$= \frac{1}{(n\pi)^2}(\cos n\pi - 1) = \frac{1}{\pi^2}\left\{\frac{(-1)^n - 1}{n^2}\right\} = \frac{-2}{n^2\pi^2}, \quad n \ ganjil$$

$$= 0, \qquad n \quad genap$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_0^T f(x)\sin n\pi x\, dx = \frac{1}{1}\left\{\int_0^1 x \sin n\pi x\, dx + \int_1^2 (1)\sin n\pi x dx\right\}$$

$$= \left\{-x\frac{1}{n\pi}\cos n\pi x + \frac{1}{(n\pi)^2}\sin n\pi x\right\}\Big|_0^1 + \left\{-\frac{1}{n\pi}\cos n\pi x\right\}\Big|_1^2$$

$$= -\frac{1}{n\pi}\cos 2n\pi$$

$$= -\frac{1}{n\pi}$$

Sehingga pernyataan deret Fouriernya adalah :

$$f(x) = \frac{3}{4} + \sum_{\substack{n=1 \\ ganjil}}^{\infty} \left(-\frac{2}{n^2\pi^2}\cos n\pi x\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n\pi}\sin n\pi x\right)$$

DERET FOURIER EKSPONENSIAL

Pernyataan deret Fourier suatu fungsi periodik dapat pula dibangun dari fungsi eksponensial, dengan menggunakan hubungan Euler sbb :

$$e^{\pm i\frac{n\pi x}{L}} = \cos\frac{n\pi x}{L} \pm i \sin\frac{n\pi x}{L}, \qquad i^2 = -1$$

dengan menyisipkan :

$$\boxed{\cos\frac{n\pi x}{L} = \frac{e^{i\frac{n\pi x}{L}} + e^{-i\frac{n\pi x}{L}}}{2}}$$

dan

$$\boxed{\sin\frac{n\pi x}{L} = \frac{e^{i\frac{n\pi x}{L}} - e^{-i\frac{n\pi x}{L}}}{2i}}$$

ke dalam pernyataan deret Fourier dari suatu fungsi periodik, sbb :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L})$$

didapat :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{e^{i\frac{n\pi x}{L}} + e^{-i\frac{n\pi x}{L}}}{2} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{e^{i\frac{n\pi x}{L}} - e^{-i\frac{n\pi x}{L}}}{2i} \right)$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a_n - ib_n)}{2} e^{i\frac{n\pi x}{L}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a_n + ib_n)}{2} e^{-i\frac{n\pi x}{L}}$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a_n - ib_n)}{2} e^{i\frac{n\pi x}{L}} + \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{(a_{-n} + ib_{-n})}{2} e^{i\frac{n\pi x}{L}}$$

Indeks jumlah n pada deret ke dua telah dinamakan ulang dengan –n. Jika didefinisikan :

$$C_n = \begin{cases} (a_{-n} + ib_{-n})/2, & n < 0 \\ a_0/2, & n = 0 \\ (a_n - ib_n)/2, & n > 0 \end{cases}$$

maka didapat pernyataan fungsi periodik dalam deret Fourier eksponensial sbb :

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \, e^{i\frac{n\pi x}{L}}$$

Koefisien Cn dapat dicari dengan persamaan integral berikut :

$$C_0 = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(x)\, dx$$

dan

$$C_n = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(x) e^{-i\frac{n\pi x}{L}} \, dx$$

Contoh 7

Tentukan pernyataan Fourier Eksponensial dari fungsi periodik pada contoh 1 !

Pemecahan :

Fungsi periodik pada contoh 1 adalah :

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi < x < 0 \\ 0, & 0 < x < \pi \end{cases}$$

Berarti T = 2π dan a = π.

