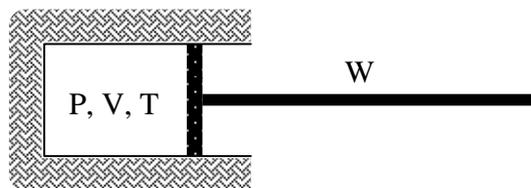


Tinjauan Termodinamika Pada Sistem Partikel Tunggal Yang Terjebak Dalam Sebuah Sumur Potensial

Dengan mengembangkan hubungan termodinamik yang sederhana untuk pengumpulan partikel yang tunggal, yang ditempatkan pada daerah potensial. Volume pada daerah potensial semacam itu bukanlah variabel termodinamik yang baik, karena itu perlu dilakukan modifikasi terhadap hukum pertama termodinamik dan hukum gas ideal. Sebagai parameter eksternal terhadap penggabungan itu digunakan frekuensi osilasi pada sumur potensial yang minimum. Penggunaan itu menghasilkan hubungan dasar antara jumlah partikel, temperatur, energi, frekuensi osilasi, dan tekanan umum. Cara tersebut merupakan analogi terhadap hubungan termodinamik konvensional untuk gas ideal dalam volume yang tetap. Dibahas juga kapasitas panas untuk partikel trapp.

I. Pendahuluan

Penurunan persamaan-persamaan hukum gas ideal biasa pada termodinamika, diasumsikan bahwa sistem yang ditinjau adalah gas yang terdapat sebuah silinder tertutup dengan sebuah piston yang dapat bergerak. Seperti tergambar di bawah ini :



Gambar-1

Gas ideal mempunyai sifat bahwa partikel-partikel tidak saling berinteraksi, kecuali lewat tumbukan, persamaan yang sudah terkenal untuk gas ideal adalah :

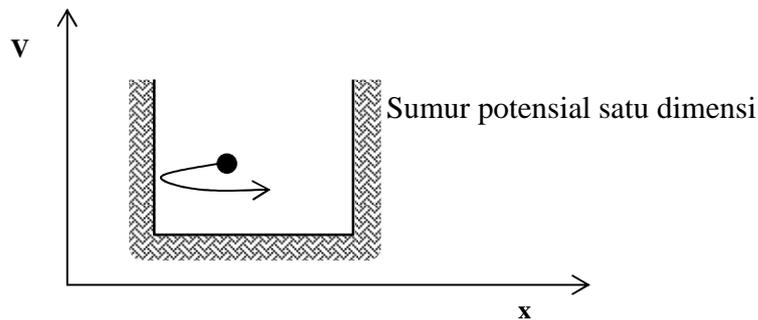
$$PV = NkT \dots \dots \dots (1)$$

dimana P adalah tekanan, V adalah volume, N adalah jumlah partikel, T adalah temperatur, k adalah konstanta gas ideal, dan mempunyai persamaan energi :

$$E = \frac{3}{2} NkT \dots \dots \dots (2)$$

Jika gas berada pada sebuah selinder tertutup, maka dengan mudah kita dapat menentukan volumenya, tetapi sekarang jika partikel gas tersebut berada pada sebuah sumber potensial dimana dindingnya dibatasi oleh sebuah energi potensial tak berhingga, jelas kita tidak dapat menentukan volume dengan mudah, sehingga persamaan (1) di atas harus dimodifikasi agar dapat menentukan persamaan gas ideal pada sistem ini.

Sistem yang kita maksud dapat digambarkan sebagai berikut :



Gambar-2

II. Pembahasan

Sekarang kita bahas pada gambar-2. Dalam hal ini kita akan sedikit menyinggung persoalan pada fisika kuantum, dimana partikel pada sumur potensial tersebut yang bermassa m , geraknya bergelombang, dengan frekuensi f dan energi E .

Kita tinjau kembali Hukum Pertama termodinamika yang merupakan hukum kekekalan energi untuk sebuah gas ideal di dalam sebuah volume V , persamaan hukum pertama termodinamika tersebut adalah

$$\Delta U = \Delta Q - P\Delta V \dots\dots\dots(3)$$

dimana ΔU adalah energi dalam dari gas ideal, ΔQ adalah kalor dan $P\Delta V$ adalah usaha, untuk sistem dimana partikel tunggal gas tersebut terjebak pada sumur potensial. Harga usaha di sini tidak relevan jika didefinisikan dengan variabel volume. Dari perumusan Plank mendapatkan bahwa kuantum yang

berpautan dengan frekuensi ν dari cahaya, semuanya harus berenergi sama dan bahwa energi E berbanding lurus dengan ν . jadi

$$E = h\nu = h\omega$$

maka dalam hal ini usaha lebih relevan jika didefinisikan dengan variabel laju sudut dari partikel ω , dengan kata lain kita mebgganti $P\Delta V$ dengan $\mathcal{P} \Delta\omega$ karena \mathcal{P} disini bisa dianggap sebagai variabel keadaan sama seperti tekanan P dimana $\mathcal{P} \approx h$, sehingga hukum pertama termodinamika untuk kasus ini menjadi

$$\Delta U = \Delta Q + \mathcal{P} \Delta\omega \dots \dots \dots (4)$$

dimana \mathcal{P} adalah tekanan, yang akan diturunkan selanjutnya, \mathcal{P} disini bukan didefinisikan sebagai gaya persatuan luas, di sini persamaan (4) bersifat positif ($+\mathcal{P} \Delta\omega$), ini mencerminkan bahwa peningkatan laju sudut ω , akan meningkatkan usaha partikel untuk menggeser dinding sumur potensial.

