Tinjauan Termodinamika Sistem Partikel Tunggal Yang Terjebak Dalam Sebuah Sumur Potensial

Oleh

Saeful Karim

Jurusan Pendidikan Fisika
Fakultas Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Pendidikan Indonesia
2003

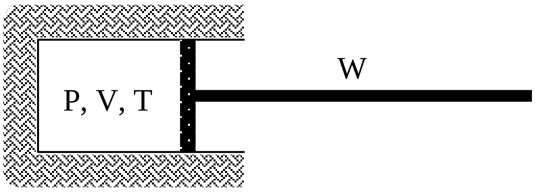
ABSTRAK

Dalam penelitian ini telah dikembangkan hubungan-hubungan antara koordinat-koordinat termodinamika untuk suatu sistem partikel tunggal yang terjebak dalam sumur potensial secara teoritis. Untuk memudahkan peninjauan terhadap sistem partikel tunggal yang terjebak dalam sumur potensial, digunakan pendekatan gas ideal dengan sedikit modifikasi terhadap hukum-hukum termodinamika dengan menggunakan konsep-konsep fisika kuantum. Parameter-parameter yang digunakan adalah jumlah pertikel, temperatur, energi, frekuansi osilasi, dan tekanan umum. Kemudian dibuat analogi terhadap hubungan termodinamika konvensional untuk gas ideal pada volume tetap. Pada akhir penelitian teoritis ini diperoleh perumusan-perumusan sebagai berikut:

- *Rumusan persamaan keadaan sistem partikel yang terjebak dalam sumur potensial* $\mathcal{P}\ \omega = 3NkT$ *yang analog dengan persamaan keadaaan dari gas ideal* $(PV = NkT)$.
- *Rumusan kapasitas kalor untuk sistem partikel yang terjebak dalam sumur potensial adalah :* $C_\omega = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_\omega = \left(\frac{\partial}{\partial T}3NkT\right)_\omega = 3Nk$. *Yang analog dengan rumusan kapasitas kalor untuk gas ideal, yaitu :* $C_p = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_P = \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{3}{2}NkT\right) = \frac{3}{2}Nk.$

Pendahuluan

Hukum-hukum termodinamika selama ini kebanyakan baru diterapkan pada sistem termodinamika berupa gas ideal. Penurunan persamaan-persamaan hukum termodinamika yang diterapkan pada gas ideal, biasanya diasumsikan bahwa sistem yang ditinjau adalah gas yang terdapat sebuah silinder tertutup dengan sebuah piston yang dapat bergerak. Seperti tergambar di bawah ini :



Gambar-1

Gas ideal mempunyai sifat bahwa partikel-partikel tidak saling berinteraksi, kecuali lewat tumbukan, persamaan yang sudah terkenal untuk gas ideal adalah :

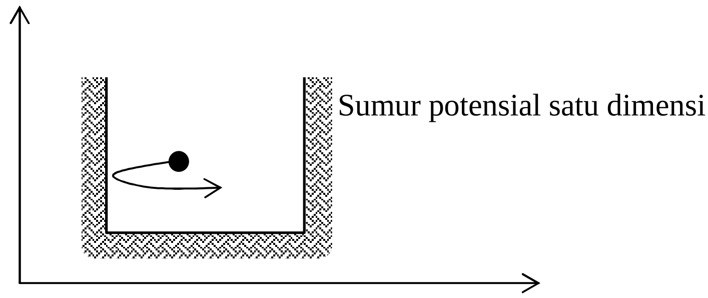
$$PV = NkT \qquad (1-1)$$

dimana P adalah tekanan gas, V adalah volume bebas untuk gas bergerak, N adalah jumlah partikel, T adalah temperatur, k adalah konstanta gas ideal, dan mempunyai persamaan energi :

$$E = \frac{3}{2}NkT \qquad (1-2)$$

Jika gas berada pada sebuah selinder tertutup, maka dengan mudah kita dapat menentukan volumenya. Akan tetapi sekarang bagaimana halnya jika partikel gas tersebut berada pada sebuah sumber potensial dimana dindingnya dibatasi oleh sebuah energi potensial tak berhingga. Jelas kita tidak dapat menentukan volume dengan mudah, sehingga persamaan (1) di atas harus dimodifikasi agar dapat menentukan persamaan gas ideal pada sistem ini.