Koefisien-koefisien Fourier eksponensial ditentukan sebagai berikut :

$$C_o = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0}(1)dx + \int_0^{\pi}(0)dx\right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} dx = \frac{1}{2\pi}\, x\Big|_{-\pi}^{0} = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}$$

$$C_n = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(x)e^{\frac{-in\pi x}{L}}dx = \frac{1}{2\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0}(1)\, e^{\frac{-in\pi x}{\pi}}\, dx + \int_0^{\pi}(0)e^{\frac{-in\pi x}{\pi}}dx\right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} e^{-inx}\, dx = \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{1}{-in}e^{-inx}\right\}\Bigg|_{-\pi}^{0} = \frac{1}{2n\pi}\left(1-\cos n\pi\right)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{i}{n\pi}, & n \text{ ganjil} \\ 0, & n \text{ genap} \end{cases}$$

Maka diperoleh uraian deret Fourier eksponensial sebagai berikut :

$$f(x) = \sum_{n=-10}^{10} C_n e^{inx}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{i}{\pi}\left(\ldots - \frac{1}{5}e^{-5ix} - \frac{1}{3}e^{-3ix} - e^{-ix} + e^{ix} + \frac{1}{3}e^{3ix} + \frac{1}{5}e^{5ix} + \ldots \right)$$

Untuk membandingkan hasil ini dengan hasil yang diperoleh pada Contoh 1, maka kita gunakan kembali hubungan Euler di atas :

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{i}{\pi}\left(\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) + \frac{1}{3}\left(e^{3ix} - e^{-3ix}\right) + \frac{1}{5}\left(e^{5ix} - e^{-5ix}\right) + \dots\dots\dots\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\left(\frac{\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)}{i} + \frac{1}{3}\left(\frac{e^{3ix} - e^{-3ix}}{i}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{e^{5ix} - e^{-5ix}}{i}\right) + \dots\dots\dots\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\left(\frac{2\sin x}{1} + \frac{2\sin 3x}{3} + \frac{2\sin 5x}{5} + \dots\dots\dots\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots\dots\dots\right)$$

Persis sama seperti hasil pada contoh 1.

IDENTITAS PARSEVAL

Sekarang akan dicari bagaimana hubungan antara harga rata-rata kuadrat fungsi *f(x)* dalam selang dasarnya dengan koefisien-koefisien Fourier. Hasilnya dikenal sebagai identitas Parseval atau hubungan kelengkapan (Completeness Relation) yang bentuknya bergantung pada rumusan pernyataan deret Fourier yang digunakan.

Untuk deret Fourier yang diuraikan dalam bentuk :

$$f(x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{10} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{10} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

Jika fungsi pada ruas kiri dan ruas kanan dikuadratkan, maka akan diperoleh :

$$\left|f(x)\right|^2 = \left(\frac{a_o}{2}\right)^2 + \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right)^2$$

$$\left|f(x)\right|^2 = \left(\frac{a_o}{2}\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(a_n a_m \cos\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi x}{L} + 2a_n b_m \cos\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi x}{L} + b_n b_m \sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi x}{L}\right)$$

Kemudian jika dicari rata-rata kuadrat pada selang dasarnya, dengan cara mengintegrasi ruas kiri dan kanan, maka didapat :

$$\frac{1}{T}\int_a^{a+T}\left|f(x)\right|^2 dx = \frac{1}{T}\int_a^{a+T}\left(\frac{a_o}{2}\right)^2 dx + \frac{1}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\int_a^{a+T}\left(a_n a_m \cos\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\right) +$$

$$\frac{1}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\int_a^{a+T}\left(2a_n b_m \cos\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi x}{L}\right) +$$

$$\frac{1}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\int_a^{a+T}\left(b_n b_m \sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi x}{L}\right)$$

atau

$$\frac{1}{T}\int_a^{a+T}|f(x)|^2 dx = \frac{1}{T}\left(\frac{a_0}{2}\right)^2 (T) + \frac{1}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(|a_n a_m|^2 \frac{T}{2}\delta_{mn}\right) + \frac{1}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(0) + \frac{1}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(|b_n b_m|^2 \frac{T}{2}\delta_{mn}\right)$$

maka bentuk hubungannya adalah sebagai berikut :

$$\frac{1}{T}\int_a^{a+T}|f(x)|^2 dx = \left\{\left(\frac{a_o}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2 + |b_n|^2\right\}$$

Ruas kiri adalah harga rata-rata kuadrat fungsi *f(x)* dalam selang dasarnya $a < x < a + T$, sedangkan ruas kanan adalah jumlah kuadrat semua koefisien Fourier.