Dari definisi fungsi Helmholtz, yaitu :

$$F = U - TS \dots \dots \dots (5)$$

dengan F adalah fungsi helmholtz, U adalah energi dalam gas, T adalah temperatur dan S adalah entropi, sekarang jika persamaan (5) tersebut kita turunkan secara implisit, diperoleh :

$$dF = dU - SdT - TdS \dots \dots \dots (6)$$

subtitusikan persamaan (4) ke persamaan (6), maka diperoleh :

$$dF = dQ + \mathcal{P} d\omega - SdT - TdS$$

dimana $dQ = TdS$ jadi :

$$\begin{aligned} dF &= TdS + \mathcal{P} d\omega - SdT - TdS \\ dF &= \mathcal{P} d\omega - SdT \dots \dots \dots (7) \end{aligned}$$

jadi jika suhu konstan $dT = 0$, persamaan (7) menjadi

$$dF = \mathcal{P} d\omega$$

$$\mathcal{P} = \left(\frac{\partial F}{\partial \omega} \right)_{T,N} \dots \dots \dots (8)$$

Dan jika laju sudut konstan $d\omega = 0$, maka :

$$dF = -SdT$$

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{\omega, N} \dots\dots\dots(9)$$

Tetapi hubungan antara fungsi energi bebas helmholtz dengan fungsi partisi masih tetap, sama seperti pada termodinamika gas ideal biasa (lihat sears and Sallinger hal 342, pers 11-81), yaitu :

$$F_{(T, \omega, N)} = -kT \ln Z(T, \omega, N) \dots\dots\dots(10)$$

Sekarang kita menentukan fungsi partisi untuk sebuah partikel tunggal di dalam sumur potensial adalah :

$$Z_1 = \sum_i e^{-\beta \epsilon_i}$$

$$= \int_0^{\infty} f(\epsilon) e^{-\beta \epsilon} d\epsilon$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{\epsilon^2}{2(h\omega)^3} e^{-\beta \epsilon} d\epsilon$$

$$= \frac{1}{2(h\omega)^3} \int_0^{\infty} \epsilon^2 e^{-\beta \epsilon} d\epsilon$$

$$= \frac{1}{2(h\omega)^3} \left(\frac{2!}{\beta^{2+1}} \right)$$

$$= \frac{2}{2(h\omega)^3 \beta^3} = \frac{1}{(h\omega)^3 \left(\frac{1}{kT} \right)^3}$$

$$= \left(\frac{kT}{h\omega} \right)^3 \dots\dots\dots(11)$$

dimana $\beta = \frac{1}{kT}$

Persamaan di atas, diasumsikan $kT \gg h\omega$, dan menggunakan rapat keadaan $f(\epsilon)$ yang lebih tepat untuk potensial osilator harmonik.

Dengan alasan biasa, fungsi partisi untuk N partikel yang tak berinteraksi di dalam sebuah gas adalah :

$$\begin{aligned}
Z &= \frac{1}{N!} [Z_1(T, \omega)]^N \\
&= \left(\frac{1}{N!}\right)^N \left(\frac{kT}{h\omega}\right)^{3N} \\
&\approx \left(\frac{e}{N}\right)^N \left(\frac{kT}{h\omega}\right)^{3N} \dots\dots\dots(12)
\end{aligned}$$

Persamaan (12) di atas menggunakan pendekatan Stirling's untuk N yang sangat besar.

Fungsi energi bebas Helmholtz, adalah :

$$\begin{aligned}
F &= -kT \ln Z \\
&= -kT \ln \left[\frac{e}{N} \left(\frac{kT}{h\omega}\right)^3 \right]^N \\
&= -NkT \ln \left[\frac{e}{N} \left(\frac{kT}{h\omega}\right)^3 \right] \dots\dots\dots(13)
\end{aligned}$$

sehingga persamaan (8), untuk tekanan menjadi :

$$\begin{aligned}
\mathcal{P} &= \left(\frac{\partial F}{\partial \omega}\right)_{N,T} \\
&= \frac{\partial}{\partial \omega} \left\{ -NkT \ln \left[\frac{e}{N} \left(\frac{kT}{h\omega}\right)^3 \right] \right\}_{T,N} \\
&= -NkT \frac{\partial}{\partial \omega} \left\{ \ln \left[\frac{e(kT)^3}{Nh^3} \right] - \ln \omega^3 \right\}_{T,N} \\
&= -NkT \left(-3 \frac{\partial}{\partial \omega} \ln \omega \right) \\
&= 3 \frac{NkT}{\omega} \dots\dots\dots(14)
\end{aligned}$$

Yang memberikan persamaan keadaan yaitu :

$$\mathcal{P} \omega = 3NkT \dots\dots\dots(15)$$

Persamaan diatas analog dengan persamaan keadaan dari gas ideal ($PV = NkT$).