Sistem yang kita maksud dapat digambarkan sebagai berikut :



Gambar 2

G

Pembahasan

Sekarang kita bahas sistem yang digambarkan pada gambar-2. Dalam hal ini kita akan sedikit menyinggung persoalan fisika kuantum, dimana partikel pada sumur potensial tersebut yang bermassa m, geraknya bergelombang, dengan frekuensi f dan energi E.

Kita tinjau kembali Hukum Pertama termodinamika yang merupakan hukum kekekalan energi untuk gas ideal di dalam sebuah volume V, persamaan hukum pertama termodinamika tersebut adalah

$$\Delta U = \Delta Q - P\Delta V \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1-3)$$

dimana ΔU adalah energi dalam dari gas ideal, ΔQ adalah kalor dan $P\Delta V$ adalah usaha. Untuk sistem dimana partikel tunggal gas tersebut terjebak pada sumur potensial, harga usaha di sini tidak relevan jika didefinisikan dengan variabel volume. Dari perumusan Plank didapatkan bahwa kuanta yang berpautan dengan frejuensi v dari cahaya, semuanya harus berenergi sama dan bahwa energi E berbanding lurus dengan v. jadi

$$E = hv = h\omega$$

maka dalam hal ini usaha lebih relevan jika didefinisikan dengan variabel laju sudut dari partilkel ω, dengan kata lain kita mebgganti $P\Delta V$ dengan $\mathcal{P}\,\Delta\omega$ karena $\mathcal{P}$ disini bisa dianggap sebagai variabel keadaan sama seperti tekanan P dimana $\mathcal{P} \approx h$, sehingga hukum pertama termodinamika untuk kasus ini menjadi

$$\Delta U = \Delta Q + \mathcal{P}\,\Delta\omega \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1-4)$$

dimana $\mathcal{P}$ adalah tekanan, yang akan diturunkan kemudian. $\mathcal{P}$ disini bukan didefinisikan sebagai gaya persatuan luas, di sini persamaan (1-4) bersifat positif (+$\mathcal{P}$ $\Delta\omega$), ini mencerminkan bahwa peningkatan laju sudut ω, akan meningkatkan usaha partikel untuk menggeser dinding sumur potensial.

Dari definisi fungsi Helmholtz, yaitu :

$$F = U - TS \text{...} (1-5)$$

dengan F adalah fungsi helmholtz, U adalah energi dalam gas, T adalah temperatur dan S adalah entropi, sekarang jika persamaan (1-5) tersebut kita turunkan secara implisit, diperoleh :

$$dF = dU - SdT - TdS \text{...} (1-6)$$

subtitusikan persamaan (1-4) ke persamaan (1-6), maka diperoleh :

$$dF = dQ + \mathcal{P}\, d\omega - SdT - TdS$$

dimana $dQ = TdS$ jadi :

$$dF = TdS + \mathcal{P}\, d\omega - SdT - TdS$$

$$dF = \mathcal{P}\, d\omega - SdT \text{..} (1-7)$$

jika suhu konstan, maka $dT = 0$, sehingga persamaan (1-7) menjadi

$$dF = \mathcal{P}\, d\omega$$

$$\mathcal{P} = \left(\frac{\partial F}{\partial \omega}\right)_{T,N} \text{..} (1-8)$$

jika laju sudut konstan , maka $d\omega = 0$, sehingga :

$$dF = -SdT$$

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{\omega,N} \text{...} (1-9)$$

Tetapi hubungan antara fungsi energi bebas helmholtz dengan fungsi partisi masih tetap, sama seperti pada termodinamika gas ideal biasa (lihat sears and Sallinger hal 342, pers 11-81), yaitu :

$$F_{(T,\omega,N)} = -kT \ln Z(T,\omega,N) \text{................................} (1-10)$$

