PERTEMUAN 6-7

LIMIT DAN KESINAMBUNGAN FUNGSI

LIMIT

- Limit menggambarkan seberapa jauh sebuah fungsi akan berkembang apabila variabel di dalam fungsi yang bersangkutan terus menerus berkembang mendekati suatu nilai tertentu.
- Jika fungsu f(x) mendekati L manakala variabel x mendekati a (a dan L keduanya konstanta), maka L disebut limit fungsi f(x) untuk x mendekati a. Hubungan ini dilambangkan dengan notasi:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

LIMIT

- Notasi tersebut dibaca “limit fungsi f(x) untuk x mendekati a adalah L”. Artinya jika variabel x berkembang secara terus menerus hinggga m,endekati bilangan tertentu a, maka nilai fungsi f(x) pun akan berkembang pula hingga mendekati L. Atau sebaliknya, fungsi f(x) dapat dibuat mendewkati nilai tertentu yang diinginkan L dengan mengembangkan variabel x sedemikian rupa hingga mendekati a.

LIMIT

- Dua hal perlu diperhatikan dalam notasi atau pernyataan limit di atas. Pertama, $x \rightarrow a$ harus dibaca serta ditafsirkan sebagai x mendekati a, dan bukan berarti $x=a$.
- Kedua, lim $f(x)=L$ harus dibaca serta ditafsirkan bahwa L adalah limit fungsi $f(x)$, dan bukan berarti L adalah nilai fungi $f(x)$.

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ bukan berarti $f(a) = L$

Limit sisi kiri

- Limit sisi kiri dari sebuah fungsi adalah nilai yang didekati oleh fungsi tersebut apabila variabelnya bergerak mendekati limitnya melalui nilai-nilai yang membesar (x →a dari sisi kiri, melalui nilai-nilai x<a). Jadi jika

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L^-$$

Berarti L^- merupakan limit sisi kiri dari f(x) untuk x →a

Limit sisi kanan

- Limit sisi kiri dari sebuah fungsi adalah nilai yang didekati oleh fungsi tersebut apabila variabelnya bergerak mendekati limitnya melalui nilai-nilai yang mengecil (x →a dari sisi kiri, melalui nilai-nilai x>a). Jadi jika

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L^+$$

Berarti L^+ merupakan limit sisi kiri dari f(x) untuk

x →a

- Limit sebuah fungsi dikatakan ada jika dan hanya jika limit sisi kiri dan limit sisi kanannya ada serta merta. Dalam kasus ini :

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)$$

- Apabila salah satu dari ketentuan-ketentuan di atas tidak terpenuhi, maka limit dari fungsi yang bersangkutan tidak terdefinisi. Dengan demikian limit sebuah fungsi dikatakan tidak ada jika limit salah satunya tidak ada, atau limit kedua sisinya tidak ada, atau limit kedua sisinya ada tetapi tidak sama.

Kaidah-kaidah limit

1. $Jika\ y = f(x0 = x^n dan\ n > 0, maka\ lim\ x^n = a^n$
2. Limit dari suatu konstanta adalah konstanta itu sendiri.

$$\lim_{x \to a} k = k$$

3. Limit dari suatu penjumlahan (pengurangan) fungsi adalah jumlah (selisih) dari limit fungsi-fungsinya.

$$\lim_{x \to a} \left\{ f(x) \pm g(x) = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x) \right\}$$

Kaidah-kaidah limit

4. Limit dari suatu perkalian fungsi adalah perkalian dari limit fungsi-fungsinya.

$$\lim_{x \to a} \left\{ f(x).\, g(x) = \lim_{x \to a} f(x).\, \lim_{x \to a} g(x) \right\}$$

5. Limit dari suatu pembagian fungsi adalah pembagian dari limit fungsi-fungsinya, dengan syarat limit fungsi pembaginya tidak sama dengan nol.

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} \qquad dengan\ syarat\ \lim_{x \to a} g(x) \neq 0$$

Kaidah-kaidah limit

6. Limit dari suatu fungsi berpangkat n adalah pangkat n dari limit fungsinya.

$$\lim_{x \to a} \{f(x)\}^n = \left\{\lim_{x \to a} f(x)\right\}^n$$

7. Limit dari suatu fungsi terakar berpangkat positif adalah akar dari limit fungsinya.

$$\lim_{x \to a} \{\sqrt[n]{f(x)}\} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x) \qquad n > 0}$$

8. Dua buah fungsi yang serupa mempunyai limit yang sama. Jika f(x) = g(x) untuk semua nilai x≠a dan $\lim_{x \to a} f(x) = L$, maka $\lim_{x \to a} g(x) = L$ juga.

Kesinambungan

- Sebuah fungsi f(x) dikatakan sinambung pada x = a jika :

1. f(a) terdefinisi
2. $\lim_{x \to a} f(x)$ terdefinisi
3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ terdefinisi

   Fungsi f(x)dikatakan sinambung dalam suatu interval $b \leq x \leq c$ (atau interval $b < x < c$) jika ia sinambung pada setiap titik di dalam interval tersebut.

Kesinambungan

- Fungsi f(x) yang tidak sinambung pada suatu titik dimana x = a dikatakan asinambung pada x = a
- Ketidaksinambungan sebuha fungsi dapat berbentuk salah satu dari tiga kemungkinan : asinambung tak berhingga, asinambung berhingga, dan asinambung titik.
- Fungsi f(x) dikatan asinambung tak berhingga pada x = a jika f(x) menjadi (positif atau negatif) tak terhingga untuk $x \to a$, yaitu jika f(a) dan lim f(x) untuk $x \to a$ tidak terdefinisi. Kurva dari fungsi yang asinambung tak berhingga pada x=a mendekati x=a sebagai sebuah asimtot.

Kesinambungan

- Fungsi f(x) dikatakan asinambung berhingga pada x=a jika f(x) terdefinisi tapi berubah secara drastis pada x=a, yaitu jika f(a) terdefinisi dan lim f(x) untuk x→a tidak terdefinisi. Kurva dari fungsi yang asinambung berhingga pada x=a mempunyai dua macam nilai f(a) untuk x→a yaitu limit masing-masing sisinya.
- Ciri khas dari fungsi yang memiliki ketidaksinambungan berhingga (finite discontinuity) adalah bahwa nilai fungsinya sama dengan limit salah satu sisinya.
- Fungsi f(x) dikatakan asinambung titik pada x=a jika f(a) tidak terdefinisi tapi lim f(x) untuk x→a terdefinisi. Kurva dari fungsi yang asinambung titik pada x=a tampak seakan-akan sinambung, namun sesungguhnya terputus karena pada x=a tersebut f(x) tidak terdefinisi. Titik dimana f(x) tidak terdefinisi dinamakan “titik yang hilang” dalam fungsi yang bersangkutan.