Sedangkan energi untuk tiga partikelnya adalah :

$$E = - \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \right)_{N, \omega}$$

$$= - \frac{\partial}{\partial \beta} \left\{ \ln \left[\frac{e}{N} \left(\frac{kT}{h\omega} \right)^3 \right]^N \right\}_{N, \omega}$$

karena $\beta = \frac{1}{kT}$, maka :

$$E = - \frac{\partial}{\partial \beta} \left\{ \ln \left[\frac{e}{N} \left(\frac{\beta}{h\omega} \right)^3 \right]^N \right\}$$

$$= 3 \frac{N}{\beta} = 3NkT \dots \dots \dots (16)$$

Apabila dikombinasikan dengan persamaan (14), maka diperoleh :

$$E = 3NkT$$

$$= \omega \left(\frac{3NkT}{\omega} \right)$$

$$= \omega \mathcal{P} \dots \dots \dots (17)$$

Jadi ada perbandingan antara energi dengan frekuensi osilasi, dan berdasarkan fakta bahwa energi untuk partikel di dalam osilator harmonik, harganya dikuantisasi dengan nilai $nh\omega$.

Untuk gas ideal biasa kapasitas kalor untuk volume konstan (C_v) dan tekanan konstan (C_p) adalah sebagai berikut :

$$C_p = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_p = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{3}{2} NkT \right) = \frac{3}{2} Nk \dots \dots \dots (18)$$

dan hubungan yang dikenal antara C_p dan C_v adalah :

$$C_p - C_v = P \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = P \left[\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{NkT}{P} \right) \right]_p = Nk \dots \dots \dots (19)$$

sedangkan untuk partikel yang dijebak pada sumur potensial adalah mempunyai kapasitas kalor pada frekuensi sudut konstan yaitu :

$$C_{\omega} = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_{\omega} = \left(\frac{\partial}{\partial T} 3NkT \right)_{\omega} = 3Nk \dots \dots \dots (20)$$

sedangkan hubungan antara C_{ω} dengan C_p yaitu kapasitas kalor pada tekanan konstan C_p adalah :

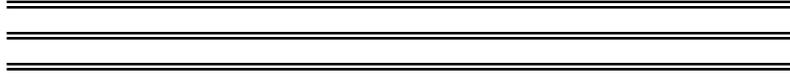
$$\begin{aligned} C_p - C_{\omega} &= \mathcal{P} \left(\frac{\partial \omega}{\partial T} \right)_p \\ &= - \mathcal{P} \left[\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{3NkT}{\mathcal{P}} \right) \right]_p \\ &= -3NkT \dots \dots \dots (21) \end{aligned}$$

maka ini mengakibatkan $C_p = 0$, dengan kata lain, energi yang diperlukan menaikkan temperatur partikel sebesar ΔT , semuanya datang dari kerja yang dilakukan partikel dengan meningkatnya ω , ini diperlukan untuk menjaga $\mathcal{P} = \frac{E}{\omega}$

III. Kesimpulan

Bagi daerah perangkap sebuah sumur potensial volume bukanlah variabel termodinamika yang tepat. Meskipun dengan demikian termodinamika bisa dikembangkan dengan menggunakan parameter lain pada partikel. Dalam makalah ini atom diasumsikan ditempatkan pada sumur potensial, atom bergerak secara osilasi harmonik. Dan sebagai pengembangan lain dalam keadaan tersebut digunakan frekuensi osilasi pada daerah sumur potensial yang minimum.

Dalam makalah ini diturunkan dari Hukum Gas ideal yang telah dirumuskan. Hubungan semacam ini dapat digunakan dalam memecahkan permasalahan termodinamika partikel yang terjebak dalam sumur potensial dengan analogi gas yang di tempatkan dalam sumur potensial yang berdinding kuat dan tetap, sehingga energi yang terdapat dalam dinding potensial tersebut bernilai tak berhingga.



- (1) Martin Ligare, *Journal Elementary Thermodynamics of Trapped Particles* (Department of Physics, Bucknell University, Lewisburg, PA 2002).
- (2) Sears and Sallinger, *Thermodynamics, Kinetic theory and Statistical Thermodynamics* (Addison-Wesley Publishing Company)

LAMPIRAN