Sekarang kita akan menentukan fungsi partisi untuk sebuah partikel tunggal di dalam sumur potensial, yaitu sebagai berikut :

$$
\begin{aligned}
Z_1 &= \sum_i e^{-\beta_{\varepsilon_i}} \\
&= \int_0^\infty f(\varepsilon) e^{-\beta\varepsilon} d\varepsilon \\
&= \int_0^\infty \frac{\varepsilon^2}{2(h\omega)^3} e^{-\beta\varepsilon} d\varepsilon \\
&= \frac{1}{2(\mathrm{h}\omega)^3} \int_0^\infty \varepsilon^2 e^{-\beta_\varepsilon} d\varepsilon \\
&= \frac{1}{2(\mathrm{h}\omega)^3} \left(\frac{2!}{\beta^{2+1}} \right) \\
&= \frac{2}{2(\mathrm{h}\omega)^3 \beta^3} = \frac{1}{(h\omega)^3 \left(\frac{1}{kT} \right)^3} \\
&= \left(\frac{\mathrm{kT}}{\mathrm{h}\omega} \right)^3 \text{...}(1-11)
\end{aligned}
$$

dimana $\beta = \frac{1}{kT}$.

Pada persamaan di atas, diasumsikan $kT >> h\omega$, dan digunakan rapat keadaan $f(\varepsilon)$ yang lebih tepat untuk potensial osilator harmonik.

Dengan alasan biasa, fungsi partisi untuk N partikel yang tak berinteraksi di dalam sebuah gas adalah :

$$
\begin{aligned}
Z &= \frac{1}{N!} [Z_1(T, \omega)]^N \\
&= \left(\frac{1}{\mathrm{N!}} \right)^N \left(\frac{kT}{h\omega} \right)^{3N} \\
&\approx \left(\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{N}} \right)^N \left(\frac{kT}{h\omega} \right)^{3N} \text{..}(1-12)
\end{aligned}
$$

Persamaan (1-12) di atas menggunakan pendekatan Stirling's untuk N yang sangat besar.

Fungsi energi bebas Helmholtz, adalah :

$$F = -kT \ln Z$$

$$= \text{-kTln}\left[\frac{e}{N}\left(\frac{kT}{h\omega}\right)^3\right]^N$$

$$= \text{-NkT ln}\left[\frac{\text{e}}{\text{N}}\left(\frac{kT}{h\omega}\right)^3\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1-13)$$

sehingga persamaan (1-8) untuk tekanan menjadi :

$$\mathcal{P} = \left(\frac{\partial F}{\partial \omega}\right)_{N,T}$$

$$= \frac{\partial}{\partial \omega}\left\{-NkT \ln\left[\frac{\text{e}}{\text{N}}\left(\frac{kT}{h\omega}\right)^3\right]\right\}_{T,N}$$

$$= -NkT \frac{\partial}{\partial \omega}\left\{\ln\left[\frac{\text{e(kT)}^3}{Nh^3}\right] - \ln \omega^3\right\}_{T,N}$$

$$= -NkT\left(-3\frac{\partial}{\partial \omega}\ln \omega\right)$$

$$= 3\frac{NkT}{\omega} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1-14)$$

Yang memberikan persamaan keadaan yaitu :

$$\mathcal{P}\,\omega = 3NkT \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1-15)$$

Persamaan diatas analog dengan persamaan keadaaan dari gas ideal $(PV = NkT)$.

Sedangkan energi untuk tiga partikelnya adalah :

$$E = -\left(\frac{\partial\, ln\, Z}{\partial \beta}\right)_{N,\omega}$$

$$= \text{-}\frac{\partial}{\partial \beta}\left\{\ln\left[\frac{e}{N}\left(\frac{kT}{h\omega}\right)^3\right]^N\right\}_{N,\omega}$$

karena $\beta = \dfrac{1}{kT}$, maka :

$$E = -\frac{\partial}{\partial\beta}\left\{\ln\left[\frac{e}{N}\left(\frac{\beta}{h\omega}\right)^3\right]^N\right\}$$

$$= 3\frac{\mathrm{N}}{\beta} = 3NkT \text{...}(1-16)$$

Apabila dikombinasikan dengan persamaan (1-15), maka diperoleh :

$$E = 3NkT$$

$$= \omega\left(\frac{3NkT}{\omega}\right)$$

$$= \omega \ \mathcal{P} \text{………………………………………….}(1\text{-}17)$$

Sehingga dari persamaan yang terakhir ini diperoleh perbandingan antara energi dengan frekuensi osilasi. Berdasarkan fakta bahwa energi untuk partikel di dalam osilator harmonik harganya terkuantisasi dengan nilai $nh\omega$.