Untuk uraian deret Fourier eksponensial,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{\frac{in\pi x}{L}}$$

maka bentuk hubungannya adalah sebagai berikut :

$$\frac{1}{T}\int_{a}^{a+T} \left| f(x) \right|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| C_n \right|^2$$

Secara fisis, jika *f(x)* merupakan fungsi periodik dari suatu besaran fisika, misalnya simpangan getaran mekanik (system pegas), maka untuk $x = t$ adalah variabel waktu, maka pernyataan :

$$\langle p \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left| f(t) \right|^2 dt$$

Menyatakan daya rata-rata (Joule/s) dari getaran tersebut dalam suatu periode T. Dengan demikian identitas Paseval, mengaitkan daya rata-rata dengan separuh jumlah kuadrat amplitudo setiap harmonik penyusun periodik.

Secara matematik, ruas kiri dari identitas Parseval memberikan jumlah deret bilangan diruas kanannya, seperti pada contoh berikut :

Contoh 8

Gunakan identitas Paseval untuk mencari jumlah deret bilangan yang bersangkutan dengan uraian deret Fourier dari fungsi *f(x)* pada contoh 4.

Pemecahan

Pada contoh 4, *f(x)* = *x2* dengan periode 1 dan selang dasarnya adalah

$$-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$$

memiliki uraian deret Fourier dengan koefisien-koefisien sebagai berikut :

$$a_o = \frac{1}{6}, \quad a_n = \frac{1}{\pi^2}\left\{\frac{(-1)^n}{n^2}\right\} \qquad n = 1, 2, 3........, b_n = 0$$

Harga rata-rata kuadrat dari *f(x)* = *x2* ditentukan sebagai berikut :

$$\frac{1}{1}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left|x^2\right|^2 dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x^4 dx = \frac{1}{5}x^5\Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{32}+\frac{1}{32}\right) = \frac{1}{80}$$

Menurut identitas Paseval, nilai rata-rata kuadrat ini sama dengan

$$\left\{\left(\frac{a_o}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left|a_n\right|^2 + \left|b_n\right|^2\right)\right\}$$

sehingga :

$$\frac{1}{80}=\left\{\left(\frac{1}{12}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi^2}\right)^2\left(\frac{(-1)^4}{n^2}\right)^2\right)\right\}$$

$$\frac{1}{80}=\frac{1}{144}+\frac{1}{2}\frac{1}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4},\quad atau$$

$$\frac{1}{2\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{1}{80}-\frac{1}{144}=\frac{1}{180}$$

Sehingga :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{2\pi^4}{180}=\frac{\pi^4}{90}$$

atau

$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\ldots\ldots=\frac{\pi^4}{90}$$

Pemecahan

Pada contoh.4. $f(x) = x^2$ dengan periode 1 dan selang dasarnya adalah $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$, memiliki uraian deret Fourier dengan koefisien-koefisien sebagai berikut :

$$a_o = \frac{1}{6}, \quad a_n = \frac{1}{\pi^2}\left\{\frac{(-1)^n}{n^2}\right\} \qquad n = 1, 2, 3........, b_n = 0$$

Harga rata-rata kuadrat dari $f(x) = x^2$ ditentukan sebagai berikut :

$$\frac{1}{1}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left|x^2\right|^2 dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x^4 dx = \frac{1}{5}x^5\Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{32} + \frac{1}{32}\right) = \frac{1}{80}$$

Menurut identitas Paseval, nilai rata-rata kuadrat ini sama dengan

$$\left\{\left(\frac{a_o}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{10}\left(\left|a_n\right|^2 + \left|b_n\right|^2\right)\right\}$$

sehingga :

$$\frac{1}{80} = \left\{\left(\frac{1}{12}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{\pi^2}\right)^2\left(\frac{(-1)^4}{n^2}\right)^2\right)\right\}$$

$$\frac{1}{80} = \frac{1}{144} + \frac{1}{2}\frac{1}{\pi^4}\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{n^4}, \quad atau$$

$$\frac{1}{2\pi^4}\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{n^4} = \frac{1}{80} - \frac{1}{144} = \frac{1}{180}$$

Sehingga :

$$\sum_{n=1}^{r} \frac{1}{n^4} = \frac{2\pi^4}{180} = \frac{\pi^4}{90}$$

atau

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

Sambung Hal. 19 (Contoh 9)