Untuk gas ideal biasa kapasitas kalor untuk volume konstan (C_V) dan tekanan konstan (C_P) adalah sebagai berikut :

$$C_p = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_P = \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{3}{2}NkT\right) = \frac{3}{2}Nk \text{............................}(1-18)$$

dan hubungan yang dikenal antara C_P dan C_V adalah :

$$C_P - C_V = P\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = P\left[\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{NkT}{P}\right)_P\right]_P = Nk \text{..................}(1-19)$$

Sedangkan sistem partikel yang terjebak pada sumur potensial mempunyai kapasitas kalor pada frekuensi sudut konstan yaitu :

$$C_\omega = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_\omega = \left(\frac{\partial}{\partial T}3NkT\right)_\omega = 3Nk \text{..................................}(1-20)$$

sedangkan hubungan antara C_ω dengan C_P yaitu kapasitas kalor pada tekanan konstan C_P adalah :

$$C_P - C_\omega = \mathcal{P}\left(\frac{\partial\omega}{\partial T}\right)_P$$

$$= - \mathcal{P}\left[\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{3NkT}{\mathcal{P}}\right)\right]_P$$

$$= -3NkT \qquad (1-21)$$

Maka hal ini mengakibatkan C_P = 0. Dengan kata lain, energi yang diperlukan untuk menaikan temperatur partikel sebesar ΔT, semuanya datang dari kerja yang dilakukan partikel dengan meningkatnya ω, ini diperlukan untuk menjaga $\mathcal{P} = \frac{E}{\omega}$.

Kesimpulan

Untuk membahas sistem partikel yang terjebak dalam sumur potensial secara termodinamika, diperlukan pengetahuan tentang fisika kuantum. Dimana partikel pada sumur potensial tersebut yang bermassa m, geraknya bergelombang, dengan frekuensi f dan energi E. Dengan menerapkan hukum-hukum termodinamika untuk gas ideal dengan sedikit modifikasi, kemudian dioperasikan pada sistem partikel yang terjebak dalam sumur potensial, diperoleh perumusan-perumusan :

- Fungsi energi bebas Helmholtz :

  $$F = -kT \ln Z$$

  $$= -\mathrm{NkT} \ln\left[\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{N}}\left(\frac{kT}{h\omega}\right)^3\right]$$

- Rumusan tekanan untuk partikel yang terjebak dalam sumur potensial :

  $$\mathcal{P} = \left(\frac{\partial F}{\partial \omega}\right)_{N,T} = 3\frac{NkT}{\omega}$$

- Rumusan persamaan keadaan sistem partikel yang terjebak dalam sumur potensial $\mathcal{P}\,\omega = 3NkT$ yang analog dengan persamaan keadaaan dari gas ideal $(PV = NkT)$.

- Rumusan kapasitas kalor untuk sistem partikel yang terjebak dalam sumur potensial adalah : $C_\omega = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_\omega = \left(\frac{\partial}{\partial T} 3NkT\right)_\omega = 3Nk.$ Yang analog dengan rumusan kapasitas kalor untuk gas ideal, yaitu : $C_p = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_P = \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{3}{2} NkT\right) = \frac{3}{2} Nk.$

Bagi daerah perangkap sebuah sumur potensial, volume bukanlan variabel termodinamika yang tepat. Meskipun demikian, termodinamika bisa dikembangkan dengan menggunakan parameter lain pada partikel. Dalam penelitian ini, atom diasumsikan ditempatkan pada sumur potensial, dan atom bergerak secara osilasi harmonik. Dan sebagai pengembangan lain dalam keadaan tersebut digunakan frekuensi osilasi pada daerah sumur potensial yang minimum.

REFERENSI

(1) Martin Ligare, *Journal Elementary Thermodynamics of Trapped Particles* (Department of Physics, Bucknell University, Lewisburg,PA 2002) .

(2) Sears and Sallinger, *Thermodynamics, Kinetic theory and Statistical Thermodynamics* (Addison-Wesley Publishing Company